VISIT…

И. А. ЧАРНЫЙ

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов нефтяных вузов и факультетов

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
НЕФТЯНОЙ И ГОРНО-ТОПЛИВНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1963

13—5—2
УДК 532. 529. 5 + 532. 546 (022)

АННОТАЦИЯ

Книга посвящена основным вопросам гидродинамической теории фильтрации однородных и неоднородных жидкостей, связанных с современными задачами разработки нефтяных и газовых месторождений. Рассмотрены методы расчета интерференции совершенных и несовершенных скважин, вопросы образования и устойчивости водяных и газовых конусов, а также ряд задач вытеснения жидкостей и газов в пористых средах. Приведены методы исследования некоторых вопросов неизотермической фильтрации применительно к задачам термометрии скважин и к методам термического воздействия на пласт.

Книга предназначена для студентов газо-нефтяных втузов и университетов, в которых изучаются элементы подземной гидрогазодинамики, а также для инженерно-технических и научных работников нефтяной и газовой промышленности. Отдельные разделы книги могут представить интерес также для гидрогеологов, гидротехников и работников газонефтехимической промышленности, которым приходится встречаться с процессами фильтрации в различных технологических процессах.

Рецензенты

1. Кафедра аэрогидродинамики Казанского университета.
2. Борисов Ю. П.

ПРЕДИСЛОВИЕ

По подземной газо-нефтяной гидродинамике — теории фильтрации нефти, газа и воды — быстро растущей и развивающейся дисциплине — существует обширная литература в виде все возрастающего количества журнальных статей и время от времени появляющихся отечественных и переводных монографий.

Можно также указать периодические сборники трудов, выпускаемые многими нефтегазовыми научно-исследовательскими институтами и высшими учебными заведениями.

Начиная с классических работ акад. Л. С. Лейбензона — основателя гидродинамической теории фильтрации нефти и газа, относящихся к 30-м годам нашего века, — к настоящему времени имеется большое количество работ, как обобщающих, так и посвященных отдельным вопросам и проблемам этой важной прикладной науки.

Основной учебной литературой для нефтяных и нефтегазовых институтов являются книги В. Н. Щелкачева и Б. Б. Ланука «Подземная гидравлика» (Гостоптехиздат, 1949), И. А. Чарного «Основы подземной гидравлики» (Гостоптехиздат, 1956), А. М. Пирвердяна «Нефтяная подземная гидравлика» (Азнефтеиздат, Баку, 1956), а также более поздняя книга Г. Б. Пыхачева «Подземная гидравлика» (Гостоптехиздат, 1961). Для студентов тех университетов, где читаются специальные курсы по нефтяной подземной гидрогазодинамике с изложением разделов, требующих бóльшей математической подготовки, нежели во втузах, подходящая учебная литература по этому предмету почти полностью отсутствует и студенты вынуждены обращаться к конспектам своих лекций и оригинальным работам.

В связи с этим может оказаться полезным появление настоящей книги, в основе которой лежат лекции, прочитанные автором для студентов и аспирантов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова и МИНХ и ГП им. И. М. Губкина в период 1956—1959 гг., а также предыдущие книги автора «Подземная гидромеханика» (Гостехтеориздат, 1948), указанная выше «Основы подземной гидравлики» и изданный в 1960 г. в МИНХ и ГП краткий литографированный курс «Основы гидродинамической теории фильтрации нефти, газа и воды».

Книга предназначается в качестве систематически изложенного учебного пособия, которое могло бы быть использовано наряду с имеющейся учебной литературой лицами с достаточной математической подготовкой, приближающейся к университетской, как при изучении основ, так и более сложных современных вопросов подземной нефтяной гидрогазодинамики.

Вместе с тем автор стремился подготовить учебное пособие, рассчитанное на широкий круг читателей с различной физико-математической подготовкой, неизбежно отразилось на стиле книги, так как потребовало в возможно краткой форме несколько более подробного изложения вопросов, хорошо знакомых одной части аудитории и недостаточно хорошо знакомых другой. Например, методы теории функции комплексного переменного в приложении к задачам теории фильтрации, понятие об основных уравнениях математической физики и т. п. пришлось осветить более подробно, так как эти разделы курса высшей математики изучаются в газо-нефтяных втузах недостаточно полно.

Некоторые результаты личных исследований, в том числе и неопубликованные, автор счел возможным включить в настоящую книгу без специальных ссылок.

Кроме того, была использована также приведенная в литературном указателе, ни в коей степени не претендующем на полноту, существующая литература.

Кроме того, оказалось необходимым остановиться на хорошо известных студентам газо-нефтяных втузов основных сведениях геологического и гидрогеологического характера, связанных с притоком к скважинам и разработкой нефтяных и газовых месторождений.

Книга разбита на 10 глав, посвященных как основным, обычно излагаемым разделам курса, так и некоторым дополнительным вопросам.

В первой главе излагаются вводные понятия теории фильтрации и схемы одномерных потоков на модели трубки тока переменного сечения. В § 4 этой главы затронут вопрос о распределении действительных скоростей жидких частиц в поперечном сечении фильтрационного потока. Включение этого параграфа представляется целесообразным в связи с получающим широкое применение методом использования меченых частиц для исследования фильтрационных потоков. Как известно, радиоактивные и другие индикаторы, вводимые в фильтрационный поток, распространяются быстрее действительной средней скорости течения. Здесь, несомненно, играет роль, помимо прочих причин, неравномерное распределение скоростей жидких частиц в сечении потока. Такое неравномерное распределение скоростей характерно для всякого потока реальной жидкости. В случае фильтрационных потоков эта степень неравномерности увеличена за счет неодинакового размера условного радиуса

поровых каналов, характеризующегося той или иной кривой распределения.

Вторая глава посвящена дифференциальным уравнениям теории фильтрации. Первые два параграфа содержат обычный вывод уравнений изотермической фильтрации. В § 3—8 сделана попытка построения полной системы уравнений неизотермической фильтрации. В виде приложений кратко рассмотрены некоторые задачи термического воздействия на нефтяной пласт и указанные в последнее время Э. Б. Чекалюком весьма перспективные возможности использования термометрии для исследования скважин и пластов, основанные на эффекте Джоуля — Томсона.

Как известно, в большинстве задач фильтрации инерционными членами принято пренебрегать ввиду обычно очень малых скоростей течения. Однако к настоящему времени выявился круг весьма важных и интересных вопросов, для решения которых учет скоростных членов оказывается необходимым. Сюда можно отнести движение газа в крупных трещинах при большом перепаде давления, истечение газа в скважину через перфорационные отверстия при свободном фонтанировании, когда скорости течения могут приближаться к критическим, и т. п. Наконец, в задачах распространения колебаний в насыщенных жидкостью или газом пористых средах учет инерционных членов имеет принципиальное значение, так как связан с правильным определением скорости распространения того или иного вида колебаний.

Аппаратура высокой точности, применяемая в настоящее время при геофизических методах исследования, позволяет регистрировать весьма малые колебания давления и температуры, в связи с чем исследование волновых процессов в пористых средах приобретает существенный интерес. Таким образом, учет инерционных членов, который обычно считался представляющим чисто академическое значение, во многих случаях может оказаться необходимым. В связи с этим в § 3—8 дан вывод полной системы уравнений — неразрывности, импульсов и энергии — с учетом инерционных членов, в которые из-за неравномерного распределения скоростей частиц в сечении потока введены поправочные коэффициенты типа коэффициентов Кориолиса в выражения потоков количества движения и энергии. Насколько известно, поправки Кориолиса в задачах фильтрации до сего времени не предлагались. Обычно эти поправки фигурируют в задачах гидравлики трубопроводов и открытых русел.

Для простоты и наибольшей доступности изложения указанная система уравнений составлена для одномерного движения в трубке тока переменного сечения, хотя, возможно, запись в векторно-тензорной форме была бы более экономной. С точки зрения автора это оправдывается тем обстоятельством, что основные практические приложения, как правило, связаны с одномерными нестационарными движениями — прямолинейным, плоско-радиальным и радиально-сфери-

ческим. Эффективные методы расчета неодномерных нестационарных движений пока что, к сожалению, отсутствуют для подавляющего большинства практически интересных задач.

Третья, четвертая и пятая главы содержат изложение в общем хорошо уже разработанных методов расчета притока однородной жидкости к совершенным и несовершенным скважинам при установившемся режиме течения.

Шестая глава посвящена безнапорной фильтрации. На первый взгляд безнапорная фильтрация в газо-нефтяных задачах представляет ограниченный интерес, поскольку гравитационное движение нефти со свободной поверхностью встречается довольно редко, например при шахтной добыче нефти. Однако на самом деле это не так: основным признаком безнапорной фильтрации можно считать условие линейной зависимости напора или потенциала точек свободной поверхности от их вертикальной координаты. А это условие имеет место в часто встречающихся случаях течения в пористой среде, когда движется одна жидкость, соприкасающаяся с другой, которая неподвижна. На границе раздела движущейся и неподвижной жидкостей напор или потенциал является линейной функцией вертикальной координаты.

В эту главу включены установленные в свое время автором некоторые интегральные соотношения, оказавшиеся весьма полезными при исследовании ряда задач безнапорной и напорной фильтрации.

Седьмая глава посвящена одной из сложнейших проблем теории фильтрации и еще далекой от своего должного разрешения — задачам равновесия и движения двух жидкостей в пористой среде. С этой проблемой связаны такие важные практические задачи, как движение контуров нефтеносности, водо-нефтяных контактов, устойчивость водяных и газовых конусов, образующихся во время притока к несовершенным скважинам, и т. д. Большинство из них решается в настоящее время приближенными методами, основные из которых приведены в главе. Для некоторых задач указываются способы оценки искомых величин сверху и снизу, а также результаты сопоставления приближенных решений с более точными.

По просьбе автора В. Л. Данилов любезно согласился написать основную часть § 4, в котором приведено полученное им решение задачи о стягивании контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Эта задача сведена В. Л. Даниловым к решению некоторого интегро-дифференциального уравнения специального вида, что было выполнено при помощи быстродействующей электронной вычислительной машины. Полученные В. Л. Даниловым результаты могут рассматриваться, как первые точные расчеты этой весьма сложной и давно привлекавшей внимание задачи.

Восьмая глава посвящена нестационарной фильтрации однородной упругой жидкости и газа. Этот круг вопросов в части задач,

сводящихся к линейным уравнениям упругого режима фильтрации, к настоящему времени довольно хорошо разработан. Относительно хуже исследованы задачи, связанные с нелинейным уравнением Л. С. Лейбензона для нестационарной фильтрации газов. В главе в сжатом виде изложены основные сведения, относящиеся к нестационарной фильтрации однородной жидкости и газа, и приведено описание некоторых точных и приближенных методов расчета.

Девятая глава посвящена фильтрации смесей нескольких жидкостей.

Основное содержание главы составлено в рамках теории Баклея — Леверетта, дополненной рассмотрением одномерных схем течения в трубке переменного сечения при произвольном поле массовых сил и в некоторых случаях с учетом капиллярных эффектов.

Задачи движения взаиморастворимых жидкостей и вопросы конвективной диффузии в пористых средах в этой главе только упоминаются. Теория этих процессов создается в настоящее время и не может считаться в какой-либо мере завершенной. Тем не менее ознакомление читателя в общий чертах с выводом исходных уравнений фильтрации многокомпонентной жидкости при наличии фазовых превращений является, несомненно, целесообразным.

Этот вывод приведен в § 9, который по просьбе автора любезно согласились написать Ю. П. Желтов и М. Д. Розенберг. Круг задач такого рода представляет интерес в связи с весьма перспективными и развивающимися в настоящее время методами интенсификации нефтедобычи при помощи вытеснения сжиженными газами, пенами и т. п., не говоря уже о необходимости построения физически и термодинамически обоснованной теории разработки газоконденсатных месторождений.

В последней десятой главе рассмотрено несколько специальных задач вытеснения в пористых средах, представляющих с точки зрения автора не только теоретический, но и значительный практический интерес — особенности процесса вытеснения в многослойных пластах и движение газового объема в неограниченном водоносном пласте. Последняя задача в точной постановке сводится к некоторой системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, для которой указан процесс решения с любой желаемой степенью точности и даны примеры расчетов, выполненных быстродействующими электронными вычислительными машинами.

Для современного этапа нефтяной подземной гидрогазодинамики, как и для остальных разделов механики сплошных сред, характерным является стремление по возможности правильнее и точнее отразить сложную картину явлений, возникающих при движении однофазных и особенно многофазных жидкостей в пористых средах. Классическая теория фильтрации однородной жидкости, основанная на законе Дарси и рассматриваемая согласно Н. Е. Жуковскому как задача движения идеальной жидкости в поле особых

массовых сил сопротивления, постепенно преобразуется на наших глазах в физико-химическую подземную гидрогазодинамику, органически сочетающую как экспериментальные методы и результаты, так и аналитические методы механики сплошных сред, включая и вероятностные.

Создание обобщающей монографии или руководства по физико-химической подземной гидрогазодинамике является делом ближайшего будущего.

Автор ставил себе гораздо более ограниченную и скромную задачу.

Современный размах научно-исследовательской работы по вопросам подземной гидрогазодинамики можно представить себе хотя бы из того факта, что в книге А. Э. Шейдеггера «Физика течения жидкостей через пористые среды», изданной в 1957 г. и переведенной на русский язык (Гостоптехиздат, 1960), сделана попытка обобщения материалов более 2000 работ. С тех пор появились сотни новых исследований. Хотя большинство работ по фильтрации реферируется в реферативном журнале «Механика» Института научной информации АН СССР, в журнале «Applied Mechanics Reviews», а также некоторых других информационных сборниках, составление учебного пособия, освещающего современное состояние подземной нефтяной гидрогазодинамики, является крайне трудной задачей, при выполнении которой неизбежны промахи и пробелы, за которые автор заранее просит снисхождения.

Значение подземной гидрогазодинамики не только для современной техники добычи нефти и газа, но и для ряда других областей промышленности достаточно хорошо известно. Поэтому во избежание излишнего увеличения объема в книгу не включено введение с изложением задач и историческим очерком возникновения и развития этой дисциплины, тем более что эти вводные разделы достаточно полно освещены в имеющейся литературе по подземной гидрогазодинамике, в том числе и учебной.

Автор выражает благодарность доц. В. А. Евдокимовой и бывшим аспирантам кафедры общей и подземной гидравлики МИНХ и ГП им. И. М. Губкина, канд. техн. наук Г. Д. Розенбергу и Чэнь Чжунсяну за содействие в подготовке материалов, использованных при составлении настоящей книги. Особую признательность автор выражает аспирантам А. М. Власову, Лан Чжан-сину и В. М. Ентову за большую помощь при подготовке книги к печати.

Автор благодарит также рецензентов проф. Г. Г. Тумашева и сотрудников возглавляемой им кафедры гидромеханики Казанского государственного университета им. В. И. Ленина и д-ра техн. наук Ю. П. Борисова за высказанные ими замечания и пожелания, которые были учтены в окончательной редакции книги.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. Пористая среда. Связь скорости фильтрации с действительной физической скоростью частиц жидкости. Закон Дарси. Коэффициенты фильтрации и проницаемости

Фильтрацией называется движение жидкости в пористой среде. Для того чтобы описать этот процесс количественно, нужно ввести некоторую схематизацию пористой среды.

Под пористой средой подразумевается множество твердых частиц, весьма тесно прилегающих друг к другу. Пустое пространство между ними может быть заполнено жидкостью или газом.

Если в пористой среде, содержащей жидкость или газ, будет создан градиент напора, то начнется движение жидкости в направлении от большого напора к меньшему — фильтрация.

Основным свойством жидкости, которое влияет на ее фильтрацию, является вязкость.

При фильтрации площадь соприкосновения между жидкостью и твердыми частицами огромна.

Если сосчитать суммарную поверхность песчинок в 1 $м^3$ породы, то получится огромная цифра, порядка 10 000 $м^2$. Жидкости приходится, таким образом, преодолевать огромную силу трения, а трение между жидкостью и твердым телом обусловлено вязкостью.

Кроме вязкости, поверхностно-активные свойства также влияют на процесс фильтрации.

Имеются эксперименты Ф. А. Требина, М. М. Кусакова и других [1, 2, 3], которые указывают, что ряд обстоятельств физико-химического характера также влияет на процесс фильтрации. Более подробно это рассматривается в курсах физики нефтяного пласта [3, 4, 5].

Перейдем к характеристике пористой среды. Пористая среда представлена обычно совокупностью частиц разнообразной формы и различных размеров.

В некоторых случаях естественные пласты сложены так плотно, что фильтрация, как таковая, крайне незначительна и не имеет практического значения.

Тем не менее скважины, которые пробурены в такой породе, иногда дают нефть, воду или газ. Это может быть обусловлено трещиноватостью. Таким образом, помимо фильтрации, возможно движение жидкости в трещинах. Движение в трещинах приближается к движению в трубах. Жидкость движется, как поток, текущий в трубе прихотливой формы. Мы будем рассматривать в основном фильтрационные задачи.

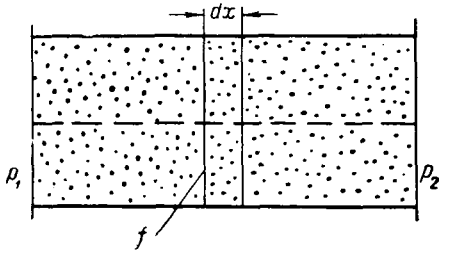


Рис. I. 1. Модель пористой среды — пласта.

Проще всего характеристику пористой среды дать на следующей физической модели.

Представим себе трубку, являющуюся моделью газового или нефтяного пласта (рис. I. 1). Такие модели широко используются в лабораторной и экспериментальной практике. Пусть трубка заполнена пористой средой и до предела насыщена жидкостью. Предположим, что в двух сечениях трубы созданы разные давления p_1 и p_2, причем давление p_1 больше, чем давление p_2.

Под действием разности давлений жидкость начинает двигаться.

Важнейшей характеристикой пористой среды является пористость m. Под пористостью подразумевается отношение объема пустот $V_{\text{пуст}}$ ко всему объему V пласта: $m = V_{\text{пуст}}/V$.

Очевидно, пористость зависит от геометрии частиц и от схемы их укладки.

В ряде случаев твердые зерна породы обволакиваются тонкой пленкой, остающейся неподвижной при обычных градиентах давления. В этом случае подвижная жидкость будет занимать объем, несколько меньший $V_{\text{пуст}}$. Кроме того, в реальной пористой среде бывают тупиковые поры, в которых движение жидкости задерживается ввиду образования застойных областей. Таким образом, наряду с геометрической пористостью, определенной выше, часто пользуются понятием динамической пористости, подразумевая под ней отношение объема, занятого подвижной жидкостью, ко всему объему пласта. В дальнейшем под пористостью будем подразумевать динамическую пористость. Для реальных пластов — коллекторов нефти, воды или газа — значения m обычно лежат в пределах 0,15—0,22, причем, конечно, возможны значительные отклонения в ту и другую сторону.

В конце прошлого столетия американский гидрогеолог Чарльз Слихтер рассмотрел идеализированную модель грунта, состоящую из шариков одинакового радиуса. Грунт, составленный из шариков, называется фиктивным. В этом случае, очевидно, пористость будет зависеть от схемы укладки шариков, но не от их радиуса.

При схеме, показанной на рис. I. 2, *а*, пористость будет наибольшая. Когда же в проходном сечении образуются криволинейные треугольники (рис. I. 2, *б*), пористость будет соответственно меньше.

Слихтер рассматривал геометрическую задачу о том, как связана пористость с углами, образованными радиусами этих соприкасающихся шаров [6, 7]. Формула Слихтера для определения пористости дает значения пористости, приближающиеся к реальным.

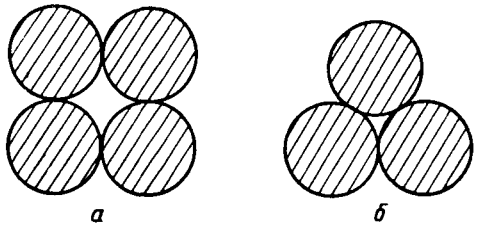


Рис. I. 2. Схемы укладки сферических зерен.

а — наибольшая пористость; *б* — наименьшая пористость.

Вернемся к движению жидкости в трубе, заполненной твердыми частицами. Обозначим через f площадь поперечного сечения нашего пласта — трубы (рис. I. 1). Будем считать жидкость несжимаемой.

Очевидно, жидкость движется не через всю площадь f, а только через площадь просветов $f_{\text{просв}}$, которую можно считать живым сечением потока.

Вследствие очень большого числа частиц из статистических соображений можно считать, что во всех сечениях трубы площадь $f_{\text{просв}}$ будет иметь постоянное значение, несмотря на различную конфигурацию частиц в этих сечениях.

Очень важным является понятие скорости фильтрации. Под скоростью фильтрации w подразумевается частное от деления объемного расхода Q на всю площадь пласта — трубы f: $w = Q/f$.

Очевидно, скорость фильтрации w не является действительной средней скоростью движения в живом сечении.

Истинная средняя скорость $w_{\text{действ}}$ (иногда она называется физической или действительной скоростью движения) получится, если расход Q разделить на площадь просветов $f_{\text{просв}}$. Так как площадь просвета всегда меньше площади сечения пласта f, то действительная скорость движения будет больше скорости фильтрации:

$$w_{\text{действ}} = \frac{Q}{f_{\text{просв}}} > \frac{R}{f} = w.$$

Первой задачей является установление связи между w и $w_{\text{действ}}$. Это можно сделать следующим образом. Проведем два сечения на расстоянии dx друг от друга. Предположим, что жидкость, заполняющая площадь просвета, переместилась из одного сечения в другое за время dt.

Объем жидкости dV, который удален из области между этими двумя сечениями, можно рассчитать так: с одной стороны, этот объем равняется произведению расхода на время; с другой стороны, он является объемом пустот, который находится внутри элемента с площадью сечения f и длиной dx. Отсюда

$$dV = Qdt = mf\,dx,$$

откуда следует

$$\frac{Q}{f} = m\,\frac{dx}{dt}.$$

Но dx/dt — действительная скорость движения, а Q/f — скорость фильтрации.

Таким образом, скорость фильтрации w равна произведению пористости m на действительную скорость движения или на физическую или истинную скорость движения:

$$w = mw_{\text{действ}}. \qquad \text{(I. 1. 1)}$$

Отсюда еще получается, что площадь просветов, деленная на всю площадь, равняется пористости: действительно, учитывая (I. 1. 1), имеем

$$w_{\text{действ}} = \frac{Q}{f_{\text{просв}}} = \frac{w}{m} = \frac{Q}{mf},$$

откуда

$$\frac{f_{\text{просв}}}{f} = m. \qquad \text{(I. 1. 2)}$$

Простейшей геометрической характеристикой пористой среды является эффективный диаметр частиц грунта. Он определяется в результате механического анализа.

Грунт просеивают через набор сит с различной площадью отверстий и отмечают фракции, которые прошли сквозь одно сито и задержались в другом, которые прошли через два сита и задержались в третьем и т. д.

В результате получают кривую фракционного состава, которая имеет примерно вид кривой (рис. I. 3).

По оси абсцисс откладывают последовательно возрастающие диаметры частиц каждой фракции, величины которых находятся в интервалах $0 - d_1$, $d_1 - d_2$, $d_0 - d_3$ ... и т. д., по оси ординат — содержание (% объемн. или % вес.) фракций, меньших данного диаметра.

Затем условно выбирают средний, наиболее характерный диаметр частиц, обозначаемый $d_{эф}$.

Существует много способов выбора этого среднего эффективного диаметра. Эти способы описаны, в частности, в книге Л. С. Лейбензона [6] и в других руководствах [8].

Часто для определения $d_{эф}$ пользуются формулой веса средней частицы

$$d_{эф} = \sqrt[3]{\frac{\sum n_i d_i^3}{\sum n_i}}, \qquad (I.1.3)$$

где d_i — средний диаметр фракции номера i; $d_i = \frac{1}{2}(d_i' + d_i'')$ — полусумма крайних значений d_i', d_i'', диаметров этой фракции.

Имеется и ряд других способов определения эффективного диаметра.

Эффективный диаметр является важной, но не исчерпывающей геометрической характеристикой пористой среды, потому что он дает представление только о размерах зерен, но не об их форме, шероховатости, схеме укладки и т. д. Если взять два образца пористой среды с одинаковыми эффективными диаметрами, но с различной формой зерна и различной структурой укладки, то фильтрационные характеристики у них будут различные.

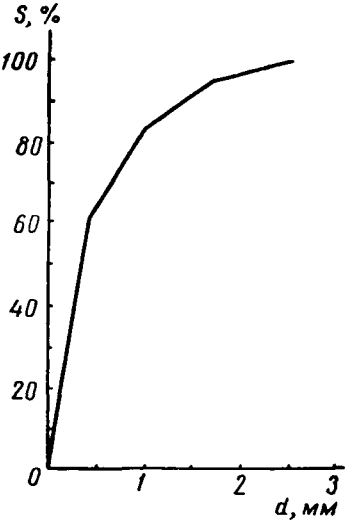


Рис. I. 3. Кривая гранулометрического состава грунта.

Таким образом, для определения геометрической структуры пористой среды, кроме пористости и эффективного диаметра, нужны дополнительные объективные характеристики. Имеется ряд исследований, где делаются попытки изучения геометрической структуры в виде тех или иных кривых распределения размеров пор по условным радиусам [3, 4, 9]. Следует отметить также работу А. Ф. Богомоловой и Н. А. Орловой [10], в которой дается объективный метод определения кривой распределения расстояний между соседними твердыми зернами породы путем специального обмера шлифов породы под микроскопом.

Кривая распределения условных радиусов пор по их размерам обычно представляет собой кривую, по оси абсцисс которой отложен радиус r порового канала, условно принимаемого круглым, а по оси ординат — плотность распределения радиусов $\nu(r)$ (рис. I. 4). Плотность распределения радиусов $\nu(r)$ определяется, как обычно в теории вероятности и математической статистике, произведением

$\nu(r)\,dr$, представляющим собой отношение числа поровых каналов, радиусы которых лежат в пределах между r и $r + dr$, к общему числу поровых каналов, пересекающих поперечное сечение исследуемого образца пористой среды. Таким образом, по определению

$$\int_0^\infty \nu(r)\,dr = 1.$$

Такие кривые обычно получаются экспериментально в результате исследования кривых капиллярного давления при вытеснении одной жидкости другой из пористой среды с последующей обработкой по известной формуле Лапласа, связывающей радиус капилляра и капиллярное давление [3, 9, 10]. Вообще же круг

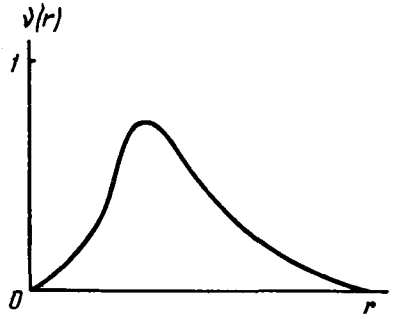


Рис. I. 4. Кривая распределения размеров пор по их условным радиусам.

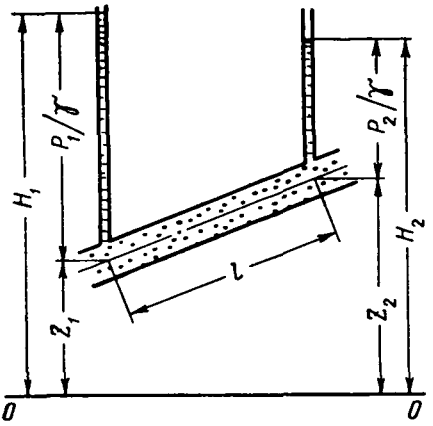


Рис. I. 5. Схема опыта к выводу закона Дарси.

вопросов, связанных с геометрической структурой пористой среды, выяснен еще далеко не достаточно, и здесь предстоит большая работа.

Основной задачей теории фильтрации является установление зависимости между расходами, контурными давлениями, размерами и структурой пласта и физическими свойствами текущих в нем жидкостей.

Одним из основных законов теории фильтрации является установленный в 1856 г. закон Дарси, дающий связь между потерей напора $H_1 - H_2$ и объемным расходом жидкости Q, текущей в трубке с площадью поперечного сечения f, заполненной пористой средой (рис. I. 5).

Напор для несжимаемой жидкости имеет вид:

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g},$$

где z — высота положения; $\frac{p}{\gamma}$ — пьезометрическая высота; γ — объемный вес; u — скорость движения жидкости. Так как при

фильтрации скорость u обычно весьма мала, то в дальнейшем под напором будем понимать величину

$$H = z + \frac{p}{\gamma},$$

пренебрегая величиной скоростного напора $\frac{u^2}{2g}$.

Закон Дарси имеет вид:

$$Q = c\frac{H_1 - H_2}{l} f, \qquad (I.1.4)$$

где c — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом фильтрации.

Закон Дарси показывает, что между потерей напора и расходом существует линейная зависимость. При повышении скорости движения жидкости линейность, т. е. закон Дарси, нарушается. Критерием справедливости закона Дарси обычно служит сопоставление числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{ua\varrho}{\mu}$ с его критическим значением $\mathrm{Re}_{кр}$, после которого линейная связь между потерей напора и расходом нарушается. В выражении числа Re: ϱ — плотность жидкости; μ — ее абсолютная или динамическая вязкость; u — характерная скорость течения; a — характерный геометрический размер пористой среды, который разные авторы определяют по-разному [3, 11, 12, 13].

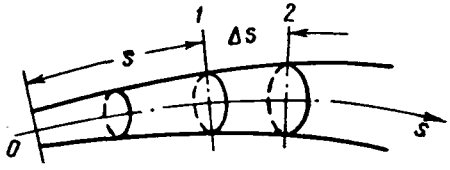


Рис. I. 6. Схема фильтрационного потока в трубке тока переменного сечения.

Запишем закон Дарси в дифференциальной форме. В общем случае $H = H(s, t)$, где s — расстояние вдоль оси криволинейной трубки тока (рис. I. 6); t — время.

Пользуясь формулой (I. 1. 4), можно закон Дарси переписать в виде

$$w = \frac{Q}{f} = c\lim_{\Delta s \to 0}\frac{H(s,t) - H(s+\Delta s, t)}{\Delta s} = -c\frac{\partial H}{\partial s} \qquad (I.1.5)$$

или в векторной форме

$$\vec{w} = -c\,\mathrm{grad}\,H. \qquad (I.1.6)$$

Коэффициент фильтрации c характеризует среду и жидкость одновременно. Этот коэффициент обычно используется в гидротехнических расчетах, где приходится иметь дело с одной жидкостью — водой. В теории фильтрации нефти и газа необходимо разделить

влияние пористой среды и влияние жидкости. Поэтому закон Дарси записывается обычно в несколько ином виде, а именно

$$w = -\frac{k\gamma}{\mu}\frac{\partial H}{\partial s}$$

или

$$w = \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial s}, \qquad (I.1.7)$$

где μ — абсолютный коэффициент вязкости; γ — объемный вес жидкости; k — коэффициент проницаемости, характеризующий среду; $p = \gamma H$ — приведенное давление. Очевидно, что приведенное давление совпадает с истинным при $z = 0$.

В физической системе единиц $[k] = см^2$. В смешанной системе единиц, когда $[p] = кГ/см^2$, $[\mu] = 0{,}01$ *г/см . сек* $= 1$ *спз*, $[s] =$ $= см$, k измеряется в дарси. Очевидно, что при проницаемости 1 *д*, вязкости, равной 1 *спз*, перепаде давления 1 $кГ/см^2$ на 1 *см* и площади сечения, равной 1 $см^2$, расход будет равен 1 $см^3/сек$.

Связь между проницаемостью в физической и смешанной системах единиц выражается соотношением $1\ д = \frac{1}{0{,}981}10^{-8}\ см^2$. Тысячная доля дарси называется миллидарси.

Из сравнения (I.1.4) и (I.1.7) получаем

$$c = \frac{k\gamma}{\mu}. \qquad (I.1.8)$$

Проницаемость песчаных коллекторов обычно находится в пределах $k = 100 \div 1000$ *мд*. Эти пределы являются сугубо условными, так как возможны значительные отклонения в ту и другую сторону.

Крайне малой проницаемостью характеризуются глины (тысячные доли миллидарси). Во многих случаях они считаются непроницаемыми, $k = 0$.

Проницаемость определяется геометрической структурой пористой среды, т. е. размерами и формой частиц и системой их упаковки.

Имеется множество попыток теоретически установить зависимость проницаемости от этих характеристик [3, 6, 7, 11], исходя из законов Пуазейля для ламинарного движения в трубах и Стокса для обтекания частиц при той или иной схематизованной модели пористой среды — набор сферических частиц (фиктивный грунт Слихтера), система параллельных капилляров (идеальный грунт) и т. д. Поскольку реальные грунты, как правило, не укладываются в рамки этих геометрических моделей, теоретические расчеты проницаемости ненадежны. Поэтому обычно проницаемость определяется опытным путем в лабораторных условиях непосредственно из формулы (I.1.7) по наблюдаемой связи между перепадом давлений и расходом, а в натурных условиях путем специального исследования скважин, в ко-

тором также используется устанавливаемая в опыте связь между изменением давления в скважинах и их дебитом.

В настоящее время разработан ряд гидродинамических методов определения параметров пластов, в том числе и проницаемости, основанных на наблюдениях установившегося и неустановившегося притока к скважинам [14, 15, 16]. Некоторые из этих методов изложены ниже.

§ 2. Одномерное течение. Приток несжимаемой жидкости к стоку и источнику на плоскости и в пространстве

В случае одномерного течения несжимаемой жидкости в недеформируемой трубке тока переменного сечения (рис. I. 6) через сечение *1* втекает количество жидкости в единицу времени, равное $Q(s, t)$, и вытекает через сечение *2* количество жидкости $Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds$, откуда уравнение неразрывности имеет для этого случая вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0,$$

или, заменяя Q через его выражение согласно закону Дарси, получаем

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[cf(s) \frac{\partial H}{\partial s} \right] = 0. \qquad (I.2.1)$$

Это есть уравнение для напора при простейших одномерных течениях. Если $c = \text{const}$, то

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[f(s) \frac{\partial H}{\partial s} \right] = 0. \qquad (I.2.2)$$

Если положение трубки тока фиксировано в пространстве, то, учитывая, что жидкость несжимаема и $Q = \text{const}$, уравнение (I. 1. 5) можно представить в виде

$$Q = -c \frac{dH}{ds} f(s), \qquad (I.2.3)$$

откуда найдем распределение напора по длине s:

$$-dH = Q \frac{ds}{cf(s)}. \qquad (I.2.4)$$

Интегрируя (I. 2. 4) по s от $s = s_1$ до текущего значения s, а по H от соответствующих значений H_1 и H, получаем

$$H_1 - H = Q \int_{s_1}^{s} \frac{ds}{cf(s)}. \qquad (I.2.5)$$

При этом c может зависеть от s.

Если известны напор H_1, H_2 в двух сечениях s_1, s_2, то из (I. 2. 5) получим

$$Q = \frac{H_1 - H_2}{\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{cf(s)}} = \frac{H_1 - H_2}{R(s_1, s_2)}, \qquad \text{(I. 2. 6)}$$

где

$$R(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{cf(s)} \qquad \text{(I. 2. 7)}$$

фильтрационное сопротивление.

Формула (I. 2. 6) напоминает закон Ома. Из нее согласно законам Ома и Кирхгофа легко получаются правила расчета течений в системах трубок тока, соединенных последовательно, параллельно или более сложным образом.

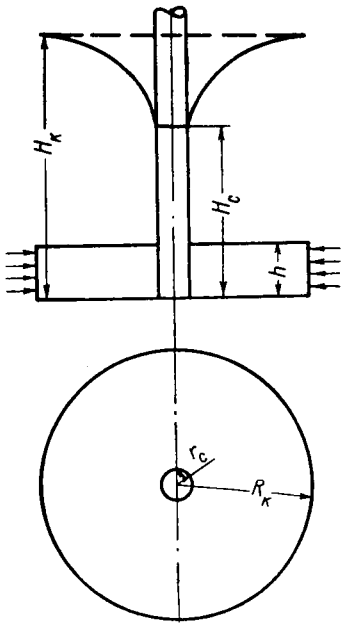


Рис. I. 7. Схема плоско-радиального притока к совершенной скважине.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. $f(s) = \text{const}$, $H = H(s)$ — установившееся течение в цилиндрической трубе. Уравнение (I. 2. 2) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial s^2} = 0 \text{ или } H = C_1 s + C_2, \qquad \text{(I. 2. 8)}$$

т. е. в рассматриваемом случае напор распределяется линейно по длине трубы.

2. Плоско-радиальное установившееся движение (приток к совершенной скважине). Течение имеет вид, изображенный на рис. I. 7, где h — мощность пласта; r_c — радиус скважины; H_c — забойный напор; $H_к$ — напор на круговом контуре; $r = R_к$.

В этом случае $f = 2\pi rh$ и уравнение (I. 2. 2) при замене переменной s на радиус r принимает вид:

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH}{dr} = 0. \qquad \text{(I. 2. 9)}$$

Его решение имеет вид:

$$H = C_1 \ln r + C_2, \qquad \text{(I. 2. 10)}$$

причем при $r = 0$ имеется особенность, но так как радиус скважины r_c всегда конечен, то это не имеет значения.

Задаваясь граничными условиями

$$H = H_c \text{ при } r = r_c,$$
$$H = H_к \text{ при } r = R_к,$$

после элементарных преобразований получаем

$$C_1 = \frac{H_к - H_c}{\ln \frac{R_к}{r_c}}. \qquad (I.2.11)$$

На основании (I.1.5) и (I.2.10)

$$w = -c\frac{dH}{dr} = -c\frac{C_1}{r}, \qquad (I.2.12)$$

откуда с учетом направления скорости следует, что при $C_1 > 0$ скважина является стоком, а при $C_1 < 0$ — источником.

Так как жидкость по предположению несжимаема, то для дебита скважины в случае плоско-радиального течения имеем

$$Q = 2\pi rh|w|. \qquad (I.2.13)$$

Подставляя в (I.2.13) скорость из формулы (I.2.12), получаем

$$|C_1| = \frac{Q}{2\pi hc}$$

и согласно (I.2.11)

$$Q = 2\pi hc\frac{H_к - H_c}{\ln \frac{R_к}{r_c}} \qquad (I.2.14)$$

или

$$q = \frac{Q}{h} = 2\pi c\frac{H_к - H_c}{\ln \frac{R_к}{r_c}}, \qquad (I.2.15)$$

где q — дебит на единицу мощности пласта.

Формула (I.2.14) называется формулой Дюпюи.

Из формул (I.2.10) и (I.2.11) будем иметь

$$H = \frac{q}{2\pi c}\ln r + C_2. \qquad (I.2.16)$$

Введем функцию Ф, называемую потенциалом:

$$\Phi = cH = \frac{kp}{\mu}. \qquad (I.2.17)$$

Подставляя (I.2.17) в выражение (I.1.6) для скорости фильтрации, получаем

$$\vec{w} = -\operatorname{grad}\Phi,$$

т. е. Ф действительно потенциал скорости.

Из (I. 2. 16) получаем выражение для потенциала точечного стока или источника на плоскости:

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + C, \qquad \text{(I. 2. 18)}$$

$q > 0$ — дебит стока на единицу мощности пласта;
$q < 0$ — дебит источника на единицу мощности пласта.

3. Радиально-сферический приток к точечному источнику или стоку в пространстве.

В этом случае $f = 4\pi r^2$ и уравнение (I. 2. 2) принимает вид:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dH}{dr}\right) = 0$$

или, учитывая (I. 2. 17),

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d\Phi}{dr}\right) = 0. \qquad \text{(I. 2. 19)}$$

Откуда следует, что для радиально-сферического течения

$$\Phi = \frac{C_1}{r} + C_2. \qquad \text{(I. 2. 20)}$$

Скорость фильтрации w определяется по формуле

$$w = -\frac{d\Phi}{dr} = \frac{C_1}{r^2}.$$

Очевидно, при $C_1 > 0$ в центре сферы источник, при $C_1 < 0$ — сток.

Дебит равен

$$Q = 4\pi r^2 |w| = 4\pi |C_1|,$$

откуда

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi r} + C. \qquad \text{(I. 2. 21)}$$

По этой формуле определяется потенциал точечного источника в пространстве при $Q > 0$ и стока при $Q < 0$.

Решим задачу для движения между двумя концентричными сферами и выясним, какой она имеет физический смысл.

Будем считать, что на внутренней сфере радиусом r_c известен потенциал Φ_c, на внешней сфере радиусом $R_к$ — потенциал $\Phi_к$. В центре сферы при этом должен быть сток или источник.

Найдем дебит жидкости, протекающей между этими двумя сферами. Пусть в центре сферы находится сток с дебитом Q. Тогда

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi r} + C. \qquad \text{(I. 2. 22)}$$

Обратимся к формуле (I. 2. 22).

Потенциал в любой точке пространства вокруг источника определяется по формуле (I. 2. 21) (вокруг стока — по формуле (I. 2. 22). Следовательно,

$$\Phi_с = -\frac{Q}{4\pi r_с} + C, \quad \Phi_к = -\frac{Q}{4\pi R_к} + C. \qquad (I.\,2.\,23)$$

В полученных уравнениях два неизвестных для дебита Q и константы C.

Ограничимся нахождением дебита. Вычитаем первое уравнение из второго:

$$\Phi_к - \Phi_с = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r_с} - \frac{1}{R_к}\right).$$

Отсюда

$$Q = \frac{4\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\frac{1}{r_с} - \frac{1}{R_к}}. \qquad (I.\,2.\,24)$$

Ниже будет показано, что формула (I. 2. 24) может быть использована для совершенно конкретной задачи. Одновременно выясним сходство и различие формулы (I. 2. 24) для притока к точечному стоку в пространстве с формулой Дюпюи (I. 2. 14) для притока к точечному стоку на плоскости.

Вернемся к исходным формулам (I. 2. 18) и (I. 2. 22). Заметим попутно, что рассматриваемые задачи относятся к теории потенциала — одному из важнейших разделов математической физики, весьма хорошо разработанному в настоящее время.

Формула (I. 2. 18) определяет приток к точечному стоку при $q > 0$ или источнику при $q < 0$ на плоскости.

Формула (I. 2. 22) определяет радиально-сферическое течение к точечному стоку при $Q < 0$ или источнику при $Q > 0$ в пространстве.

Константа в формуле (I. 2. 18) может быть определена, если будет известно давление и, следовательно, потенциал, в какой-либо точке плоскости.

Чтобы найти дебит и константу, нужно знать на одной окружности $\Phi = \Phi_с$ и на другой $\Phi = \Phi_к$.

Задавать потенциал на бесконечности в формуле (I. 2. 18) нельзя, потому что логарифм стремится к бесконечности и формула теряет смысл, поскольку бесконечное значение потенциала физически невозможно.

В этом существенная особенность формулы (I. 2. 18), связанная со свойством логарифмического потенциала обращаться в бесконечность на бесконечности.

Обратимся к формуле (I. 2. 14) Дюпюи.

Чтобы определить дебит точечного стока на плоскости, нам нужно знать радиус области $R_к$.

В реальных условиях радиус области питания никогда не известен абсолютно точно и при геологических определениях радиуса контура питания могут получаться ошибки в несколько раз (например, в 2—3 раза и более).

Представим себе, что мы ошиблись в n раз при определении $R_к$. Тогда

$$\ln \frac{nR_к}{r_с} = \ln \frac{R_к}{r_с} + \ln n. \qquad (I.\,2.\,25)$$

В реальных условиях отношение $R_к/r_с$ выражается числами порядка сотен и тысяч. Следовательно, первый член в (I. 2. 25) дает логарифм сотен или тысяч. Это величины порядка 6—7.

Пусть мы ошиблись в 2 раза: $n = 2$, $\ln 2 \approx 0{,}6$. Таким образом, первый член в (I. 2. 25) гораздо больше второго.

Поэтому погрешность в 2—3 раза в определении $R_к$ вполне допустима, так как этому соответствует погрешность в вычислении дебита обычно не больше чем в 10%.

Обратимся теперь к формулам (I. 2. 22) и (I. 2. 24).

В формуле (I. 2. 22) константа имеет совершенно отчетливый смысл. На бесконечности дробь $1/r$ при $r \to \infty$ уменьшается до нуля. Следовательно, C в (I. 2. 22) есть потенциал на бесконечности:

$$C = \Phi_\infty.$$

Во многих случаях можно считать, что $R_к \gg r_с$.

Тогда $\frac{1}{r_с} \gg \frac{1}{R_к}$ и вторым членом знаменателя в (I. 2. 24) можно вообще пренебречь. Поэтому формула (I. 2. 24) становится особенно простой:

$$Q = \frac{4\pi(\Phi_к - \Phi_к)}{\frac{1}{r_с}} = 4\pi r_с (\Phi_к - \Phi_с). \qquad (I.\,2.\,26)$$

Рассмотрим следующий пример притока к несовершенной скважине, вскрывшей пласт на малую глубину. Предположим сначала, что пласт имеет бесконечно большую мощность. Обозначим через Φ_0 потенциал на большом удалении от скважины, или, что то же, потенциал пласта при отсутствии откачки из скважины. Найдем дебит скважины, если задан потенциал $\Phi_с$ на стенке скважины: $\Phi_с \neq \Phi_0$. Для приближенного решения этой задачи можно воспользоваться формулой (I. 2. 26) следующим образом. Заменим площадь, через которую жидкость поступает в скважину, равновеликой полусферой радиусом $r_с$ (рис. I. 8, *а*).

Верхняя граница пласта — кровля — непроницаема. Тогда согласно симметрии можно найти дебит нашей скважины, разделив пополам дебит стока в формуле (I. 2. 26):

$$Q = 2\pi r_c (\Phi_0 - \Phi_c). \qquad (I.\,2.\,27)$$

Предположим теперь, что имеется пласт конечной мощности h, вскрытый той же скважиной на малую глубину (рис. I. 8, *б*), причем $r_c \ll h$. Пусть расстояние $R_к$ до контура питания с потенциалом

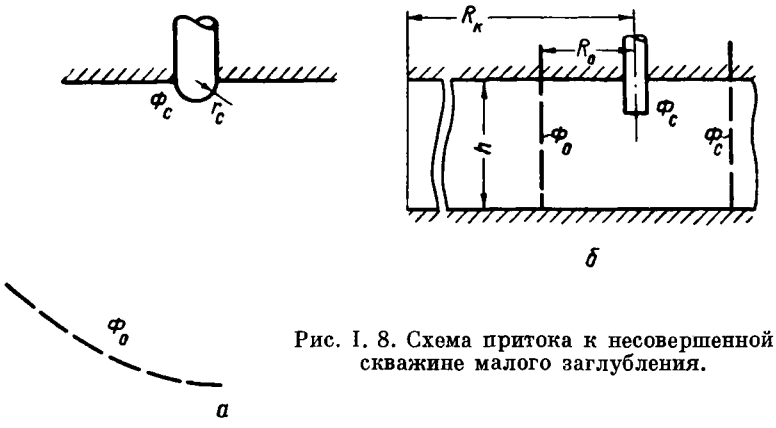


Рис. I. 8. Схема притока к несовершенной скважине малого заглубления.

$\Phi_к$, как обычно, гораздо больше мощности пласта. Дебит скважины с забойным потенциалом Φ_c в этом случае можно приближенно найти следующим образом.

На некотором расстоянии R_0, равном одной-двум мощностям пласта

$$1 \leqslant \frac{R_0}{h} \leqslant 2,$$

проведем мысленно цилиндрическую поверхность, соосную со скважиной.

Движение между контуром питания $R_к$ и цилиндрической поверхностью R_0 можно считать практически плоско-радиальным и определять дебит из формулы Дюпюи для «скважины» радиусом R_0

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_к - \Phi_0)}{\ln \frac{R_к}{R_0}}, \qquad (I.\,2.\,28)$$

где Φ_0 — промежуточный потенциал на границе R_0. Приток же между поверхностью R_0 и скважиной радиусом r_c можно с достаточной точностью рассматривать (если $r_c \ll h$) как движение в пласте бесконечной мощности и рассчитывать по формуле (I. 2. 27).

Таким образом, получаем уравнение

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_к - \Phi_0)}{\ln \frac{R_к}{R_0}} = 2\pi r_с (\Phi_0 - \Phi_с).$$

Это уравнение для быстрейшего исключения Φ_0 можно представить еще, воспользовавшись правилом производных пропорций. Так,

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_к - \Phi_0)}{\ln \frac{R_к}{R_0}} = \frac{2\pi h (\Phi_0 - \Phi_с)}{\frac{h}{r_с}} = \frac{2\pi h (\Phi_к - \Phi_с)}{\ln \frac{R_к}{R_0} + \frac{h}{r_с}}. \quad (I.2.29)$$

Можно принять в первом приближении, что удовлетворительно согласуется с результатами А. А. Ланитиной [25], $R_0 \approx 1{,}5h$ и дебит скважины, вскрывшей пласт на малую глубину, $r_с \ll h$, определять из приближенной формулы

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_к - \Phi_с)}{\frac{h}{r_с} + \ln \frac{R_к}{1{,}5h}}. \quad (I.2.30)$$

Этими сведениями о потенциалах точечных стоков или источников на плоскости и в пространстве пока можно ограничиться.

§ 3. Одномерное установившееся движение однородной сжимаемой жидкости в трубке тока переменного сечения

Приведенные выше результаты, относящиеся к движению несжимаемой жидкости, легко обобщаются на случай одномерного движения сжимаемой жидкости или газа.

Обычно изменением температуры флюидов в пластовых условиях, происходящим от термодинамических эффектов, можно пренебречь и при расчетах скоростей и давлений предполагать движение изотермическим. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 6—8 главы II. Тогда объемный вес γ можно считать известной функцией давления $\gamma = \gamma(p)$. Для общности будем считать проницаемость и вязкость переменными и согласно опытным данным [3, 17, 18] представим их в виде

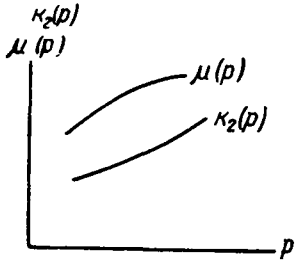


Рис. I. 9. Зависимость вязкости и проницаемости от давления

$$\mu = \mu(p), \quad k = k(s, p) = k_1(s)\, k_2(p). \quad (I.3.1)$$

Типичные зависимости $\mu(p)$, $k_2(p)$ представлены на рис. I. 9. При стационарном течении весовой расход G жидкости или газа в любом сечении трубки тока будет постоянным.

Предположим, что проекцией на направление движения массовых сил, таких, как тяжесть, центробежные силы и т. д., можно пренебречь. Тогда согласно (I. 1. 7), предполагая движение следую-

щим закону Дарси, получим для весового расхода G:

$$G = -\frac{k_1(s)\,k_2(p)}{\mu(p)}\,\frac{dp}{ds}\,f(s)\,\gamma(p). \qquad \text{(I. 3. 2)}$$

Следуя Л. С. Лейбензону, введем новую функцию давления $P_1(p)$:

$$P_1(p) = \int \frac{k_2(p)\,\gamma(p)}{\mu(p)}\,dp. \qquad \text{(I. 3. 3)}$$

Тогда (I. 3. 2) примет вид:

$$G = -k_1(s)\,\frac{dP_1}{ds}\,f(s). \qquad \text{(I. 3. 4)}$$

Из сравнения формул (I. 3. 4) и (I. 2. 3) устанавливается аналогия между стационарными движениями несжимаемой и сжимаемой жидкости: в случае одной и той же зависимости $f(s)$ аналогом объемного расхода Q несжимаемой жидкости является весовой расход G сжимаемой, аналогом напора H — функция P_1, аналогом коэффициента фильтрации c — функция проницаемости $k_1(s)$, аналогом объемной скорости w в случае несжимаемой жидкости — весовая скорость γw сжимаемой. Пользуясь этой аналогией, решения задач движения несжимаемой жидкости можно распространить на аналогичные случаи движения сжимаемой жидкости или газа.

Одномерное движение в трубке тока переменного сечения легко рассчитывается и при нелинейном законе фильтрации. Пусть закон фильтрации задан в виде

$$-\frac{dp}{ds} = \varphi(|w|)\,\frac{w}{|w|} \qquad \text{(I. 3. 5)}$$

или

$$w = -\frac{\dfrac{dp}{ds}}{\left|\dfrac{dp}{ds}\right|}\,\varphi^{-1}\left(\left|\frac{dp}{ds}\right|\right) = \psi\left(\left|\frac{dp}{ds}\right|\right)\left(-\frac{\dfrac{dp}{ds}}{\left|\dfrac{dp}{ds}\right|}\right), \qquad \text{(I. 3. 6)}$$

где φ — известная функция; φ^{-1} — функция, обратная φ.

Часто закон фильтрации задается в виде одночленной степенной зависимости

$$w = -\frac{\dfrac{dp}{ds}}{\left|\dfrac{dp}{ds}\right|}\,C\left|\frac{dp}{ds}\right|^n, \qquad \text{(I. 3. 7)}$$

где C и n — эмпирические константы.

Показатель n называется показателем режима фильтрации и обычно лежит в пределах $\frac{1}{2} \leqslant n \leqslant 1$. Его можно связать с числом

Рейнольдса фильтрационного потока [3, 19]. Гораздо более обоснованным физически является двучленный закон фильтрации

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{\mu}{k} w + \frac{w}{|w|} b \varrho w^2 = \frac{\mu}{k} w + \frac{w}{|w|} \frac{b\gamma}{g} w^2, \quad (I.3.8)$$

где первое слагаемое дает потерю давления от прямого трения между жидкостью и пористой средой согласно линейному закону Дарси, второе, содержащее опытный коэффициент b, потерю давления, связанную с сужением и расширением элементарных струек потока, обтекающих беспорядочную систему твердых частиц, слагающих пористую среду, повороты струек и т. д. Примерные значения параметра b приведены в [12, 20, 21]. Второе слагаемое можно назвать потерей давления на «микроместные сопротивления» в отличие от термина «местные сопротивления», применяемого в трубопроводной гидравлике и относящегося к деталям трубопроводной арматуры (задвижки, колена, переходы от одного сечения труб к другому), геометрические размеры которых несравненно больше размеров песчинок, обтекаемых фильтрационным потоком. При малых скоростях w и соответственно малых числах Рейнольдса в (I. 3. 8) превалирует первый член, при больших — второй. Считая скорость фильтрации направленной по оси s и заменяя

$$w = \frac{Q}{f(s)} = \frac{G}{\gamma(p) f(s)}, \quad (I.3.9)$$

из (I. 3. 5) получаем

$$-\frac{dp}{ds} = \varphi\left[\frac{G}{\gamma(p) f(s)}\right]. \quad (I.3.10)$$

Переменные в (I. 3. 10) при одночленном степенном законе фильтрации разделяются, и интегрирование выполняется без затруднений. Формулы для простейших случаев прямолинейного, плоскорадиального и радиально-сферического течений, когда $f(s)$ соответственно выражается в виде $f = \text{const}$, $f = c_1 s$, $f = c_2 s^2$, приведены в ряде руководств [8, 19].

При двучленном законе (I. 3. 10) принимает вид после замены w из (I. 3. 9):

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{\mu(p)}{k_1(s) k_2(p)} \frac{G}{\gamma(p) f(s)} + \frac{b}{g} \frac{G^2}{f^2(s) \gamma(p)}. \quad (I.3.11)$$

В общем случае $\mu = \mu(p)$, $k = k_1(s) k_2(p)$ уравнение (I. 3. 11) приходится интегрировать численно или приближенно, аппроксимируя коэффициенты уравнения (I. 3. 11) в виде специально подбираемых зависимостей, допускающих интегрирование в аналитической форме.

При $\mu(p) = \mu = \text{const}$, $k = \text{const}$ уравнение (I. 3. 11) интегрируется сразу после введения функции P, называемой обычно функцией Лейбензона:

$$P = \int \gamma(p)\, dp. \quad (I.3.12)$$

Действительно, умножая (I.3.11) на $\gamma(p)$, получаем

$$-\gamma(p)\frac{dp}{ds}=\frac{\mu}{k}\frac{G}{f(s)}+\frac{b}{g}\frac{G^2}{f^2(s)}$$

или

$$-\frac{dP}{ds}=\frac{\mu}{k}\frac{G}{f(s)}+\frac{b}{g}\frac{G^2}{f^2(s)}, \qquad (I.3.13)$$

откуда

$$P_1-P_2=\frac{\mu}{k}G\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{f(s)}+\frac{b}{g}G^2\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{f^2(s)}, \qquad (I.3.14)$$

где P_1 и P_2 — значения функции Лейбензона в сечениях трубки тока s_1, s_2.

§ 4. О распределении скоростей в поперечном сечении фильтрационного потока

Реальные пористые среды обычно состоят из множества твердых частиц разных размеров и форм, тем или иным образом упакованных. Фильтрация представляет собой течение жидкости или газа, которое может происходить в пустых промежутках между твердыми зернами. Ввиду очевидной сложности такого течения геометрическая структура пористой среды тем или иным образом схематизируется, а для характеристики формы зерен вводятся те или иные способы оценки отклонения формы зерен от сферической.

Наиболее простая геометрическая схема фильтрации — фильтрация в фиктивном грунте, состоящем из частиц сферической формы, рассмотренная впервые Слихтером и подробно исследованная и описанная в классических книгах Л. С. Лейбензона [6, 7]. Обычно применяемая в технических расчетах схема — это схема идеального грунта, в которой поры представлены в виде цилиндрических трубок. Эта схема широко использует результаты трубопроводной гидравлики и для движения однородной жидкости обычно дает правильные результаты при расчетах расходов и средних скоростей. При движении же неоднородных жидкостей и при изучении реального физического механизма процесса вытеснения одной жидкости другой в пористой среде схема грунта, составленного из одинаковых частиц, оказывается недостаточной. В последнее время предпринят ряд попыток ввести тем или иным образом статистические характеристики пористой среды и использовать для описания процесса фильтрации аппарат теории вероятностей и математической статистики. Исследования в этом направлении, еще далекие от своего завершения, позволяют рассчитывать на существенный прогресс наших представлений о механизме фильтрации. Некоторые результаты приведены в обзорной книге Шейдеггера [3] и в работах [22, 23, 24].

Неоднородность пористой среды может быть частично учтена кривой распределения тех или иных геометрических характеристик пористой среды — кривой, полученной механическим анализом грунта через сита различных размеров для определения так называемого эффективного диаметра частиц (наиболее распространенный на практике способ), кривой распределения размеров пор по их радиусам, получаемой на основании прямых определений по закрашенным шлифам породы или в результате опытов по капиллярному вытеснению одной жидкости другой и т. д.

Само понятие радиуса поры является несколько условной величиной, поскольку форма живого сечения потока в пределах одной поры в реальных

грунтах обычно отличается от круга. Поэтому более правильным будет подразумевать под «радиусом» поры ее гидравлический радиус, как это делается в трубопроводной гидравлике.

Очевидно, различие размеров пор обусловливает и различие скоростей в пределах поперечного сечения фильтрационного потока, причем подразумевается, что площадь поперечного сечения потока во много раз больше площади сечения отдельной поры.

На рис. I. 10 показан примерный вид какого-либо участка площади поперечного сечения фильтрационного потока. Сечения твердых зерен породы заштрихованы. В промежутках между ними находятся живые сечения отдельных струек, радиусы или, точнее, гидравлические радиусы которых различны в пределах данного сечения и подчиняются некоторым законам распределения. Если механический состав грунта более или менее выдержан по объему, что будет предполагаться в дальнейшем, то распределение размеров пор согласно статистическим соображениям можно считать одинаковым во всех поперечных сечениях потока. Очевидно, в пределах некоторой длины, равной по порядку величины размеру одного зерна, движение вдоль какой-либо струйки можно рассматривать как движение в трубке переменного сечения. Весь фильтрационный поток можно представить как некоторое направленное в среднем движение жидкости внутри огромного множества сообщающихся между собой трубок, длина которых в отдельности равна по порядку величины размеру твердых частиц.

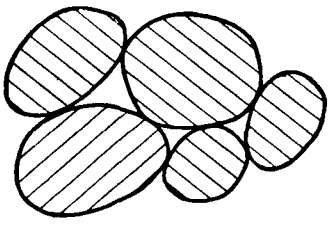


Рис. I. 10. Поперечное сечение реальной пористой среды.

Потерю напора между какими-либо двумя поперечными сечениями можно рассматривать, если следовать вдоль какой-либо струйки, как сумму потерь напора на трение при движении в указанных трубках и сумму потерь от местных сопротивлений, имеющих место при выходе струйки из конца одной трубки и входе в другую. Это обстоятельство, как упоминалось выше, может служить обоснованием двучленного закона фильтрации (I. 3. 8).

Оценим потерю напора h_τ на трение и местную потерю напора $h_м$ в пределах одной трубки, т. е. в пределах размеров примерно одной твердой частицы согласно обычным формулам гидравлики Дарси — Вейсбаха и Вейсбаха:

$$h_\tau = \lambda \frac{l}{d} \frac{u^2}{2g}, \quad h_м = \zeta \frac{u^2}{2g}, \tag{I. 4. 1}$$

где λ и ζ — безразмерные коэффициенты, зависящие от числа Рейнольдса и формы частиц; d — четырехкратный гидравлический радиус трубки; l — длина трубки; u — действительная средняя скорость в трубке. По порядку величин, учитывая поправки на неравномерное распределение скоростей в сечении трубки при ламинарном режиме, можно принять

$$\lambda \approx \frac{64}{\mathrm{Re}}, \quad \zeta \approx 2. \tag{I. 4. 2}$$

Величина $\zeta \approx 2$ взята с запасом, как для потери при истечении струи в затопленное пространство. В действительности $\zeta < 2$. Учитывая, что в случае действия закона Дарси должно быть по Линдквисту [11] $\mathrm{Re} \leqslant 4$, и полагая в пределах одного зерна $\frac{l}{d} \approx 1$, приходим к выводу, что местные потери по крайней мере на порядок меньше потерь трения. Отсюда следует, что поскольку трубки сообщаются между собой, то каждая струйка по выходе из данной трубки будет стремиться войти в ближайшую к ней трубку возможно максимального

сечения. При этом, очевидно, струйки, двигающиеся в порах наибольших размеров, продолжат свое движение также в дальнейших порах наибольших размеров и при распределении размеров пор, выдерживающемся в данной области грунта, установится распределение струек примерно одинаковых поперечных сечений.

Если в крайних сечениях потока заданы напоры H_1 и H_2, то для всех струек будет одна и та же потеря напора, откуда следует, что при примерно одинаковой суммарной длине L струек средние скорости в струйках должны подчиняться условию

$$\frac{u}{d^2} \approx \text{const},$$

вытекающему из известной формулы гидравлики для ламинарного течения

$$H_1 - H_2 \approx \frac{Au\nu L}{d^2 g}, \qquad (\text{I. 4. 3})$$

где $\nu = \frac{\mu}{\varrho}$ — кинематический коэффициент вязкости; $A = 32$ для круглой трубки. Отсюда следует, что средняя физическая скорость течения $\bar{u}$, связанная со скоростью фильтрации w отношением $\bar{u} = \frac{w}{m}$, соответствует течению в трубке некоторого среднего диаметра $\bar{d}$. Скорости же вдоль струек u связаны с $\bar{u}$ согласно (I. 4. 3) формулой

$$\frac{u}{\bar{u}} = \frac{d^2}{\bar{d}^2}. \qquad (\text{I. 4. 4})$$

При ламинарном режиме в пределах трубки максимальная осевая скорость u_0 примерно в 2 раза превосходит среднюю u. Таким образом, максимальная физическая скорость жидкой частицы в фильтрационном потоке связана со средней физической скоростью соотношением

$$(u_0)_{\max} \approx 2 \frac{d^2_{\max}}{\bar{d}^2} \bar{u} \qquad (\text{I. 4. 5})$$

и в зависимости от отношения $d_{\max}/d$ может значительно ее превосходить. Этот вывод подтверждается лабораторными и натурными опытами по измерению скоростей при помощи меченых атомов. Неравномерное распределение скоростей вследствие неравномерного распределения размеров пор является физическим обоснованием так называемых диффузионных теорий фильтрации, которым за последнее время уделяется довольно много внимания [3, 23]. Наблюдения скорости перемещения тем или иным образом отмеченных частиц жидкости в пористой среде, например, при помощи радиоактивных изотопов или, что проще, введением в поток очень малых добавок краски или солей принципиально позволяют построить кривую распределения размеров пор. Отметим, что с повышением скорости фильтрации и нарушением закона Дарси коэффициент λ в (I. 4. 1) уменьшается и множитель $\lambda \frac{l}{d}$ становится сравнимым с ζ. В этом случае следует ожидать более равномерного распределения скоростей, нежели для движения, подчиняющегося закону Дарси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Требин Ф. А. Нефтепроницаемость песчаных коллекторов. Гостоптехиздат, 1945.

2. Кусаков М. М., Ребиндер П. А., Зинченко К. Е. Поверхностные явления в процессах фильтрации нефти. Докл. АН СССР, т. 28, № 5, 1940.

3. Шейдеггер А. Е. Физика течения жидкостей через пористые среды. Пер. с англ. Гостоптехиздат, 1960.
4. Оркин К. Г., Кучинский П. К. Физика нефтяного пласта. Гостоптехиздат, 1955.
5. Бабалян Г. И., Кравченко И. И., Мархасин И. Л., Рудаков Г. В. Физико-химические основы применения поверхностно-активных веществ при разработке нефтяных пластов. Гостоптехиздат, 1962.
6. Лейбензон Л. С. Собрание трудов, т. II. Подземная гидрогазодинамика, подземная гидравлика. Изд. АН СССР, 1953.
7. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат, 1947.
8. Пыхачев Г. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1961.
9. Амикс Дж., Басс Д., Уайтинг Р. Физика нефтяного пласта. Пер. с англ. Гостоптехиздат, 1962.
10. Богомолова А. Ф., Орлова Н. А. Количественная характеристика структуры порового пространства. Сиб. отд. АН СССР, Прикл. мех. и техн. физ. № 4, 1961.
11. Маскет М. Движение однородной жидкости в однородной пористой среде. Пер. с англ. Гостоптехиздат, 1949.
12. Чарный И. А. Основы подземной гидравлики. Гостоптехиздат, 1956.
13. Минц Д. М., Шуберт С. А. Гидравлика зернистых материалов. Изд. Мин. коммун. хоз. РСФСР, 1956.
14. Скабалланович И. А. Гидрогеологические расчеты по динамике подземных вод. Госгортехиздат, М., 1960.
15. Чернов Б. С., Базлов М. Н. Исследование нефтяных и газовых скважин и пластов. Гостоптехиздат, 1953.
16. Крылов А. П., Белаш П. М., Борисов Ю. П., Бучин А. Н., Воинов В. В., Глоговский М. М., Максимов М. И., Николаевский Н. М., Розенберг М. Д. Проектирование разработки нефтяных месторождений. Гостоптехиздат, 1962.
17. Горбунов А. Т., Николаевский В. Н. Установившийся приток к скважинам при упругом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1961.
18. Бондарев Э. А., Николаевский В. Н. Оценка влияния отклонений от закона Дарси на форму индикаторных кривых. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1962.
19. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.
20. Минский Е. М. О турбулентной фильтрации газа в пористых средах. Труды Всесоюзного научно-исследовательского института природных газов. Вопросы добычи, транспорта и переработки природных газов. Гостоптехиздат, 1951.
21. Engelund F. On the Laminar and Turbulent Flows of Ground Water through Homogeneous Sand. Transactions of the Danish Academy of Technical Sciences, No. 3, 1953.
22. Минский Е. М. Статистическое обоснование уравнений фильтрационного движения. Докл. АН СССР, т. 118, № 2, 1958.
23. Николаевский В. Н. Капиллярная модель диффузии в пористых средах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1959.
24. Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджанянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. Гостоптехиздат, 1962.
25. Ланитина А. А. Разработка и улучшение существующих методов расчета притока нефти к скважинам с различными видами несовершенства. ВНИИнефтегаз, 1956.

ГЛАВА II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. Дифференциальные уравнения изотермической фильтрации без учета массовых сил

В принципе общие уравнения фильтрации однородной жидкости должны быть получены из уравнений Навье — Стокса путем введения надлежащих статистических характеристик фильтрационной среды. Однако до сих пор это еще не сделано, хотя имеется ряд попыток [1]. Мы выведем уравнения фильтрации как обобщение закона Дарси [Лт. I. 6, 7, 2].

Выше было показано, что закон Дарси может быть записан в виде (*I.* 1. 6)

$$\vec{w} = -\frac{k}{\mu}\operatorname{grad} p,$$

где $p = \gamma H$ — для несжимаемой жидкости; H — напор; p совпадает с давлением для сжимаемой жидкости. При такой записи в случае сжимаемой жидкости пренебрегаем массовыми силами по сравнению с поверхностными.

Уравнение неразрывности для сплошного потока жидкости имеет, как известно, вид:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{w}) = 0.$$

При выводе уравнения неразрывности в теории фильтрации необходимо учесть, что фактически жидкость накапливается в объеме mdV, где dV — элемент объема пористой среды; m — пористость, откуда следует, что уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial (m\varrho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{w}) = 0, \qquad \text{(II. 1. 1)}$$

где $\vec{w}$ — вектор скорости фильтрации жидкости.

Проекции скорости фильтрации на оси координат равны

$$u = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{II.1.2}$$

В общем случае подлежат определению величины u, v, w, p, ϱ, m и температуры жидкости и пористой среды, причем температуры пористой среды $T_{ср}$ и жидкости $T_{ж}$ могут быть разными. Температура может изменяться, например, при закачке горячей жидкости, газа или пара в нефтяной пласт, что иногда практикуется для повышения нефтеотдачи [3, 4, 5, 6]. В дальнейшем в этом параграфе принимаем $T_{ср} = T_{ж} = T = \text{const}$, т. е. тепловых явлений не рассматриваем.

Таким образом, для определения шести функций u, v, w, p, ϱ, m имеем четыре уравнения (II. 1. 1) и (II. 1. 2). Чтобы система уравнений была замкнутой, необходимо добавить уравнение состояния

$$\varrho = \varrho(p, T) \tag{II.1.3}$$

и уравнение для пористости

$$m = m(p). \tag{II.1.4}$$

Последнее уравнение представляет собой обычно линейную функцию, разную при нагрузке и при разгрузке.

Рассмотрим частный случай несжимаемой жидкости и неизменяемой пористой среды, т. е. $\varrho = \text{const}$, $m = \text{const}$. В этом случае уравнение неразрывности имеет вид:

$$\operatorname{div}\vec{w} = 0. \tag{II.1.5}$$

Пусть для общности проницаемость переменна. Подставляя в уравнение (II.1.5) выражения (II.1.2) и полагая $\mu = \text{const}$, получаем

$$k\nabla^2 p + \operatorname{grad} k \operatorname{grad} p = 0. \tag{II.1.6}$$

Если $k = \text{const}$, то

$$\nabla^2 p = 0, \tag{II.1.7}$$

т. е. давление удовлетворяет при $k = \text{const}$ уравнению Лапласа. На основании (I.2.17) можно написать

$$\nabla^2 \Phi = 0, \tag{II.1.8}$$

т. е. при $k = \text{const}$ потенциал также удовлетворяет уравнению Лапласа. Переписывая уравнение (II.1.8) в полярных или сфери-

ческих координатах и учитывая, что согласно симметрии для плоско-радиального и радиально-сферического течений

$$\Phi = \Phi(r),$$

получаем уравнения (I.2.9) и (I.2.19) соответственно.

При $k \neq \text{const}$ уравнение (II. 1. 6) принимает весьма сложный вид. Для общего случая $k = k(p, x, y, z, t)$ точных решений пока не имеется. Относительно более простая задача, когда проницаемость является известной функцией координат $k = k(x, y, z)$, [II. 1. 6] обращается в линейное уравнение с переменными коэффициентами. Некоторые точные решения для частных видов зависимости $k = k(x, y, z)$ указаны Г. С. Салеховым [7] и румынским исследователем Т. Оровяну [8].

Еще более общим случаем является анизотропная пористая среда, когда вдоль осей x, y, z в формулах (II. 1. 2) проницаемости $k_x(p, x, y, z, t)$, $k_y(p, x, y, z, t)$, $k_z(p, x, y, z, t)$ различны.

При этом оказывается, что проницаемость — тензорная величина — и градиент давления не совпадает по направлению с вектором скорости фильтрации, за исключением трех взаимно-перпендикулярных направлений, называемых главными осями тензора проницаемости. Эти задачи исследовались Феррандоном и другими [Лт. I. 3]. Гораздо более простым является случай однородно-анизотропной среды, когда проницаемости k_x, k_y, k_z постоянны, но различны. Можно показать, что простым преобразованием координат этот случай сводится к однородной среде (§ 3, гл. V). Ниже, если это не будет специально оговорено, пористая среда предполагается изотропной во всех направлениях.

§ 2. Вывод Н. Е. Жуковского дифференциальных уравнений изотермического движения жидкости в пористой среде с учетом массовых сил из дифференциальных уравнений Эйлера для идеальной жидкости

Н. Е. Жуковский дал замечательный вывод общих дифференциальных уравнений теории фильтрации, следующей закону Дарси, исходя из уравнений движения идеальной жидкости.

Уравнения движения идеальной жидкости Эйлера имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},
\end{aligned} \qquad \text{(II. 2. 1)}$$

где u, v, w — проекции скорости жидкой частицы; X, Y, Z — проекции массовых сил, отнесенные к единице массы жидкости; ϱ — плотность; p — давление.

Когда внешней массовой силой является сила тяжести, направляющая оси x, y в горизонтальной плоскости, а ось z вертикально вверх (рис. II. 1, *а*), получим

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -g, \tag{II.2.2}$$

где $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2} — ускорение силы тяжести.

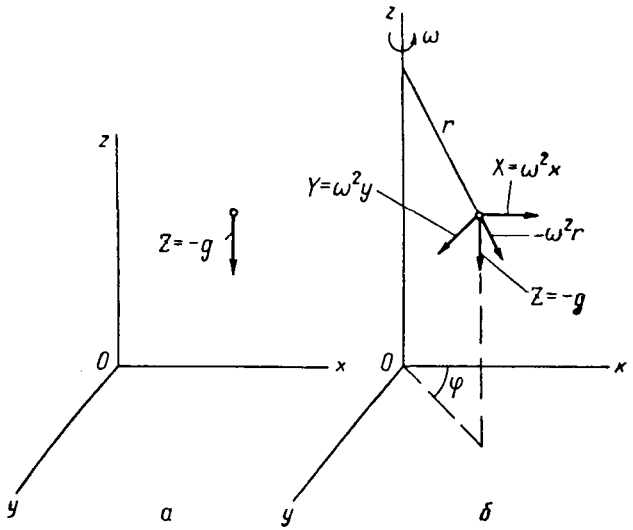


Рис. II. 1. Проекции силы тяжести и центробежной силы (к выводу дифференциальных уравнений движения жидкости в пористой среде).

Когда внешними массовыми силами являются центробежная сила и сила тяжести (вращение вокруг вертикальной оси) (рис. II. 1, *б*),

$$\begin{aligned} X &= \omega^2 r\cos\varphi = \omega^2 x,\\ Y &= \omega^2 r\sin\varphi = \omega^2 y,\\ Z &= -g, \end{aligned} \tag{II.2.3}$$

где ω — угловая скорость вращения относительно оси z; r — радиус вращения; φ — угол между радиусом вращения и осью x.

Если в пористой среде происходит фильтрация жидкости, появляется сила трения по поверхности зерен, слагающих пористую среду. Так как эта поверхность очень велика, то можно считать, что сила трения распределена по всему объему пористой среды.

Следовательно, с высокой степенью точности можно рассматривать силу трения как объемную силу.

Таким образом, можно воспользоваться уравнениями (II. 1. 1) для фильтрации жидкости в пористой среде, но считать, что массовые силы включают в себя две части:

$$X = X_1 + X_2;\ Y = Y_1 + Y_2;\ Z = Z_1 + Z_2,$$

где X_1, Y_1, Z_1 — проекции внешних массовых сил; X_2, Y_2, Z_2 — проекции массовых сил сопротивления, зависящих от скорости.

Если под u, v, w подразумеваются проекции скорости фильтрации, то, предполагая для простоты пористость m постоянной, имеем

$$\frac{1}{m}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{m^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} + X_1 + X_2,$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{m^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} + Y_1 + Y_2, \quad \text{(II. 2. 4)}$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{m^2}\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} + Z_1 + Z_2.$$

Обычно скорость фильтрации очень мала и конвективными членами в левой части уравнений (II. 2. 4) можно пренебречь. Можно показать также, что и локальные производные по времени, как правило, могут быть отброшены. Тогда уравнения (II. 2. 4) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} - \varrho X_1 - \varrho X_2 &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \varrho Y_1 - \varrho Y_2 &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \varrho Z_1 - \varrho Z_2 &= 0. \end{aligned} \quad \text{(II. 2. 5)}$$

Из сравнения с законом Дарси при отсутствии массовых сил следует, что ϱX_2, ϱY_2, ϱZ_2 пропорциональны и противоположны проекциям скорости фильтрации и выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varrho X_2 &= -\frac{\mu}{k}u, \\ \varrho Y_2 &= -\frac{\mu}{k}v, \\ \varrho Z_2 &= -\frac{\mu}{k}w, \end{aligned} \quad \text{(II. 2. 6)}$$

где k — проницаемость пористой среды; μ — абсолютная вязкость жидкости.

Таким образом, уравнения движения жидкости в пористой среде имеют следующий вид:

$$u = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \varrho X_1\right),$$
$$v = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \varrho Y_1\right), \qquad \text{(II. 2. 7)}$$
$$w = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \varrho Z_1\right).$$

Рассмотрим случай, когда массовой силой является сила тяжести (рис. II. 1, а). Согласно (II. 2. 2) уравнения (II. 2. 7) будут иметь вид:

$$u = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$w = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \gamma\right), \quad \gamma = \varrho g. \qquad \text{(II. 2. 8)}$$

При больших скоростях фильтрации, например, в случае мощного взрыва в пласте нужно оставить левые части уравнения (II. 2. 4), что требует более подробного рассмотрения [9, 10].

При движении, не следующем закону Дарси, массовые силы сопротивления X_2, Y_2, Z_2 являются нелинейными функциями компонентов скорости фильтрации. Дифференциальные уравнения для этого случая составлены Л. С. Лейбензоном [Лт. I. 6, 7]. Решения для одномерных стационарных течений в трубках тока переменного сечения, как было сказано выше в § 2—3 главы I, могут быть получены без принципиальных затруднений. Методы решения для некоторых неодномерных течений, не следующих закону Дарси, указаны С. А. Христиановичем [11], В. В. Соколовским [12] и Ф. Энгелундом [Лт. I. 21].

Приведем некоторое преобразование уравнений движения, предполагая параметры жидкости зависящими от давления.

Предположим, что поле массовых сил имеет потенциал $U(x, y, z, t)$, т. е. вектор массовой силы $\vec{F}_1$ с проекциями X_1, Y_1, Z_1 может быть представлен в виде

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} U \qquad \text{(II. 2. 9)}$$

или в проекциях на оси координат

$$X_1 = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y_1 = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z_1 = -\frac{\partial U}{\partial z}. \qquad \text{(II. 2. 10)}$$

Пусть для общности проницаемость k, вязкость μ и плотность ϱ являются известными функциями давления p, $k = k(p)$, $\mu = \mu(p)$, $\varrho = \varrho(p)$. С учетом уравнений (II. 2. 7), которые умножаем на $\varrho(p)$,

и (II.2.10) для проекций массовой скорости фильтрации ϱu, ϱv, ϱw получим

$$\varrho u = -\left[\frac{k(p)\varrho(p)}{\mu(p)}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k(p)\varrho^2(p)}{\mu(p)}\frac{\partial U}{\partial x}\right],$$
$$\varrho v = -\left[\frac{k(p)\varrho(p)}{\mu(p)}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{k(p)\varrho^2(p)}{\mu(p)}\frac{\partial U}{\partial y}\right], \qquad \text{(II.2.11)}$$
$$\varrho w = -\left[\frac{k(p)\varrho(p)}{\mu(p)}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{k(p)\varrho^2(p)}{\mu(p)}\frac{\partial U}{\partial z}\right].$$

Форма уравнений (II.2.11) наводит на естественную мысль ввести две функции давления:

$$\Phi = \Phi(p) = \int \frac{k(p)\varrho(p)}{\mu(p)}\,dp, \quad \Theta = \Theta(p) = \frac{k(p)\varrho^2(p)}{\mu(p)}. \qquad \text{(II.2.12)}$$

Очевидно, при отсутствии массовых сил $\Phi = \Phi(p)$ является потенциалом массовой скорости фильтрации.

Л. С. Лейбензон в теории фильтрации газов впервые ввел аналогичную функцию. Поэтому $\Phi(p)$ будем называть обобщенной функцией Лейбензона для сжимаемой однородной жидкости.

Уравнения (II.2.11), как нетрудно видеть, принимают вид:

$$\varrho u = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Theta\frac{\partial U}{\partial x}\right), \quad \varrho v = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Theta\frac{\partial U}{\partial y}\right),$$
$$\varrho w = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \Theta\frac{\partial U}{\partial z}\right). \qquad \text{(II.2.13)}$$

Действительно, по определению интеграла из (II.2.12) имеем

$$d\Phi = \frac{k(p)\varrho(p)}{\mu(p)}\,dp,$$

а из формулы полного дифференциала для $d\Phi$ и dp получим

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial \Phi}{\partial t}dt =$$
$$= \frac{k(p)\varrho(p)}{\mu(p)}\left[\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz + \frac{\partial p}{\partial t}dt\right].$$

Из произвольности дифференциалов dx, dy, dz, dt следует, что коэффициенты при dx, dy, dz, dt равны. Отсюда согласно (II.2.10) немедленно вытекает справедливость уравнений (II.2.13).

Подставляя (II.2.13) в уравнение неразрывности (II.1.1), получаем

$$\frac{\partial(m\varrho)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta\frac{\partial U}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\Theta\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\Theta\frac{\partial U}{\partial z}\right). \qquad \text{(II.2.14)}$$

Пользуясь уравнениями состояния (II. 1. 3) и (II. 2. 11), из дифференциального уравнения (II. 2. 14), вообще говоря, можно получить, смотря по желанию, дифференциальное уравнение для одной из функций Φ, p, ϱ. Например, для функции Φ имеем из соотношения (II. 2. 12) $\Phi = \Phi(p)$. Разрешая последнее уравнение относительно p, получаем $p = p(\Phi)$ и затем $m = m(p) = m[p(\Phi)] = m(\Phi)$, $\varrho = \varrho(p) = \varrho[p(\Phi)] = \varrho(\Phi)$, $\Theta = \Theta(p) = \Theta[p(\Phi)] = \Theta(\Phi)$. Таким образом, уравнение (II. 2. 14) может быть записано в виде соотношения только для одной функции Φ и аналогично для p и ϱ. Это соотношение в общем случае приводит, как видно, к весьма сложному нелинейному, как правило, дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных параболического типа. В некоторых случаях, как будет показано ниже, оно может быть линеаризовано и сведено к обычному уравнению теплопроводности. В общем же случае задача оказывается весьма сложной. При установившемся течении, пренебрегая массовыми силами, из (II. 2. 13) для Φ получаем уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = 0, \tag{II. 2. 15}$$

которому удовлетворяет давление при фильтрации несжимаемой жидкости постоянной вязкости в неизменяемой пористой среде с постоянной проницаемостью. Таким образом, решения, полученные для задач фильтрации несжимаемой жидкости, обобщаются, как указано также в книге Г. Б. Пыхачева [Лт. I. 8], на аналогичные условия движения сжимаемой жидкости, причем, как легко видеть, величина $\frac{kp}{\mu}$ заменяется обобщенной функцией Лейбензона Φ, а объемная скорость фильтрации $\vec{w}$ — массовой скоростью фильтрации $\varrho \vec{w}$.

Можно вместо массовой скорости фильтрации $\varrho \vec{w}$ определять весовую скорость фильтрации $\gamma \vec{w} = g \varrho \vec{w}$. Потенциал весовой скорости фильтрации в этом случае будет

$$\Phi = \int \frac{k(p)\gamma(p)}{\mu(p)} dp, \tag{II. 2. 16}$$

а при постоянных $\mu(p) = \mu = \text{const}$, $k(p) = k = \text{const}$

$$\Phi = \frac{k}{\mu} \int \gamma(p)\, dp = \frac{kP}{\mu}, \tag{II. 2. 17}$$

где через P обозначен интеграл

$$P = \int \gamma(p)\, dp, \tag{II. 2. 18}$$

иногда называемый функцией Лейбензона для однородной сжимаемой жидкости.

При постоянных k, μ, пренебрегая массовыми силами, из (II. 2.14) получаем

$$\frac{\partial (m\gamma)}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \nabla^2 P. \qquad \text{(II. 2. 19)}$$

Потенциал, как и функция P, определяется с точностью до аддитивной (т. е. прибавляемой) произвольной постоянной. Поэтому интегралы в (II. 2. 12) или (II. 2. 18) могут оставаться неопределенными или записываться в виде $\int_{p_0}^{p}$, где p_0 — любое давление, в частности нуль.

Найдем вид функции P для газов и упругой капельной жидкости. Для газов, особенно углеводородных, уравнение состояния $\gamma = \gamma(p, T)$ часто берется в виде

$$\frac{p}{\gamma} = zRT, \qquad \text{(II. 2. 20)}$$

где R — газовая постоянная; T — абсолютная температура; $z = z\left(\frac{p}{p_{кр}}, \frac{T}{T_{кр}}\right)$ — так называемый коэффициент сверхсжимаемости, определяемый по эмпирическим формулам или графикам; $T_{кр}$, $p_{кр}$ — критические температура и давление. Для идеального газа, следующего уравнению Клапейрона, $z = 1$.

Для P получим

$$P = \int \gamma(p)\, dp = \frac{1}{RT} \int \frac{p}{z}\, dp. \qquad \text{(II. 2. 21)}$$

Если давление меняется незначительно, то

$$P \approx \frac{1}{2RTz_{ср}} p^2 + \text{const}, \qquad \text{(II. 2. 22)}$$

где $z_{ср}$ — среднее значение z в пределах изменения давления.

Для более точных расчетов, разумеется, интеграл (II. 2.21) следует вычислять соответственно точнее. Для идеального газа, приводя к атмосферным условиям $\gamma_{ат}$, $p_{ат}$, при температуре течения T получаем

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_{ат}}{\gamma_{ат}} = RT, \qquad \text{(II. 2. 23)}$$

$$P = \frac{\gamma_{ат}}{2p_{ат}} p^2 + \text{const}. \qquad \text{(II. 2. 24)}$$

Для однородной упругой капельной жидкости, ввиду малого изменения γ, $\gamma(p)$ в (II. 2.17) можно считать обычно практически постоянной $\gamma(p) \approx \gamma_0$. Тогда

$$P = \gamma_0 p + \text{const}. \qquad \text{(II. 2. 25)}$$

§ 3. Замечания о системе уравнений для общего случая неизотермической фильтрации

В большинстве случаев движение природных жидкостей и газов в их естественных коллекторах — пористых средах, слагающих продуктивные пласты, — предполагается изотермическим, хотя известно, что при этом температура изменяется, правда, обычно незначительно. Примером является описываемый во всех курсах термодинамики классический эффект Джоуля — Томсона.

В связи с развитием современных, весьма точных методов термометрии пластов и скважин представляет интерес составление полной системы уравнений, связывающих скорости, давления и температуры жидкости и пористой среды. Информация, доставляемая в виде термограмм пластов и скважин, может оказаться полезной при изучении их фильтрационных параметров.

Из работ, выполненных в этом направлении, следует отметить исследования Э. Б. Чекалюка, посвященные задаче о связи между гидродинамическими и термическими параметрами фильтрационных потоков, и предложенные им методы использования этой связи [5, 6].

Большой интерес также представляет задача о нагнетании горячей жидкости, газа или пара в пласт для повышения нефтеотдачи и улучшения проницаемости призабойной зоны.

Для простоты будем предполагать пористую среду неизменяемой и однородной. Замкнутая система уравнений для давления p, вектора скорости $\vec{w}$, плотности ρ или объемного веса γ и температур T и T_1 жидкости и пористой среды может быть получена, как и во всех задачах механики сплошных сред, при помощи основных фундаментальных законов сохранения, справедливых для любой системы материальных тел и точек, — закона сохранения массы, закона изменения количества движения и закона сохранения энергии.

Обычно в фильтрационных задачах ввиду весьма малых скоростей жидких частиц в основной области течения в уравнениях движения и энергии инерционными членами и кинетической энергией принято пренебрегать. Мы этого пока делать не будем и постараемся для общности получить полную систему уравнений, пригодную для исследования движений, где скоростями частиц пренебрегать нельзя, например, при притоке газа в скважину через перфорационные отверстия, когда условия истечения приближаются к критическим и скорости струек газа в отверстиях могут быть сравнимы с звуковыми, а также для других случаев течения в пористой среде, где необходим учет инерционных членов.

В качестве примера можно указать недостаточно еще исследованный круг задач о распространении колебаний в пористых средах, заполненных жидкостью или газом. В этих задачах, представляющих интерес для развития сейсмических, акустических и других аналогичных методов исследования и разведки нефте-, водо- и газоносных пластов, учет инерционных членов имеет принципиальное значение при расчете скорости распространения того или иного вида механических колебаний. При отбрасывании инерционных членов акустические скорости получаются бесконечными. В одних задачах это обстоятельство не вносит сколь-либо существенной погрешности, в других же, если, например, требуется более точно исследовать процессы, возникающие в начальные моменты после прихода фронта волны давления, необходимо учитывать конечное значение скорости звука.

Полная система уравнений для общего случая движения в пористой среде сжимаемой или несжимаемой вязкой жидкости принципиально может быть построена, как упоминалось выше, путем надлежащего осреднения уравнений Навье — Стокса и уравнения энергии, что до сего времени пока что не сделано.

Вместо этого, следуя Н. Е. Жуковскому, согласно сказанному выше в § 2 можно рассматривать фильтрационный поток как идеальную жидкость и силы фильтрационного трения отнести к объемным силам сопротивления. Тогда можно воспользоваться хорошо известными уравнениями движения идеальной жидкости, приведенными в любом современном курсе гидродинамики,

газовой динамики или механики сплошных сред [13, 14, 15], добавив к реально существующим объемным силам фиктивные указанные выше силы сопротивлений.

Для практических приложений целесообразно иметь полную систему уравнений для трубки тока с заданным законом изменения площади фильтрации $f(s)$. Подробный вывод для этого квазиодномерного течения приведен ниже, после чего уравнения, выражающие рассматриваемый закон, выписываются непосредственно в координатной форме.

Применим законы сохранения к потоку жидкости, текущей внутри трубки тока, выделенной в фильтрационном потоке и ограниченной двумя поперечными сечениями f_1 и f_2 (рис. II. 2). Для простоты будем считать положение трубки тока в пространстве фиксированным. Как и выше, под действительной скоростью жидкой частицы будем подразумевать величину $\vec{w}/m$, где $\vec{w}$ — вектор скорости фильтрации; m — пористость.

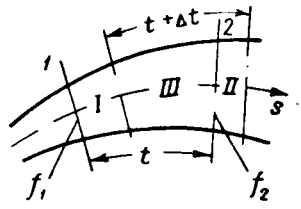


Рис. II. 2.

Напомним общий метод записи изменения какой-либо величины Ф, связанной с потоком жидкости.

Рассматриваются два положения частиц в моменты t и $t+\Delta t$ (рис. II. 2). Очевидно, изменение рассматриваемой величины Ф можно записать так:

$$\Delta\Phi=[(\Phi_{III})_{t+\Delta t}+\Phi_{II}]-[(\Phi_{III})_t+\Phi_I]=$$
$$=\Phi_{II}-\Phi_I+(\Phi_{III})_{t+\Delta t}-(\Phi_{III})_t. \qquad \text{(II. 3.1)}$$

Члены Φ_{II}, Φ_I определяют значение величины Ф в объемах частиц, вышедших из сечения f_2 и вошедших в сечение f_1 за время Δt, $(\Phi_{III})_t$, $(\Phi_{III})_{t+\Delta t}$ — ее значения в общем объеме III в моменты t и $t+\Delta t$.

Переход к пределу при $\Delta t\to 0$ и сокращение на dt дают соответственно конвективную производную рассматриваемой величины, обусловленную переносом частиц, и локальное ее изменение в единицу времени, обусловленное нестационарностью процесса.

Аналогичным образом производится запись для движущегося объема произвольной формы.

§ 4. Закон сохранения массы фильтрационного потока

Закон сохранения массы и веса будет иметь вид:

$$G_1-G_2=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(V)} m\gamma\,dV, \qquad \text{(II. 4. 1)}$$

где G_1 и G_2 — весовые расходы соответственно в сечениях f_1 и f_2; V — объем трубки тока между сечениями f_1 и f_2.

Если сечения бесконечно близки, то $dV=f(s)\,ds$ и формула (II. 4.1) принимает вид:

$$G(s,\ t)-G(s+ds,\ t)=\frac{\partial(m\gamma)}{\partial t}f(s)\,ds$$

или

$$G(s,\ t)-\left[G(s,\ t)+\frac{\partial G}{\partial s}ds\right]=-\frac{\partial G}{\partial s}ds=\frac{\partial(m\gamma)}{\partial t}f(s)\,ds,$$
$$-\frac{\partial G}{\partial s}=\frac{\partial(m\gamma)}{\partial t}f(s), \qquad \text{(II. 4. 2)}$$

т. е. мы получили обычное уравнение неразрывности.

Если пористость m от времени не зависит, то

$$-\frac{\partial G}{\partial s}=m\frac{\partial \gamma}{\partial t}f(s). \qquad (II.4.3)$$

В координатной форме уравнение неразрывности имеет общеизвестный вид:

$$-\left[\frac{\partial(\gamma w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\gamma w_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\gamma w_z)}{\partial z}\right]=\frac{\partial(m\gamma)}{\partial t}, \qquad (II.4.4)$$

где w_x, w_y, w_z — проекции вектора скорости фильтрации $\vec{w}$ на оси x, y, z.

§ 5. Закон изменения количества движения фильтрационного потока

Второе уравнение получается в результате применения закона изменения количества движения системы к жидкости, текущей внутри трубки тока между сечениями f_1 и f_2.

Согласно этому закону изменение количества движения системы материальных точек за какое-либо время равно суммарному импульсу всех внешних сил, приложенных к системе, за это время. Если время равно единице, то суммарный импульс внешних сил численно равен их главному вектору.

Закон изменения в единицу времени количества движения для текущей внутри трубки тока жидкости можно записать следующим образом:

$$\vec{J}_2-\vec{J}_1+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(V)}\varrho\frac{\vec{w}}{m}m\,dV=\vec{P}_1+\vec{P}_2+\vec{R}_n+\vec{R}'_n+\vec{W}+\vec{T}_1+\vec{T}_2, \qquad (II.5.1)$$

где

$$\vec{J}_2=\int\limits_{(f_2)}\frac{\vec{w}}{m}\varrho\,dq;\quad \vec{J}_1=\int\limits_{(f_1)}\frac{\vec{w}}{m}\varrho\,dq \qquad (II.5.2)$$

главные векторы потоков количества движения массовых расходов соответственно в сечениях f_2 и f_1; $dq=w_n df$ — элементарный объемный расход через элемент площади фильтрации df, где w_n — нормальная к df компонента скорости фильтрации; $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$ — главные векторы результирующих сил давлений в сечениях f_1, f_2; $\vec{R}_n$ — главный вектор результирующих сил давления со стороны боковой поверхности трубки тока; $\vec{R}'_n$ — главный вектор нормальных реакций твердых зерен пористой среды, приложенных к жидкости; $\vec{W}$ — главный вектор массовых сил, действующих на жидкость, например тяжести, центробежных и т. д. $\vec{T}_1$ — главный вектор сил трения между жидкостью внутри трубки и боковой поверхностью трубки; $\vec{T}_2$ — главный вектор сил трения между жидкостью внутри трубки и пористой средой.

При рассмотрении фильтрационных потоков обычно считается, что в каждом элементе объема dV имеется столь большое число твердых зерен, что жидкость и пористая среда в отдельности могут предполагаться сплошными средами.

Устремим расстояние между сечениями к нулю и перейдем к пределу. Перед тем как записать уравнение (II. 5. 1) для этого предельного положения, учтем следующее. Будем считать, как обычно, плотность, пористость и температуру в сечениях трубки тока равномерно распределенными, а распределение давления — гидростатическим. Для скоростей $\vec{w}/m$ согласно § 4 главы I этого делать нельзя, так как внутри поровых каналов ввиду вязкости жидкости скорости будут распределены заведомо неравномерно.

Запишем теперь, имея в виду сделанные замечания, уравнение (II. 5. 1) в проекции на ось s для предельного положения, когда расстояние между сечениями f_1 и f_2 равно ds:

$$\frac{\partial J_s}{\partial s}ds+\frac{\partial}{\partial t}(\varrho w)f(s)\,ds=-dP+(dR_n)_s+(dR'_n)_s+dW_s-dT_{1s}-dT_{2s}, \quad (II.\,5.\,3)$$

$$J_s=\int\limits_{(f)}\varrho\frac{w_n}{m}w_n\,df=\int\limits_{(f)}\varrho\frac{w_n^2}{m}\,df=(1+\xi)\frac{\varrho w^2}{m}f(s)=\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}G(s,\,t), \quad (II.\,5.\,4)$$

где ξ — поправка Кориолиса на неравномерное распределение скоростей в выражении проекции потока количества движения, выражаемая известным из курсов гидравлики соотношением [16, 17]

$$1+\xi=\frac{\int\limits_{(f)}w_n^2\,df}{w^2 f}, \quad (II.\,5.\,5)$$

$$w=\frac{\int\limits_{(f)}w_n\,df}{f}, \quad (II.\,5.6)$$

где w — средняя в сечении скорость фильтрации.

Для круглых труб, как известно [16, 17], при ламинарном режиме $\xi=1/3$, при турбулентном $\xi\approx 0{,}03$. Для щелевидных каналов при ламинарном режиме $\xi\approx 0{,}2$. Для пористой среды ξ будет существенно зависеть от формы и распределения размеров сечений поровых каналов и во всяком случае не меньше, чем для одного круглого канала.

Величину ξ можно связать с распределением размеров пор по их условным радиусам при помощи формулы (II. 5. 5) и кривой рис. I. 4.

Поток количества движения в единицу времени через одну пору можно представить в виде

$$J_i=(1+\xi)_0\,\varrho\,q_i w_i. \quad (II.\,5.\,7)$$

Индекс 0 относится к одной поре, q_i, w_i — соответственно расход и средняя скорость для одной поры.

Поток количества движения через всю площадь фильтрации будет с учетом формулы (I. 4.3) и (I. 4.4) равен

$$J=(1+\xi)_0\,\varrho\sum w_i^2 f_i=(1+\xi)_0\,\varrho\left(\frac{gh}{A\nu l}\right)^2\frac{\pi}{4}\sum d_i^6, \quad (II.\,5.\,8)$$

где $h=H_1-H_2$ — потеря напора на длине l. (II. 5. 9)

Поправка Кориолиса для всего потока выражается по определению формулой

$$1+\xi=\frac{J}{\varrho Qw}=\frac{Jf}{\varrho Q^2}=\frac{(1+\xi)_0\,\varrho\left(\frac{gh}{A\nu l}\right)^2\frac{\pi}{4}\sum d_i^6\frac{\pi}{4}\sum d_i^2}{\varrho\left(\frac{gh}{A\nu l}\frac{\pi}{4}\right)^2\left(\sum d_i^4\right)^2}=$$

$$=(1+\xi_0)\frac{\sum d_i^6\sum d_i^2}{\left(\sum d_i^4\right)^2}, \quad (II.\,5.\,10)$$

Переходя к непрерывному распределению размеров пор, получаем

$$1+\xi=(1+\xi)_0\frac{\int\limits_0^\infty r^6\nu(r)\,dr\int\limits_0^\infty r^2\nu(r)\,dr}{\left[\int\limits_0^\infty r^4\nu(r)\,dr\right]^2}. \qquad \text{(II. 5. 11)}$$

Таким образом, в пористой среде в отличие от движения в трубах поправка Кориолиса в выражении потока количества движения зависит не только от формы отдельного канала, но и от распределения размеров всех каналов, слагающих живое сечение фильтрационного потока.

Ограничимся случаем, когда массовой силой является сила тяжести и ось z направлена вверх (рис. II. 1, *а*). Величины, стоящие в правой части формулы (II. 5. 3), с точностью до малых второго порядка имеют, как нетрудно видеть, следующие значения:

$$dP=d\,[pmf(s)], \qquad \text{(II. 5. 12)}$$

$$(dR_n)_s=pd\,[mf(s)], \qquad \text{(II. 5. 13)}$$

$$dW_s=-\gamma\,mf(s)\,ds\cdot\frac{dz}{ds}, \qquad \text{(II. 5. 14)}$$

$$(dR_n')_s=0. \qquad \text{(II. 5. 15)}$$

Последнее уравнение получается согласно условию о равномерном квазинепрерывном распределении твердых зерен внутри элемента $f(s)\,ds$. В этом случае главный вектор их нормальных реакций равен нулю.

Другой приведенный ниже вывод условия (II. 5. 15) был предложен В. М. Ентовым и основан на прямом расчете силы $(dR_n')_s$. Величина $(dR_n')_s$ складывается из приложенных к жидкости внутри элемента проекций на направление s нормальных реакций твердых зерен и может быть с точностью до малых второго порядка разбита на четыре части.

1. Проекции реакции твердых зерен, рассеченных сечением s. Эта часть равна

$$(1-m)\,f(s)\,p. \qquad \text{(a)}$$

2. Проекции реакции твердых зерен, рассеченных сечением $s+ds$. Эта часть равна

$$-\left\{(1-m)\,f(s)\,p+\frac{\partial}{\partial s}\,[(1-m)\,f(s)\,p]\,ds\right\}. \qquad \text{(b)}$$

3. Проекции реакции твердых зерен, рассеченных боковой поверхностью трубки. Эта часть равна

$$pd\,[(1-m)\,f(s)]. \qquad \text{(c)}$$

4. Проекции реакции остальных твердых зерен, находящихся внутри трубки. Очевидно, проекция на ds результирующей силы давления, действующей со стороны жидкости на эти твердые зерна, равна $-\frac{\partial p}{\partial s}(1-m)f(s)ds$, где $(1-m)\,f(s)\,ds$ — объем зерен. Соответственно реакция зерен, приложенная к жидкости, противоположна этой силе и равна

$$\frac{\partial p}{\partial s}(1-m)\,f(s)\,ds. \qquad \text{(d)}$$

Складывая указанные четыре величины, получаем

$$(dR_n')_s = 0. \tag{e}$$

Величины dT_{1s} и dT_{2s} имеют разные порядки малости: dT_{1s} — сила трения вдоль боковой поверхности элемента $f(s)ds$ — несравненно меньше суммарной силы трения между жидкостью и пористой средой внутри трубки.

Таким образом, правая часть формулы (II. 5. 3) приводится к выражению

$$\begin{aligned} &-d[pmf(s)] + pd[mf(s)] - \gamma mf(s)\,ds\frac{dz}{ds} - dT_{2s} = \\ &= -dp \cdot mf(s) - pd[mf(s)] + pd[mf(s)] - \gamma mf(s)\,ds\frac{dz}{ds} - dT_{2s} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial s}\,dsmf(s) - \gamma mf(s)\,ds\,\frac{dz}{ds} - dT_{2s}. \end{aligned} \tag{II. 5. 16}$$

Уравнение (II. 5.3) после сокращения на ds принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}G(s,t)\right] + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial t}f(s) = -\frac{\partial p}{\partial s}mf(s) - \gamma mf(s)\frac{dz}{ds} - \frac{dT_{2s}}{ds}. \tag{II. 5. 17}$$

Силу трения $\frac{dT_{2s}}{ds}$, следуя Н. Е. Жуковскому, будем рассматривать как объемную или массовую силу сопротивления [1].

Предполагая движение следующим закону Дарси согласно (II. 2. 6) и учитывая, что величина этой силы, отнесенной к единице массы жидкости, равна $\frac{\mu w}{k\varrho}$, получаем

$$dT_{2s} = \frac{\mu w \varrho}{k\varrho}mf(s)\,ds = \frac{\mu w}{k}mf(s)\,ds. \tag{II. 5. 18}$$

Как упоминалось выше (§ 3, гл. I), при нарушениях закона Дарси природу сопротивления ближе всего описывает двучленный закон (I. 3.8), который целесообразно представить в виде

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a}\varrho w^2\frac{w}{|w|}, \tag{II. 5. 19}$$

где ζ — безразмерный коэффициент, зависящий от геометрии пористой среды и в слабой степени от числа Рейнольдса фильтрационного потока. Однако, судя по фактическим индикаторным кривым скважин дебит — депрессия, превосходно, как правило, согласующимся с двучленным законом фильтрации, ζ в практических задачах может считаться для данной пористой среды постоянным, т. е. от числа Рейнольдса не зависящим. Величина a в (II. 5. 19) означает

[1] Можно отметить, что в работе [24] силу трения Н. Е. Жуковского, отнесенную к единице массы жидкости, предлагается писать с лишним множителем $\frac{1}{m}$ в виде $\frac{1}{m}\frac{\mu w}{k\varrho}$. Нетрудно видеть, что при этом нарушается правильный вид уравнений Дарси (II. 2. 7). В результате такого представления силы трения инерционные члены уравнений фильтрации в работе [24] отличаются от обычной правильной записи, как, например, в [2], отсутствием множителя $\frac{1}{m}$.

характерный линейный размер пористой среды, который разные авторы определяют по-разному. Например, Маскет, Линдквист [Лт. I. 11] полагают $a = d_{эф}$ — эффективному диаметру твердых зерен, М. Д. Миллионщиков [Лт. I. 12] полагает $a = \sqrt{k/m}$, Д. М. Минц [Лт. I. 13], Коцени и другие [Лт. I. 3] полагают a равным гидравлическому радиусу площади фильтрации, т. е. $a = mf/\Pi$, где Π — суммарный смоченный твердый периметр живого сечения. Так как пористая среда предполагается статистически однородной, то в пределах объема dV площади и периметры всех живых сечений одинаковы.

Отсюда следует часто применяемое представление a в виде

$$a = \frac{m}{\Omega}, \tag{II.5.20}$$

где Ω — удельная поверхность пористой среды в $\frac{м^2}{м^3}$, т. е. суммарная поверхность твердых зерен в единице объема — одна из геометрических характеристик пористой среды [ЛТ. I. 3, ЛТ. I. 13]. Согласно (II.5.18) и (II.5.19) при двучленном законе следует положить

$$dT_{2s} = \left(\frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a}\varrho w^2 \frac{w}{|w|}\right) mf(s)\, ds. \tag{II.5.21}$$

Заметим, что отношение

$$\frac{dT_{2s}}{mf(s)\, ds} = \frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a}\varrho w^2 \frac{w}{|w|} \tag{II.5.21а}$$

можно рассматривать как силу трения, отнесенную к единице объема жидкости. Эта же сила, очевидно, равна и противоположна объемной силе трения, приложенной к твердым зернам, находящимся внутри этого единичного жидкого объема. Единичный объем жидкости размещен внутри суммарного объема пористой среды, равного $\frac{1}{m}$ и содержащего объем твердых зерен $\frac{1-m}{m}$. На этот объем твердых зерен и действует сила (II. 5. 21а). Отсюда сила трения, приложенная к единице объема твердых зерен пористой среды, равна

$$\frac{dT_{2s}}{mf(s)\, ds} : \frac{1-m}{m} = \frac{m}{1-m}\left(\frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a}\varrho w^2 \frac{w}{|w|}\right). \tag{II.5.21б}$$

Результирующая же нормальных сил давления, как было показано выше, равна нулю [уравнение (е)].

Если требуется составить уравнения движения или равновесия самой пористой среды, кроме напряжений, существующих в скелете, в число действующих на твердые зерна сил следует включить действующую со стороны жидкости объемную силу трения (II. 5. 21б). Закон импульсов (II. 5. 17) для фильтрационного потока в трубке тока можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}G(s,t)\right] + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial t} f(s) = -\frac{\partial p}{\partial s} mf(s) - \gamma\, mf(s)\frac{dz}{ds} - \left(\frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a}\varrho w^2 \frac{w}{|w|}\right) mf(s). \tag{II.5.22}$$

Формулу (II. 5. 22) можно несколько преобразовать, как это часто делается, используя уравнение неразрывности (II. 4. 3). Выполняя дифференцирование,

учитывая (II. 4. 3) и считая для простоты пористую среду недеформируемой и, следовательно, пористость не зависящей от времени, получаем

$$G(s,t)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right]+\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\frac{\partial G}{\partial s}+\left(\frac{\gamma}{g}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{w}{g}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)f(s)=$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial s}mf(s)-\gamma mf(s)\frac{dz}{ds}-\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\frac{w}{|w|}\right)mf(s).$$

Левую часть последнего уравнения можно представить так:

$$G(s,t)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right]-\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}m\frac{\partial\gamma}{\partial t}f(s)+\frac{\gamma}{g}\frac{\partial w}{\partial t}f(s)+\frac{w}{g}\frac{\partial\gamma}{\partial t}f(s)=$$
$$=G(s,t)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right]-\frac{\xi w}{g}\frac{\partial\gamma}{\partial t}f(s)+\frac{\gamma}{g}\frac{\partial w}{\partial t}f(s).$$

Формула (II. 5.22) примет вид:

$$G(s,t)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right]-\frac{\xi w}{g}\frac{\partial\gamma}{\partial t}f(s)+\frac{\gamma}{g}\frac{\partial w}{\partial t}f(s)=$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial s}mf(s)-\gamma mf(s)\frac{dz}{ds}-\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\frac{w}{|w|}\right)mf(s)$$

или, сокращая на $\gamma mf(s)$,

$$\frac{w}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)-\frac{\xi}{g}\frac{w}{m}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{1}{g}\frac{\partial\left(\frac{w}{m}\right)}{\partial t}=$$
$$=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{dz}{ds}-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\frac{w}{|w|}\right). \qquad \text{(II. 5.23)}$$

Член $\frac{\xi}{g}\frac{w}{m}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ представляет собой часть потока импульса, обусловленную неравномерным распределением скоростей и сжимаемостью жидкости.

При $\xi=0$ — равномерном распределении скоростей — и $m=1$ формула (II. 5.23) дает обычную запись закона импульсов для струйки сжимаемой жидкости. При $\xi=0$ и $m<1$ (II. 5.23) представляет собой уравнение Эйлера для одномерного фильтрационного потока.

В координатной форме получаем три уравнения, являющиеся обобщением уравнений Эйлера — Жуковского:

$$\frac{1}{gm}\frac{\partial w_x}{\partial t}+\frac{1}{m}\left[w_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w_x}{m}\right)+w_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w_x}{m}\right)+w_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w_x}{m}\right)\right]-$$
$$-\frac{\xi}{g}\frac{w_x}{m}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mu|w|}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)\frac{w_x}{|w|},$$
$$\frac{1}{gm}\frac{\partial w_y}{\partial t}+\frac{1}{m}\left[w_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w_y}{m}\right)+w_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w_y}{m}\right)+w_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w_y}{m}\right)\right]-$$
$$-\frac{\xi}{g}\frac{w_y}{m}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mu|w|}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)\frac{w_y}{|w|},$$
$$\frac{1}{gm}\frac{\partial w_z}{\partial t}+\frac{1}{m}\left[w_x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w_z}{m}\right)+w_y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w_z}{m}\right)+w_z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w_z}{m}\right)\right]-$$
$$-\frac{\xi}{g}\frac{w_z}{m}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}=-\left(\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z}+1\right)-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\mu|w|}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)\frac{w_z}{|w|}. \qquad \text{(II. 5.24)}$$

§ 6. Закон сохранения энергии для фильтрационного потока

В задачах, где движение может считаться практически изотермическим, например при медленно изменяющемся течении без притока тепла извне, уравнение состояния имеет вид $\gamma = \gamma(p)$ и совместно с уравнением (II. 4. 3) и законом импульсов в виде (II. 5. 22) или (II. 5. 23) получаем замкнутую систему для γ, p, w.

В общем случае уравнение состояния имеет вид $\gamma = \gamma(p, T)$ и для замыкания системы уравнений необходимо четвертое уравнение, которое можно получить, применяя к потоку жидкости закон сохранения энергии.

Согласно этому закону изменение полной энергии данной массы движущейся жидкости за некоторый промежуток времени равно работе объемных и поверхностных сил, действующих на жидкость за это время, сложенной с подведенной тепловой энергией.

Под полной энергией подразумевается сумма кинетической энергии и внутренней энергии, определение которой дается в термодинамике.

Применяя закон сохранения энергии к потоку жидкости внутри нашей трубки тока между сечениями f_1 и f_2, получаем обычную в механике сплошных сред форму этого закона в виде

$$\int\limits_{(f_2)} \left[\frac{u}{A} + \frac{1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\gamma\, dq - \int\limits_{(f_1)} \left[\frac{u}{A} + \frac{1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\gamma\, dq + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(V)} \left[\frac{u}{A} + \frac{1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\gamma\, m\, dV = \int\limits_{(f_1)} \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)\gamma\, dq - \\ - \int\limits_{(f_2)} \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)\gamma\, dq - \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{(V)} \gamma\, zm\, dV + L_{\text{вн}} + \frac{Q_{\text{вн}}}{A}\,. \qquad \text{(II. 6. 1)}$$

В формуле (II. 6. 1) левая часть означает изменение в единицу времени полной энергии рассматриваемой массы жидкости, причем $u = u(p, T)$ — внутренняя энергия в тепловых единицах, отнесенная к единице веса жидкости; первые два интеграла в правой части означают выполняемую в единицу времени над жидкостью работу сил давления в сечениях f_1, f_2 и силы тяжести; третий интеграл — дополнительную работу силы тяжести, вычисляемую по локальной производной по времени от потенциальной энергии силы тяжести. Физически третий интеграл означает изменение потенциальной энергии в поле силы тяжести, обусловленное нестационарностью движения, когда возможны вследствие сжимаемости жидкости вертикальные перемещения центра тяжести жидкой массы в трубке тока. Величина $L_{\text{вн}}$ и $Q_{\text{вн}}$ означают соответственно подводимые к жидкости в единицу времени внешнюю механическую работу в тепло: $A = \frac{1}{427}$ *ккал/кГ · м* — термический эквивалент работы.

Следует отметить, что работа сил трения внутри жидкости и теплота трения взаимно компенсируются и поэтому в уравнение энергии не вошли.

Далее можно положить с высокой степенью точности $L_{\text{вн}} = 0$, так как на боковой поверхности трубки, состоящей из мысленно рассеченных твердых зерен и участков, занятых жидкостью, соответственно скорость равна нулю ввиду прилипания к твердым поверхностям (основная гипотеза гидродинамики вязкой жидкости о граничных условиях на твердых поверхностях) и касательное напряжение по сравнению с остальными силами практически равно нулю ввиду свободного протока жидкости между зернами пористой среды и предположения о статистической однородности геометрической структуры пористой среды.

Можно дать еще одно обоснование утверждения, что $L_{вн} = 0$. Очевидно, $L_{вн}$ в нашем случае это работа силы трения $\vec{T}_1$, фигурирующей в уравнении импульсов (II. 5. 1) и (II. 5. 3). Как было указано выше, эта сила несопоставимо мала по сравнению с силой $\vec{T}_2$, по порядку равной результирующей сил давления. Отсюда следует, что работа $L_{вн}$ в данном случае пренебрежимо мала по сравнению с работой сил давления и поэтому может быть отброшена.

Вообще же еще раз подчеркнем, поскольку на участках боковой поверхности трубки тока, занятых жидкостью, скорость не равна нулю и касательные напряжения могут быть также не равны нулю, условие $L_{вн} = 0$ следует рассматривать как приближенное, но для фильтрационных потоков практически точное. В других задачах механики сплошных сред величина $L_{вн}$ представляет работу граничных касательных напряжений и должна входить в уравнение энергии. Тепло $Q_{вн}$ жидкость получает от скелета пористой среды путем контактной теплопередачи и путем теплопроводности.

Пусть расстояние между сечениями f_1 и f_2 неограниченно уменьшается и равно ds. Тогда (II. 6. 1) после некоторой перегруппировки членов и с учетом $dV = df ds$ можно представить в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\int\limits_{(f(s))}\left[z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u}{A}+\frac{1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\gamma\, dq\right\} ds + \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int\limits_{(f(s))}\left[z+\frac{u}{A}+\frac{1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\gamma\, m\, df\right\} ds = \frac{1}{A}\left\{\alpha\Omega\,(T_1-T)\,f(s)\,ds + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}\,mf(s)\right] ds - \left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{ср} m\,\Pi(s)\,ds\right\}. \qquad \text{(II. 6.2)}$$

Первый член правой части означает тепло, получаемое жидкостью в единицу времени путем теплопередачи от пористой среды согласно закону Ньютона; α — коэффициент теплопередачи от пористой среды жидкости в *ккал/м²·°С·сек*; Ω — удельная поверхность пористой среды в *м²/м³*.

Второй член правой части — это тепло, получаемое в единицу времени жидкостью путем теплопроводности согласно закону Фурье в направлении оси трубки s; λ — коэффициент теплопроводности жидкости в *ккал/м·°С·сек*.

Третий член — тепло, получаемое жидкостью в единицу времени путем теплопроводности через боковую поверхность трубки тока; $-(\lambda\frac{\partial T}{\partial n})_{ср}$ — среднее значение этого теплопритока вдоль периметра $\Pi(s)$ трубки тока, $\partial T/\partial n$ — производная по внутренней нормали к трубке тока.

Как и выше, учтем неравномерное распределение скоростей введением соответствующей поправки Кориолиса в выражении потока кинетической энергии. Положим

$$\frac{1}{2g}\int\limits_{(f)}\left(\frac{w}{m}\right)^2\gamma\, dq = \frac{1}{2g}\int\limits_{(f)}\left(\frac{w}{m}\right)^2\gamma\, w_n\, df = \frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2 G, \qquad \text{(II. 6.3)}$$

причем в правой части (II. 6. 3) под w подразумевается средняя в сечении f скорость фильтрации. Как известно, для каналов круглой формы $\xi_1 = 1$ при ламинарном режиме и $\xi_1 \approx 0{,}1$ при турбулентном. Этот порядок цифр является вероятным и для остальных форм сечения поровых каналов.

Поправка ξ_1 в выражении потока кинетической энергии, как и для потока количества движения, зависит от кривой распределения размеров пор по их условным радиусам.

Рассуждения, аналогичные тем, при помощи которых были выведены формулы (II. 5. 10) и (II. 5. 11), приводят к следующим результатам:

$$1+\xi_1=(1+\xi_1)_0\frac{\sum d_i^8\left(\sum d_i^2\right)^2}{\left(\sum d_i^4\right)^3}, \tag{II. 6.4}$$

а для непрерывного распределения $\nu(r)$ (рис. I. 4)

$$1+\xi_1=(1+\xi_1)_0\frac{\int\limits_0^\infty r^8\nu(r)\,dr\left[\int\limits_0^\infty r^2\nu(r)\,dr\right]^2}{\left[\int\limits_0^\infty r^4\nu(r)\,dr\right]^3}, \tag{II. 6.5}$$

причем, как и в формулах (II. 5.11) и (II. 5. 12), индекс 0 относится к одной поре.

Далее в (II. 6.2) входит интеграл $\int\limits_{(f)}\left(\frac{w}{m}\right)^2 m\,df$, в котором $\frac{w}{m}$ — модуль вектора скорости частицы жидкости. Обозначим

$$\frac{1}{2g}\int\limits_{(f)}\left(\frac{w}{m}\right)^2 m\,df=\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2 mf(s). \tag{II. 6.6}$$

В правой части (II. 6.6) w означает скорость фильтрации в сечении $f(s)$. Если скорость частицы совпадает с w_n, то $\xi'=\xi$, где ξ определено формулой (II. 5.5). Вообще же, строго говоря, ξ и ξ' могут различаться. Уравнение (II. 6.2) после сокращения на ds с учетом (II. 6. 3) и (II. 6.6) будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u(p,T)}{A}+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]G(s,t)\right\}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\gamma\left[z+\frac{u(p,T)}{A}+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\right\}mf(s)=$$
$$=\frac{1}{A}\left\{\alpha\Omega(T_1-T)f(s)+\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}mf(s)\right]-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}}m\Pi(s)\right\}. \tag{II. 6. 7}$$

Для определения температуры T_1 пористой среды можно составить аналогично уравнение энергии для пористой среды. Если пористая среда деформируема, то в уравнение энергии для пористой среды должны войти кинетическая энергия зерен грунта и потенциальная энергия деформации грунтовой массы. Деформации пористой среды носят гистерезисный характер, и в этом вопросе еще нет полной ясности. Кроме того, в случае деформируемой пористой среды уравнение энергии для жидкости должно быть дополнено членами, выражающими работу нормальной реакции зерен. Полный учет всех обстоятельств, связанных с учетом эффектов деформируемости пористой среды, выходит за рамки этой книги, и для упрощения принята модель неизменяемой пористой среды. Для недеформируемой пористой среды механические составляющие в уравнении энергии отсутствуют и остаются тепловые. В этом случае внутренняя энергия единицы веса пористой среды определяется выражением

$$u_1=c_1T_1, \tag{II. 6. 8}$$

где c_1 *ккал/кГ* · °С — теплоемкость пористой среды.

Уравнение энергии для недеформируемой пористой среды имеет вид:

$$(1-m)\,c_1\gamma_1\frac{\partial T_1}{\partial t}f(s)=\alpha\Omega(T-T_1)f(s)+\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial s}(1-m)f(s)\right]-$$
$$-\left(\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_{\text{ср}}(1-m)\,\Pi(s), \qquad \text{(II. 6. 9)}$$

где λ_1 — теплопроводность пористой среды.

В (II. 6. 9) первый член правой части означает теплоприток от жидкости в единицу времени. Этот член равен и противоположен по знаку, соответствующему члену в (II. 6. 7). Второй член означает теплоприток в единицу времени путем теплопроводности вдоль оси s, третий член — через боковую поверхность трубки тока.

Уравнения (II. 4. 3), (II. 5. 22) или (II. 5. 23), (II. 6. 7) и (II. 6. 9) образуют совместно с уравнением состояния $\gamma=\gamma(p, T)$ замкнутую систему для неизвестных функций w, p, γ, T, T_1.

Уравнение энергии (II. 6. 7) обычно преобразуют следующим образом. Введем в рассмотрение одну из основных термодинамических функций — энтальпию единицы веса жидкости

$$i=i(p, T)=u+A\frac{p}{\gamma}. \qquad \text{(II. 6. 10)}$$

Для энтальпии справедливо одно из основных дифференциальных соотношений термодинамики

$$di=c_p\,dT+A\left[v-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]dp, \qquad \text{(II. 6. 11)}$$

где c_p — теплоемкость жидкости при постоянном давлении; $v=v(p, T)=\frac{1}{\gamma(p, T)}$ — удельный объем; $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p$ — частная производная от удельного объема v по температуре в предположении, что давление постоянно, когда p и T выбираются за независимые термодинамические параметры жидкости. С учетом формул (II. 6. 10) и (II. 6. 11) уравнение энергии (II. 6. 7) можно представить иначе. Так как в (II. 6. 11) фигурируют полные дифференциалы, справедливы соотношения

$$di=\frac{\partial i}{\partial s}ds+\frac{\partial i}{\partial t}dt=c_p\left(\frac{\partial T}{\partial s}ds+\frac{\partial T}{\partial t}dt\right)+A\left[v-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\left(\frac{\partial p}{\partial t}ds+\frac{\partial p}{\partial t}dt\right),$$

из которых, сравнивая коэффициенты при ds и dt, имеем

$$\frac{\partial i}{\partial s}=c_p\frac{\partial T}{\partial s}+A\left[v-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\frac{\partial p}{\partial s};$$
$$\frac{\partial i}{\partial t}=c_p\frac{\partial T}{\partial t}+A\left[v-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(II. 6. 12)}$$

Уравнение энергии для жидкости (II. 6. 7) теперь можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[z+\frac{i(p, T)}{A}+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]G(s, t)\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\gamma\left[z+\frac{i(p,T)}{A}-\frac{p}{\gamma}+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\right\} mf(s)=$$

$$=\frac{1}{A}\left\{\alpha\Omega(T_1-T)f(s)+\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}mf(s)\right]-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}} m\Pi(s)\right\}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[z+\frac{i(p,T)}{A}+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]G(s,t)\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\gamma\, i(p,t)}{A}-p+\gamma\left[z+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\right\} mf(s)=$$

$$=\frac{1}{A}\left\{\alpha\Omega(T_1-T)f(s)+\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}mf(s)\right]-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}} m\,\Pi(s)\right\}. \quad \text{(II. 6. 13)}$$

Б. Б. Лапук [Лт. I. 19] предложил рассчитывать изменения температуры при движении сжимаемой жидкости в пористой среде, исходя из условия $i = i(p, T) = \text{const}$, т. е., пренебрегая кинетической энергией и высотой положения, рассматривать фильтрацию как дроссельный процесс, следующий закону Джоуля — Томсона. При этом изменения температуры оказываются обычно малыми [Лт. I. 19]. Из (II. 6. 13) следует, что $i(p, T) = \text{const}$ только при установившемся течении и отсутствии теплопритока к жидкости.

Тем не менее, в большинстве задач при расчете давлений и скоростей движение с достаточной точностью можно считать изотермическим.

В общем случае условие $i(p, T) = \text{const}$ не выполняется и для расчета изменений температуры следует обращаться к полной системе уравнений.

Выполняя дифференцирование (II. 6. 13) и учитывая уравнение неразрывности (II. 4. 3) и формулы (II. 6. 12), получаем

$$G(s,t)\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial i}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\right\}+\left[z+\frac{i(p,T)}{A}+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\frac{\partial G}{\partial s}+$$

$$+\left(\frac{\gamma}{A}\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{i}{A}\frac{\partial \gamma}{\partial t}\right)mf(s)-\frac{\partial p}{\partial t}mf(s)+\left[z+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\frac{\partial \gamma}{\partial t}mf(s)+$$

$$+\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left[z+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]mf(s)=\frac{1}{A}\left\{\alpha\Omega(T_1-T)f(s)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}mf(s)\right]-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}} m\,\Pi(s)\right\},$$

или

$$G(s,t)\left\{\frac{c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial s}+\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\right\}-$$

$$-\left[z+\frac{i(p,T)}{A}+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\frac{\partial \gamma}{\partial t}mf(s)+\left\{\frac{\gamma c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial t}+\right.$$

$$\left.+\gamma\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\frac{\partial p}{\partial t}\right\}mf(s)+\frac{i}{A}\frac{\partial \gamma}{\partial t}mf(s)-\frac{\partial p}{\partial t}mf(s)+$$

$$+\left[z+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\frac{\partial \gamma}{\partial t}mf(s)+\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left[z+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]mf(s)=$$

$$=G(s,t)\left\{\frac{c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial s}+\right.$$

$$+\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\Bigg\}+\frac{\gamma c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial t}mf(s)+$$
$$+\frac{\xi'-\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\frac{\partial\gamma}{\partial t}mf(s)+\gamma\frac{\partial}{\partial t}\left[z+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]mf(s)-$$
$$-\gamma T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{\partial p}{\partial t}mf(s)=\frac{1}{A}\left\{\alpha\Omega(T_1-T)f(s)+\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}mf(s)\right]-\right.$$
$$\left.-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}}m\Pi(s)\right\}. \qquad \text{(II. 6. 14)}$$

Можно еще далее преобразовать это уравнение, воспользовавшись уравнением импульсов (II. 5. 23).

Предварительно разделим обе части (II. 6. 14) на $\gamma mf(s)$, в результате чего получим

$$\frac{w}{m}\left\{\frac{c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial s}+\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\right\}+\frac{c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial t}+$$
$$+\frac{\xi'-\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left[z+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{\partial p}{\partial t}=$$
$$=\frac{1}{A}\left\{\frac{\alpha\Omega(T_1-T)}{m\gamma}+\frac{1}{\gamma mf(s)}\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}mf(s)\right]-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}}\frac{\Pi(s)}{\gamma f(s)}\right\}. \qquad \text{(II. 6. 15)}$$

Величину $\frac{\partial p}{\partial s}$, входящую в (II. 6. 15), можно выразить из (II. 5. 23), считая $w>0$:

$$\frac{\partial p}{\partial s}=-\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)-\gamma\frac{dz}{ds}-\gamma\left[\frac{w}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{g}\frac{\partial\left(\frac{w}{m}\right)}{\partial t}-\frac{\xi}{g}\frac{w}{m}\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]. \qquad \text{(II. 6. 16)}$$

Тогда формулу (II. 6. 15) можно представить еще так:

$$\frac{w}{m}\left\{\frac{c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial s}-\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\left[\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)+\gamma\frac{dz}{ds}+\frac{\gamma w}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\gamma}{g}\frac{\partial\left(\frac{w}{m}\right)}{\partial t}-\frac{\xi}{g}\frac{w}{m}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right]+\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\right\}+$$
$$+\frac{c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\xi'-\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left[z+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{\partial p}{\partial t}=$$
$$=\frac{w}{m}\left\{\frac{c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial s}-\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\left[\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)+\gamma\frac{dz}{ds}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\gamma w}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)\right]-\frac{1}{g}\frac{\partial\left(\frac{w}{m}\right)}{\partial t}+T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{\gamma}{g}\frac{\partial\left(\frac{w}{m}\right)}{\partial t}+\right.$$

$$+\frac{1}{\gamma}\frac{\xi}{g}\frac{w}{m}\frac{\partial\gamma}{\partial t}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{\xi}{g}\frac{w}{m}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}\left[z+\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]\Bigg\}+$$

$$+\frac{c_p}{A}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\xi'-\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left[z+\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{\partial p}{\partial t}=$$

$$=\frac{c_p}{A}\left(\frac{w}{m}\frac{\partial T}{\partial s}+\frac{\partial T}{\partial t}\right)-\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\frac{w}{m}\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)+$$

$$+\frac{w}{m}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]-\frac{w}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)\right\}+$$

$$+\left(\frac{\xi'-\xi_1}{2}+\xi\right)\frac{1}{g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1+\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2-\frac{1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]+$$

$$+T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\left\{\frac{w\gamma}{m}\frac{dz}{ds}+\frac{w\gamma}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)+\frac{w\gamma}{mg}\frac{\partial\left(\frac{w}{m}\right)}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-\frac{\xi}{g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\frac{\partial p}{\partial t}\right\}=\frac{1}{A}\left\{\frac{\alpha\Omega(T_1-T)}{m\gamma}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\gamma mf(s)}\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}mf(s)\right]-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}}\frac{\Pi(s)}{\gamma f(s)}\right\}$$

или, так как

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p=\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\gamma}\right)}{\partial T}\right)_p=-\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial T}\right)_p,$$

то

$$\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p=\frac{1}{\gamma}+\frac{T}{\gamma^2}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial T}\right)_p=\frac{1}{\gamma}\left[1+\frac{T}{\gamma}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial T}\right)_p\right], \qquad \text{(II. 6. 17)}$$

$$\frac{c_p}{A}\left(\frac{w}{m}\frac{\partial T}{\partial s}+\frac{\partial T}{\partial t}\right)-\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\frac{w}{m}\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)+$$

$$+\frac{w}{m}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1+\xi_1}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]-\frac{w}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)\right\}+$$

$$+\left(\frac{\xi'-\xi_1}{2}+\xi\right)\frac{1}{g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\xi'}{2g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\right]-\frac{T}{\gamma}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial T}\right)_p\left\{\frac{w}{m}\frac{dz}{ds}+\right.$$

$$\left.+\frac{w}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)+\frac{w}{mg}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w}{m}\right)-\frac{\xi}{g}\left(\frac{w}{m}\right)^2\frac{1}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial t}\right\}=$$

$$=\frac{1}{A}\left\{\frac{\alpha\Omega(T_1-T)}{m\gamma}+\frac{1}{\gamma mf(s)}\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}mf(s)\right]-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}}\frac{\Pi(s)}{\gamma f(s)}\right\}. \qquad \text{(II. 6. 18)}$$

Таким образом, уравнение энергии можно брать в виде любой из формул (II. 6. 14), (II. 6. 15) или (II. 6. 18).

В задачах фильтрации, где скорости малы, все динамические члены в уравнениях движения и энергии, кроме сил сопротивления и давлений, обычно отбрасываются.

Приведенный выше вывод по возможности с полным учетом всех динамических факторов, помимо методических соображений, дан для возможности рас-

смотрения задач фильтрации с большими скоростями и исследования возникающих при этом термических эффектов.

В реальных пористых средах величина Ω обычно чрезвычайно велика. В этих условиях температуры T и T_1 в каждом элементарном объеме выравниваются практически мгновенно. Оценка скорости выравнивания температур приведена в работах [6, 18] *. Таким образом, можно принять $T_1 = T$. Предварительно обратимся к уравнению (II. 6. 9) и разделим обе его части на $A\gamma mf(s)$:

$$\frac{1-m}{Am}\frac{c_1\gamma_1}{\gamma}\frac{\partial T_1}{\partial t}=\frac{\alpha\Omega(T-T_1)}{A\gamma m}+\frac{1}{A\gamma mf(s)}\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial s}(1-m)f(s)\right]-$$

$$-\left(\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_{\text{ср}}\frac{(1-m)\Pi(s)}{A\gamma mf(s)}. \qquad \text{(II. 6. 19)}$$

Сложим теперь правые и левые части уравнений (II. 6. 19) и (II. 6. 15), а затем (II. 6. 19) и (II. 6. 18). Члены, выражающие контактную теплопередачу, сократятся. Учитывая возможность принять $T_1 = T$, получим уравнение энергии для насыщенной фильтрующей жидкостью пористой среды

$$\frac{c_p}{A}\left(\frac{w}{m}\frac{\partial T}{\partial s}+\frac{\partial T}{\partial t}\right)+\frac{1-m}{Am}\frac{c_1\gamma_1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{w}{m}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p-\frac{1}{\gamma}\right]\frac{\partial p}{\partial s}+$$

$$+T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{\partial p}{\partial t}+\varepsilon_1+\frac{1}{A\gamma mf(s)}\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial s}mf(s)\right]-\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}}\frac{\Pi(s)}{A\gamma f(s)}+$$

$$+\frac{1}{A\gamma mf(s)}\frac{\partial}{\partial s}\left[\lambda_1\frac{\partial T}{\partial s}(1-m)f(s)\right]-\frac{1}{A\gamma f(s)}\left(\lambda_1\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{\text{ср}}\frac{1-m}{m}\Pi(s)$$

или, умножая обе части на $Am\gamma$,

$$\gamma c_p w\frac{\partial T}{\partial s}+[m\gamma c_p+(1-m)c_1\gamma_1]\frac{\partial T}{\partial t}=Aw\gamma\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p-\frac{1}{\gamma}\right]\frac{\partial p}{\partial s}+$$

$$+Am\gamma T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\frac{\partial p}{\partial t}+Am\gamma\varepsilon_1+\frac{1}{f(s)}\frac{\partial}{\partial s}\left\{[m\lambda+(1-m)\lambda_1]\frac{\partial T}{\partial s}f(s)\right\}-$$

$$-\left\{[m\lambda+(1-m)\lambda_1]\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)\right\}_{\text{ср}}\frac{\Pi(s)}{f(s)}. \qquad \text{(II. 6. 20)}$$

Величины $[m\gamma c_p+(1-m)c_1\gamma_1]$ и $m\lambda+(1-m)\lambda_1$ могут соответственно рассматриваться как объемная теплоемкость и теплопроводность насыщенной жидкостью пористой среды. Вводя обозначения

$$m\gamma c_p+(1-m)c_1\gamma_1=C\ \text{ккал}/^\circ\text{C}\cdot\text{м}^3,\quad m\lambda+(1-m)\lambda_1=\Lambda, \qquad \text{(II. 6. 21)}$$

---

* Разумеется, если рассматриваются задачи, в которых мы интересуемся изменением параметров потока и пористой среды в течение интервалов времени, сравнимых с временем выравнивания температур, например, в случае высокочастотных колебаний, различие температур T и T_1 следует учитывать.

получаем, учитывая (II. 6. 17),

$$\gamma c_p w \frac{\partial T}{\partial s} + C \frac{\partial T}{\partial t} = Aw\gamma \left[T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p - \frac{1}{\gamma} \right] \frac{\partial p}{\partial s} - Am \frac{T}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_p \frac{\partial p}{\partial t} + Am \gamma \varepsilon_1 + \\ + \frac{1}{f(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left[\Lambda \frac{\partial T}{\partial s} f(s) \right] - \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{ср}} \frac{\Pi(s)}{f(s)}, \qquad \text{(II. 6. 22)}$$

причем ε_1 означает малый при обычных скоростях фильтрации член:

$$\varepsilon_1 = - \frac{w}{m} \frac{\partial}{\partial s} \left[z + \frac{1+\xi_1}{2g} \left(\frac{w}{m} \right)^2 \right] - \frac{\xi' - \xi_1}{2g} \left(\frac{w}{m} \right)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \\ - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1+\xi'}{2g} \left(\frac{w}{m} \right)^2 \right]. \qquad \text{(II. 6. 23)}$$

Аналогично, из (II. 6. 19) и (II. 6. 18)

$$\frac{\varepsilon_p}{A} \left(\frac{w}{m} \frac{\partial T}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \frac{1-m}{Am} \frac{c_1 \gamma_1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial t} = \left[\frac{1}{\gamma} - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] \frac{w}{m} \left(\frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a} \varrho w^2 \right) - \\ - \frac{T}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_p \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} + \varepsilon_2 + \frac{1}{Am \gamma f(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial s} m f(s) \right] - \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{ср}} \frac{\Pi(s)}{A \gamma f(s)} + \\ + \frac{1}{A \gamma m f(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left[\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial s} (1-m) f(s) \right] - \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{ср}} \frac{(1-m) \Pi(s)}{A \gamma m f(s)}$$

или, умножая обе части на $Am\gamma$ и учитывая (II. 6. 21),

$$\gamma c_p w \frac{\partial T}{\partial s} + C \frac{\partial T}{\partial t} = Aw\gamma \left[\frac{1}{\gamma} - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] \left(\frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a} \varrho w^2 \right) - \\ - AmT \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_p \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} + A \gamma m \varepsilon_2 + \frac{1}{f(s)} \frac{\partial}{\partial s} \left[\Lambda \frac{\partial T}{\partial s} f(s) \right] - \\ - \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{ср}} \frac{\Pi(s)}{f(s)}, \qquad \text{(II. 6. 24)}$$

где ε_2 при обычных скоростях фильтрации малая величина

$$\varepsilon_2 = - \frac{w}{m} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1+\xi_1}{2g} \left(\frac{w}{m} \right)^2 \right] - \frac{w}{m} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1+\xi}{g} \frac{w}{m} \right) \right\} - \\ - \left(\frac{\xi' - \xi_1}{2} + \xi \right) \frac{1}{g} \left(\frac{w}{m} \right)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\xi'}{2g} \left(\frac{w}{m} \right)^2 \right] + \frac{T}{\gamma} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T} \right)_p \left\{ \frac{w}{m} \frac{dz}{ds} + \right. \\ \left. + \frac{w}{m} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1+\xi}{g} \frac{w}{m} \right) + \frac{w}{mg} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w}{m} \right) - \frac{\xi}{g} \left(\frac{w}{m} \right)^2 \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right\}. \qquad \text{(II. 6. 25)}$$

В левой части этих уравнений фигурируют члены, определяющие повышение температуры движущейся частицы жидкости в единицу времени, в правой — факторы, определяющие это повышение.

Предыдущие уравнения могут быть при желании представлены в координатной форме. При этом конвективная производная в проекциях на оси x, y, z будет иметь вид согласно правилам векторного анализа:

$$w\frac{\partial T}{\partial s}=w_x\frac{\partial T}{\partial x}+w_y\frac{\partial T}{\partial y}+w_z\frac{\partial T}{\partial z}. \qquad \text{(II. 6. 26)}$$

Член $w\frac{\partial p}{\partial s}$, выражающий работу сил давления, имеет вид:

$$w\frac{\partial p}{\partial s}=w_x\frac{\partial p}{\partial x}+w_y\frac{\partial p}{\partial y}+w_z\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad \text{(II. 6. 27)}$$

Члены, выражающие эффект теплопроводности, согласно закону Фурье могут быть заменены выражением $\frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)$, обращающимся при $\Lambda=\text{const}$ в $\Lambda\nabla^2 T$ — правую часть классического уравнения теплопроводности для твердого тела.

В первом приближении естественно не рассматривать всю систему уравнений сохранения массы, количества движения и энергии, а предположить движение изотермическим. Тогда из уравнений сохранения массы и закона импульсов можно найти поле скоростей фильтрации и давлений. После этого из уравнения энергии можно найти распределение температуры, которое будет первым приближением к действительному. Затем, поскольку из уравнения состояния $\gamma=\gamma(p, T)$ можно найти уточненное распределение плотности или объемного веса, производится уточнение полей скоростей фильтрации и давлений. Процесс последовательных приближений принципиально может быть неограниченно продолжен до достижения необходимой точности.

Здесь могут оказаться весьма полезными современные быстродействующие вычислительные устройства. Разумеется, если в пласте происходит заведомо резко неизотермический процесс, например, при нагнетании жидкости с температурой, значительно отличающейся от пластовой, указанный метод перехода от изотермического течения к неизотермическому не годится и в этом случае следует исходить из полной системы уравнений.

§ 7. Частные случаи

Для анализа физической природы факторов, определяющих изменение температуры, рассмотрим несколько случаев, причем будем пренебрегать малыми динамическими членами ε_1 и ε_2, выражающими изменение температуры в зависимости от изменения кинетической энергии, а также теплопритоком вследствие теплопроводности. В этом случае (II. 6. 22) и (II. 6. 24) будут иметь вид:

$$\gamma c_p w\frac{\partial T}{\partial s}+C\frac{\partial T}{\partial t}=Aw\gamma\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p-\frac{1}{\gamma}\right]\frac{\partial p}{\partial s}-\frac{AmT}{\gamma}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial T}\right)_p\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \text{(II. 7. 1)}$$

$$\gamma c_p w\frac{\partial T}{\partial s}+C\frac{\partial T}{\partial t}=Aw\gamma\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)-$$

$$-\frac{AmT}{\gamma}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial T}\right)_p\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(II. 7. 2)}$$

Рассмотрим сначала установившееся движение. В этом случае получаем

$$\gamma c_p w\frac{dT}{ds}=Aw\gamma\left[\frac{1}{\gamma}-T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\left(\frac{\mu w}{k}+\frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right)=Aw\gamma\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p-\frac{1}{\gamma}\right]\frac{dp}{ds}$$

или

$$c_p \frac{dT}{ds} = A\left[\frac{1}{\gamma} - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]\left(\frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right) = A\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - \frac{1}{\gamma}\right]\frac{dp}{ds}. \quad \text{(II. 7. 3)}$$

Из (II. 7. 3) видно, что прирост температуры определяется фильтрационным трением и множителем δ:

$$\delta = \frac{1}{\gamma} - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \quad \text{(II. 7. 4)}$$

Если жидкость несжимаема,

$$v = \text{const}, \quad \delta = \frac{1}{\gamma},$$

$$c_p \frac{dT}{ds} = \frac{A}{\gamma}\left(\frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right) = -\frac{A}{\gamma}\frac{dp}{ds}. \quad \text{(II. 7. 5)}$$

Формула (II. 7. 5) выражает очевидный из физических соображений результат — работа фильтрационного трения при установившемся течении, переходящая в теплоту, практически целиком идет на нагревание жидкости вдоль трубки тока. Если жидкость несжимаема и движение неустановившееся, то

$$\gamma c_p w \frac{\partial T}{\partial s} + C\frac{\partial T}{\partial t} = Aw\left(\frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right) = -Aw\frac{\partial p}{\partial s}. \quad \text{(II. 7. 6)}$$

Формула (II. 7. 6) выражает, что при неустановившемся течении несжимаемой жидкости теплота трения расходуется на путевой нагрев жидкости и локальный нагрев жидкости и пористой среды.

В случае идеального газа с уравнением состояния $pv = RT$, где R — газовая постоянная,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}, \quad \delta = \frac{1}{\gamma} - \frac{RT}{p} = v - \frac{RT}{p} = 0. \quad \text{(II. 7. 7)}$$

Таким образом, при стационарной фильтрации идеального газа, когда $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, изменение температуры газа равно нулю. Физически это означает, что нагревание от фильтрационного трения компенсируется охлаждением газа при его расширении.

Если движение неустановившееся, то изменение температуры идеального газа будет определяться членом $-\frac{AmT}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_p \frac{\partial p}{\partial t}$.

Из уравнения Клапейрона

$$\gamma = \frac{p}{RT}, \quad \left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_p = -\frac{p}{RT^2},$$

$$\gamma c_p w \frac{\partial T}{\partial s} + C\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{AmT}{\gamma}\left(-\frac{p}{RT^2}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{Amp}{\gamma RT}\frac{\partial p}{\partial t} = Am\frac{\partial p}{\partial t}. \quad \text{(II. 7. 8)}$$

В этом случае скорость нагрева газа пропорциональна скорости повышения давления.

В общем случае реальных газов и жидкостей изменение температуры тесно связано с эффектом Джоуля — Томсона [19, 20]. Из формулы (II. 6. 11) для di следует, что если энтальпия постоянна, то справедливо соотношение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_i = -\frac{A}{c_p}\left[v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right] = -\frac{A\delta}{c_p} = -\varepsilon. \qquad \text{(II. 7. 9)}$$

Величина ε называется коэффициентом Джоуля — Томсона и таблицы ε для разных газов даются во многих руководствах [20, 21]. Отмеченный выше факт постоянства температуры фильтрующегося идеального газа является следствием классического условия, что в этом случае $\varepsilon = 0$. В общем случае, как указывалось, $\varepsilon \neq 0$, причем могут быть случаи $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < 0$ [19, 20, 21, 22]. Можно преобразовать уравнения (II. 7. 1) и (II. 7. 2), введя туда коэффициент ε, для чего необходимо предварительно вычислить множитель $\frac{AmT}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_p$. Из (II. 7. 9) получим

$$\frac{T}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right) = -\left(1 - \frac{\gamma c_p \varepsilon}{A}\right).$$

Уравнения (II. 7. 1) и (II. 7. 2) примут вид:

$$\gamma c_p w \frac{\partial T}{\partial s} + C\frac{\partial T}{\partial t} = -Aw\gamma\delta\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{AmT}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_p \frac{\partial p}{\partial t} =$$

$$= -Aw\gamma\frac{c_p \varepsilon}{A}\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{AmT}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_p \frac{\partial p}{\partial t} =$$

$$= -\varepsilon\gamma c_p w\frac{\partial p}{\partial s} - \frac{AmT}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_p \frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \text{(II. 7. 10)}$$

где $-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_p$ представляет собой коэффициент объемного расширения жидкости при нагревании с постоянным давлением (температурный коэффициент)

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial T}\right)_p = \beta = \beta(p, T). \qquad \text{(II. 7. 11)}$$

Для капельных жидкостей (вода, керосин) β имеет порядок

$$\beta \approx [0{,}2 \div 1]\, 10^{-3}\,\frac{1}{^\circ\mathrm{K}}.$$

Таким образом, формулы (II. 7. 1) и (II. 7. 2) можно представить еще так:

$$\gamma c_p w\frac{\partial T}{\partial s} + C\frac{\partial T}{\partial t} = -\varepsilon\gamma c_p w\frac{\partial p}{\partial s} + AmT\beta\frac{\partial p}{\partial t} =$$

$$= \varepsilon\gamma c_p w\left(\frac{\mu w}{k} + \frac{\zeta}{a}\varrho w^2\right) + AmT\beta\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(II. 7. 12)}$$

Коэффициенты ε и β согласно (II. 7. 9) и (II. 7. 11) связаны зависимостью

$$\varepsilon = \frac{A}{c_p}\left[v - T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right] = \frac{A}{c_p}[v - T\beta(p, T)v] = \frac{A}{c_p\gamma}[1 - \beta(p, T)T]. \qquad \text{(II. 7. 13)}$$

Уравнение (II. 7.12) теперь можно представить в виде

$$\gamma c_p w \frac{\partial T}{\partial s} + C \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{A}{c_p \gamma} [1 - \beta(p, T) T] \gamma c_p w \frac{\partial p}{\partial s} + Am T \beta(p, T) \frac{\partial p}{\partial t} =$$

$$= -A[1 - \beta(p, T) T] w \frac{\partial p}{\partial s} + AmT \beta(p, T) \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (II. 7. 14)$$

Из (II. 7.13) следует, что для капельных жидкостей с незначительным коэффициентом объемного расширения

$$\varepsilon \approx \frac{A}{c_p \gamma}. \qquad (II. 7. 15)$$

Для воды, например, учитывая, что в этом случае $c_p \approx 1$ *ккал/кГ·°С* и $\gamma = 1000$ *кГ/м*^{3},

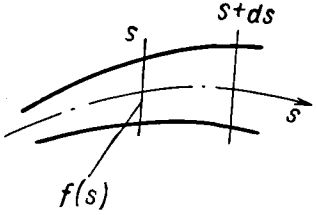


Рис. II. 3. Схема течения при бесконечно близком расположении входного и выходного сечений трубки тока переменного сечения.

$$\varepsilon \approx \frac{1}{427 \cdot 1 \cdot 1000} \approx 0{,}02 \ ^\circ\text{C}/at.$$

Для нефтей ε по порядку величины будет в несколько раз больше 0,05—0,08 °С/*ат*.

Формулу (II. 7.14) можно еще представить в виде, допускающем ее чрезвычайно простую физическую интерпретацию:

$$\gamma c_p w \frac{\partial T}{\partial s} + C \frac{\partial T}{\partial t} =$$

$$= -Aw \frac{\partial p}{\partial s} + A \beta(p, T) Tw \frac{\partial p}{\partial s} +$$

$$+ AmT \beta(p, T) \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (II. 7. 16)$$

Если жидкость несжимаема, $\beta(p, T) = 0$, то второй и третий члены в правой части (II. 7.16) обращаются в нуль и (II. 7.16) принимает вид:

$$\gamma c_p w \frac{\partial T}{\partial s} + C \frac{\partial T}{\partial t} = -Aw \frac{\partial p}{\partial s}. \qquad (II. 7. 17)$$

Формула (II. 7. 17) выражает тот очевидный факт, что тепло, в которое обращается работа трения при фильтрации несжимаемой жидкостив адиабатически изолированной трубке тока, целиком расходуется на нагревание жидкости и пористой среды.

Не представляет труда непосредственный вывод этой формулы из указанного выше соображения. Возьмем два сечения трубки тока s и $s + ds$ (рис. II. 3) с объемным расходом Q. Если отбросить силы инерции ввиду малых скоростей фильтрации, то силы давления и трения в каждый момент равны и противоположны между собой, а работа сил давления численно равна работе сил трения.

Работа сил давления за время dt равна $-\frac{\partial p}{\partial s} ds Q dt = -\frac{\partial p}{\partial s} dsf(s) w dt$, чему соответствует ее значение в тепловых единицах $-Awf(s) \frac{\partial p}{\partial s} ds\, dt$. Выделившееся тепло в этом количестве плюс тепло, вносимое путем конвекции, израсходуется на нагревание жидкости и скелета пористой среды, которое можно определить следующим образом. Тепло, вносимое путем конвекции, равно $\gamma c_p Q \left\{ T(s, t) - \left[T + \frac{\partial T}{\partial s} ds \right] \right\} dt = -\gamma c_p Q \frac{\partial T}{\partial s} ds\, dt$. Таким образом, учитывая,

что жидкость занимает объем пор в трубке $mf(s)\,ds$, а твердый скелет — объем $(1-m)\,f(s)\,ds$, получаем

$$-Awf(s)\frac{\partial p}{\partial s}\,ds\,dt-\gamma\,c_p\,Q\frac{\partial T}{\partial s}\,ds\,dt=[m\gamma\,c_p+(1-m)\gamma_1 c_1]\,f(s)\,ds\frac{\partial T}{\partial t}\,dt$$

или, сокращая на $f(s)\,ds\,dt$,

$$-Aw\frac{\partial p}{\partial s}-\gamma\,c_p\frac{Q}{f(s)}\frac{\partial T}{\partial s}=[m\gamma\,c_p+(1-m)\gamma_1 c_1]\frac{\partial T}{\partial t}\ ,$$

что совпадает с (II. 7.17).

Если жидкость сжимаема, то при расчете изменения температуры следует еще учесть эффект нагревания при сжатии, в результате чего можно прийти к уравнению (II. 7. 14).

Вывод уравнения энергии в несколько другой форме, нежели выше, предложен Э. Б. Чекалюком в работах [5, 6, 25].

§ 8. Примеры практического использования уравнения энергии для неизотермической фильтрации

Э. Б. Чекалюк предложил использовать связь между изменением температуры и давлением, выражаемую формулой (II. 7. 12) без члена с $\partial p/\partial t$, для исследования призабойной зоны водяных или нефтяных скважин [5, 6]. Ниже в несколько другом виде, нежели в [5, 6], излагается сущность предложенного им метода.

Проинтегрируем уравнение (II. 7. 12) обычным методом характеристик, применяемым для уравнений первого порядка в частных производных, для чего составим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующих уравнению (II. 7. 12):

$$\frac{ds}{\gamma\,c_p w}=\frac{dt}{C}=\frac{dT}{-\varepsilon\gamma\,c_p w\dfrac{\partial p}{\partial s}}\ . \qquad \text{(II. 8. 1)}$$

Рассмотрим первое уравнение системы, предварительно представив его в виде

$$\frac{f(s)\,ds}{\gamma\,c_p Q}=\frac{dt}{C}\ ,$$

откуда находим первый интеграл, полагая для простоты физические константы неизменными и $Q=\text{const}$:

$$\int_{s_0}^{s} f(s)\,ds=\frac{\gamma\,c_p Q t}{C}+(\text{const})_1$$

или, вводя обозначение для объема $V(s)$ трубки тока,

$$V=V(s)=\int_{s_0}^{s} f(s)\,ds, \qquad \text{(II. 8. 2)}$$

$$V-\frac{\gamma\,c_p Q t}{C}=(\text{const})_1. \qquad \text{(II. 8. 3)}$$

Второй частный интеграл получим из уравнения

$$\frac{ds}{\gamma c_p w} = \frac{dT}{-\varepsilon\gamma c_p w \dfrac{\partial p}{\partial s}}$$

или

$$-\frac{\partial p}{\partial s}\, ds = \frac{dT}{\varepsilon}\,. \qquad \text{(II. 8. 4)}$$

При фильтрации капельной жидкости с постоянным расходом Q распределение давления можно считать практически установившимся, т. е. полагать $p = p(s)$. Тогда (II. 8.4) можно представить в виде

$$-dp = \frac{dT}{\varepsilon}$$

или

$$p + \frac{T}{\varepsilon} = p(s) + \frac{T(s,\ t)}{\varepsilon} = (\text{const})_2. \qquad \text{(II. 8. 5)}$$

Общее решение уравнения в частных производных можно представить в виде $\varphi[(\text{const})_1 (\text{const})_2] = 0$. где φ — произвольная функция или, что для наших целей удобнее,

$$(\text{const})_2 = \psi[(\text{const})_1],$$

$$p(s) + \frac{T(s,\ t)}{\varepsilon} = \psi\left(V - \frac{\gamma c_p Q t}{C}\right), \qquad \text{(II. 8. 6)}$$

где ψ — произвольная функция аргумента разности $V - \dfrac{\gamma c_p Q t}{C}$.

В связи с этим удобнее от переменной s перейти к объему $V(s)$, имея в виду формулу (II. 8.2):

$$p(V) + \frac{T(V,\ t)}{\varepsilon} = \psi\left(V - \frac{\gamma c_p Q t}{C}\right). \qquad \text{(II. 8. 7)}$$

Вид функции Ψ устанавливается из начальных условий задачи. Пусть жидкость ранее покоилась и температура в ней была всюду постоянна и равна T_0. Пусть в момент $t = 0$ начинается движение с расходом Q и в трубке устанавливается практически стационарное распределение давления $p(s)$ или, что то же, $p(V)$.

Тогда из решения (II. 8.7) имеем

$$p(V) + \frac{T_0}{\varepsilon} = \psi(V). \qquad \text{(II. 8. 8)}$$

Теперь вид функции ψ установлен — он совпадает с распределением давления $p(V)$. Из (II. 8.7) и (II. 8. 8) получаем

$$p(V) + \frac{T(V,\ t)}{\varepsilon} = p\left(V - \frac{\gamma c_p Q t}{C}\right) + \frac{T_0}{\varepsilon}$$

или

$$\frac{T(V,\ t) - T_0}{\varepsilon} = \frac{\Delta T(V,\ t)}{\varepsilon} = p\left(V - \frac{\gamma c_p Q t}{C}\right) - p(V). \qquad \text{(II. 8. 9)}$$

Таким образом, начальное распределение давления $p(V)$ позволяет определить последующее изменение температуры в любом сечении V, в любой момент времени по разности орлинат одной фиксированной кривой $p(V)$ в точках $V = V_1$ и $V = V_2 = V_1 - \dfrac{\gamma c_p Q t}{C}$.

Предположим теперь, что в некотором фиксированном сечении $s = s_1$, $V = V_1$ измеряется повышение температуры $\Delta T(V_1, t)$. Из (II.8.9) имеем

$$\frac{\Delta T(V_1, t)}{\varepsilon} = p\left(V_1 - \frac{\gamma c_p Q t}{C}\right) - p(V_1), \qquad \text{(II.8.10)}$$

где $p\left(V_1 - \frac{\gamma c_p Q t}{C}\right)$ представляет собой давление в сечении, расположенном относительно V_1 вверх по течению, причем объем трубки тока между этим сечением и фиксированным сечением V_1, очевидно, равен $\frac{\gamma c_p Q t}{C}$.

Формула (II.8.10), таким образом, позволяет по измерению температуры в различные моменты времени в заданном фиксированном сечении определять разность давлений между сечением, расположенным вверх по течению, и данным фиксированным сечением. Иначе говоря, кривая температура — время может быть перестроена в кривую давление — объем трубки тока или, так как объем есть известная функция расстояния, то непосредственно в распределение давления вдоль трубки тока. Расстояние s от фиксированного сечения, где измеряется температура, согласно (II.8.2) и (II.8.10) определяется формулой

$$V(s) = \int_0^s f(s)\, ds = \frac{\gamma c_p Q t}{C}. \qquad \text{(II.8.11)}$$

Для примера пусть после пуска водяной или нефтяной скважины с постоянным дебитом Q глубинным термометром регистрируется повышение температуры ΔT сверх начальной пластовой температуры T_0. Тогда кривая $\Delta T(t)$ может быть перестроена в кривую распределения давления в призабойной зоне $p = p(r) - p(r_c)$, где r_c — радиус скважины, а r — расстояние до оси скважины. Если скважина гидродинамически совершенная, т. е. вскрыла пласт на всю мощность h, то время t и расстояние r согласно (II.8.11) связаны соотношением

$$V = \int_{r_c}^{r} 2\pi rh\, dr = \pi(r^2 - r_c^2)h = \frac{\gamma c_p Q t}{C},$$

т. е.

$$r = \sqrt{r_c^2 + \frac{\gamma c_p Q t}{\pi C h}}. \qquad \text{(II.8.12)}$$

Заметим, что при этом ни закон фильтрации, ни характер распределения проницаемости в призабойной зоне роли не играют, так как кривая $p(r)$ получается по одной только кривой $\Delta T = \Delta T(t)$. После построения кривой распределения давления $p(r)$ по ее виду — крутизне различных участков — можно судить о характере изменения проницаемости призабойной зоны.

Для несовершенных скважин формула (II.8.12) неверна и здесь следует иметь дополнительную информацию о геометрии фильтрационного потока, обусловленной видом несовершенства скважины.

Изложенный выше метод, таким образом, основан на пренебрежении теплопроводностью и на знании геометрии фильтрационного потока. Поэтому метод является приближенным и его степень точности должна быть установлена дальнейшими специальными опытными исследованиями. С теоретической же стороны этот метод представляет безусловный интерес, как одно из возможных направлений использования результатов термометрии для исследования скважин и пластов.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу о нагревании или охлаждении пласта при нагнетании в скважину несжимаемой жидкости с температурой T_c, отличной от начальной пластовой T_0. Если разность $(T_c - T_0)$ достаточно велика, то в первом приближении можно пренебречь эффектом фильтрационного трения. Более существенным является пренебрежение утечками тепла вследствие теплопроводности. В этом случае уравнение (II. 7. 17) принимает особенно простой вид — в правой части будет нуль. Общее решение, как легко видеть, имеет вид:

$$T(s, t) = \Psi\left(t - \frac{CV}{\gamma c_p Q}\right), \qquad \text{(II. 8. 13)}$$

где Ψ — произвольная функция, а $V = V(s)$ определено формулой (II. 8. 11). Пусть при $s = 0$ и $V = 0$ известна температура подаваемой жидкости $T_c = T_c(t)$. Тогда согласно (II. 8. 13)

$$T(0, t) = T_c(t) = \Psi(t), \qquad \text{(II. 8. 14)}$$

$$T(s, t) = T(V, t) = T_c\left(t - \frac{CV}{\gamma c_p Q}\right). \qquad \text{(II. 8. 15)}$$

Согласно последней формуле температура $T_c(t_1)$ в момент t_1 по истечении заданного интервала времени Δt достигнет сечения пласта V, положение которого определяется из уравнения

$$t_1 + \Delta t - \frac{CV}{\gamma c_p Q} = t_1,$$

т. е.

$$V = \frac{\gamma c_p Q \cdot \Delta t}{C}. \qquad \text{(II. 8. 16)}$$

Таким образом, величина $\frac{\gamma c_p Q}{C}$ — это объемная скорость распространения тепловой волны, температурный профиль которой в этих условиях сохраняется.

Согласно (II. 6. 21)

$$\frac{\gamma c_p Q}{C} = \frac{\gamma c_p Q}{m\gamma c_p + (1-m) c_1 \gamma_1} = \frac{Q}{m} \frac{1}{1 + \frac{1-m}{m} \frac{c_1 \gamma_1}{c_p \gamma}}. \qquad \text{(II. 8. 17)}$$

Величина $\frac{Q}{m}$ представляет собой объемную скорость фронта нагнетаемой жидкости. Согласно (II. 8. 17) объемная скорость тепловой волны оказывается существенно меньше объемной скорости фронта нагнетаемой жидкости, перемещающегося в области с начальной пластовой температурой T_0. Иначе говоря, фронт тепловой волны всегда отстает от фронта нагнетаемой жидкости.

Дальнейшее исследование этой задачи с приближенным учетом тепловых утечек вследствие теплопроводности дано в работах Э. Б. Чекалюка [5, 6], Л. И. Рубинштейна [23], Г. Е. Малофеева [3, 4] и других. Теплопроводность пористой среды и жидкости сказывается в «размазывании» профиля тепловой волны: с удалением от места нагнетания температуры жидкости и пласта сближаются.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hubbert M. K. Darcy's Law and the Field Equations of the Flow of underground Fluids. Petroleum Transactions AIME, 1956.

2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостоптехиздат, 1952.

3. Малофеев Г. Е. Исследование распределения температуры в пласте и потерь тепла в кровлю и подошву при закачке в пласт горячей воды с целью увеличения нефтеотдачи. Диссертация. МИНХ и ГП, 1959.

4. Малофеев Г. Е., Сергеев А. И. Исследование термических свойств нефтенасыщенных песков. Нефть и газ, № 4. 1958.

5. Чекалюк Э. Б. Основы пьезометрии залежей нефти и газа. Гос. изд-во техн. литер. УССР, Киев, 1961.

6. Чекалюк Э. Б. Некоторые термодинамические явления в пористой среде и пути их использования в нефтяной промышленности. Диссертация. ВНИИ, 1962.

7. Салехов Г. С. К определению функции давления в неоднородных пластах нефтяных месторождений. Докл. АН СССР, т. 105, № 6, 1955.

8. Oroveanu T. Asupra mişcării unui fluid incompressibil printr-un mediu poros neomogen, comunicările Academiei Republicii populare Romine, t. VIII, No. 1, 1958.

9. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостоптехиздат, 1948.

10. Швидлер М. И. Об учете сил инерции в уравнениях фильтрации сжимаемой жидкости в сжимаемой пористой среде. Труды УфНИИ, вып. III, 1958.

11. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. Прикл. матем. и механ., т. IV, вып. 1, 1940.

12. Соколовский В. В. О нелинейной фильтрации грунтовых вод. Прикл. матем. и механ., т. XIII, вып. 5, 1949.

13. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, 1957.

14. Гинзбург И. П. Прикладная гидрогазодинамика. Изд-во Ленинградского университета, 1958.

15. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. II. ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

16. Павловский Н. Н. Гидравлический справочник. Госэнергоиздат, 1937.

17. Френкель Н. З. Гидравлика. Госэнергоиздат, 1956.

18. Чарный И. А. Нагревание призабойной зоны при закачке горячей жидкости в скважину. Нефт. хоз. № 2, 3, 1953.

19. Литвин А. М. Техническая термодинамика. Госэнергоиздат, 1956.

20. Карапетьянц М. Х. Химическая термодинамика. Госхимиздат, 1953.

21. Handbook of Chemistry and Physics, 37 ed. Chemical Rubber Publication, vol. I, II, 1955—1956.

22. Чарный И. А. Основы газовой динамики. Гостоптехиздат, 1961.

23. Рубинштейн Л. И. О температурном поле пласта при нагнетании в него теплоносителя. Труды Уфимского нефтяного ин-та, вып. II, 1958.

24. Щелкачев В. Н. Уточнение вывода основных динамических уравнений теории фильтрации. Изв. высш. учебн. завед. Нефть и газ, № 2, 1961.

25. Чекалюк Э. Б. Уравнение сохранения энергии для потока сжимаемой жидкости в пористой среде. Труды УкрНИГРИ, вып. III. Гостоптехиздат, 1963.

ГЛАВА III

ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ О ПРИТОКЕ К СОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ

§ 1. Связь теории функций комплексного переменного с плоской задачей теории фильтрации. Функция тока. Комплексный потенциал

Плоское движение несжимаемой жидкости в пористой среде, следующее линейному закону фильтрации, является наиболее хорошо исследованным благодаря тому обстоятельству, что здесь оказалось возможным применить одно из наиболее мощных средств математического анализа — аппарат теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим плоское движение несжимаемой жидкости в пористой среде. В этом случае мы имеем следующие уравнения движения:

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \text{(III. 1. 1)}$$

$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Проекция скорости на ось z $w = 0$, потенциал $\Phi = cH = \frac{kp}{\mu}$ зависит только от координат x и y.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \qquad \text{(III. 1. 2)}$$

Подставляя значения компонент скорости u, v из уравнений (III. 1. 1) в уравнение неразрывности (III. 1. 2), получаем уравнение Лапласа на плоскости

$$\nabla^2 \Phi = \frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} = 0. \qquad \text{(III. 1. 3)}$$

Найдем уравнение линий тока нашего плоского движения.

Напомним определение линии тока. Линия тока — это линия, касательная к которой в любой точке совпадает по направлению с вектором скорости жидкости частицы, находящейся в этой же точке.

Можно построить новую функцию, связанную определенным образом с потенциалом скоростей. Эта новая функция, называемая функцией тока, даст нам представление о всей картине движения. К сожалению, такую функцию удается ввести только для плоского или осесимметричного движения. Для пространственного трехразмерного движения такой функции ввести не удается, и поэтому пространственное движение изучено гораздо хуже, чем плоское.

Дифференциальное уравнение линии тока устанавливается как следствие определения этой линии. В общем случае движения направляющие косинусы касательной к линии тока, т. е. косинусы углов α_1, α_2, α_3 касательной с осями координат, равны косинусам углов, которые составляет с этими осями вектор скорости V. Отсюда следует

$$\cos\alpha_1 = \frac{dx}{ds} = \frac{u}{|\vec{V}|}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{dy}{ds} = \frac{v}{|\vec{V}|},$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{dz}{ds} = \frac{w}{|\vec{V}|}, \qquad \text{(III. 1. 4)}$$

где ds — элемент линии тока с проекциями dx, dy dz; $|\vec{V}|$ — модуль вектора скорости. Для плоского движения остаются два уравнения:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{|\vec{V}|}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{|\vec{V}|}$$

или

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

$$v\,dx - u\,dy = 0. \qquad \text{(III. 1. 5)}$$

Будем искать интеграл этого дифференциального уравнения в виде неявной зависимости

$$\Psi(x, y) = C. \qquad \text{(III. 1. 6)}$$

Меняя постоянную C, получаем уравнение семейства линий тока. Изменение C соответствует переходу от одной линии тока к другой (рис. III. 1).

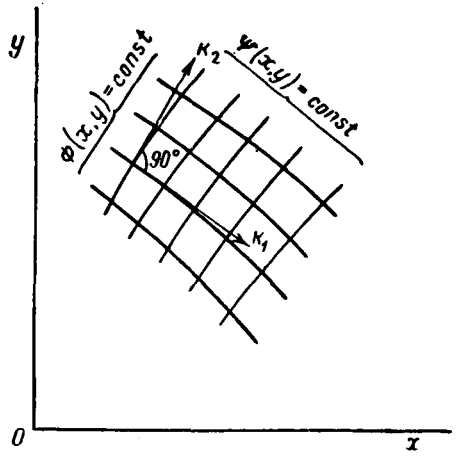


Рис. III. 1. Эквипотенциали и линии тока на комплексной плоскости течения.

Введенная нами функция $\Psi = \Psi(x, y)$ обладает тем свойством, что она постоянна не во всех точках плоскости, а только вдоль заданной линии тока. При переходе к другой линии тока константа C меняется. Функция $\Psi(x, y)$ называется функцией тока.

Найдем связь функции тока с потенциалом скорости $\Phi = \Phi(x, y)$. Вдоль линии тока $\Psi(x, y) = \text{const}$. Следовательно, полный дифференциал функции тока определяется уравнением

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0. \qquad \text{(III. 1. 7)}$$

Уравнения (III. 1. 5) и (III. 1. 7), очевидно, совпадают. Таким образом,

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = v\,dx - u\,dy = 0. \qquad \text{(III. 1. 8)}$$

Сравнивая в уравнении (III. 1. 8) коэффициенты при dx и dy, получаем

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \; u = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}. \qquad \text{(III. 1. 9)}$$

Сравним проекции скоростей u и v из системы (III. 1. 9) с проекциями скоростей из основной системы (III. 1. 1). Получаем

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}; \; v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \qquad \text{(III. 1. 10)}$$

Уравнения (III. 1. 10) называются обычно уравнениями Коши и Римана.

Докажем, что $\Psi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Из системы (III. 1. 10), дифференцируя первое уравнение по y, второе по x, получаем

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial x} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}.$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \qquad \text{(III. 1. 11)}$$

Уравнения (III. 1. 10) имеют связь с теорией функций комплексного переменного.

Введем комплексное переменное. Пусть плоскость течения принята за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$, $i^2 = -1$ [1].

---

[1] Здесь не возникает опасения в смешении комплексного переменного $z = x + iy$ с третьей отсутствующей координатой z.

Аналогично тому, как составлено комплексное переменное $z = x + iy$, составим новую комплексную функцию $\Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$.

Возникает следующий вопрос: можно или нельзя представить эту функцию в виде некоторой функции комплексного переменного $F(z) = F(x + iy)$?

Не всякая комплексная функция $M(x, y) + iN(x, y)$, где $M(x, y)$, $N(x, y)$ — произвольные функции двух переменных x и y, будет функцией комплексного переменного $z = x + iy$. В том, что это так, можно убедиться на очень простом примере.

Возьмем функцию $F(z) = z^2 = (x + iy)^2$. Раскрывая квадрат суммы, получаем

$$F(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Таким образом, если взять две функции

$$M(x, y) = x^2 - y^2, \quad N(x, y) = 2xy,$$

затем составить комплексную функцию $M(x, y) + iN(x, y) = x^2 - y^2 + i2xy$, то в данном случае мы «экспериментально» убедимся, что эта функция $x^2 - y^2 + i2xy$ действительно является функцией комплексного переменного $z = x + iy$.

А теперь возьмем и «испортим» какую-либо из этих функций, например, положим $M_1(x, y) = x^2 + y^2$.

Если составить теперь функцию $M_1(x, y) + iN(x, y) = x^2 + y^2 + i2xy$, где одна из этих функций «испорчена», то такой комплекс уже не будет функцией комплексного переменного $z = x + iy$.

Оказывается, что уравнения (III. 1. 10) являются необходимым и достаточным условием для того, чтобы комплексную функцию $\Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ (где Φ — потенциал скорости; Ψ — функция тока) можно было рассматривать как функцию комплексного переменного $z = x + iy$.

Важность этого обстоятельства заключается в том, что функции, зависящие от двух переменных x и y, заменяются функцией, зависящей формально от одного переменного $z = x + iy$.

Чтобы доказать, что $\Phi + i\Psi$ является не просто комплексом, а функцией комплексного переменного, обратимся к уравнениям Коши — Римана (III. 1. 10). При этом будем рассуждать так: если $\Phi + i\Psi$ является функцией комплексного переменного $z = x + iy$,

$$\Phi(x, y) + i\Psi(x, y) = F(z), \qquad \text{(III. 1. 12)}$$

то, следовательно, производная $\frac{dF}{dz}$ должна иметь одно и то же значение независимо от закона стремления $\Delta z \to 0$.

Имея это в виду, продифференцируем уравнение (III. 1. 12) по x. Учитывая правило дифференцирования сложных функций (а также,

что $z = x + iy$), получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{dF}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{dz}. \qquad \text{(III. 1. 13)}$$

Продифференцируем теперь уравнение (III. 1. 12) по y:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + i\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{dF}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = i\frac{dF}{dz}.$$

Разделив последнее уравнение на i, получим

$$\frac{dF}{dz} = \frac{1}{i}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \qquad \text{(III. 1. 14)}$$

Таким образом, из уравнений (III. 1. 13) и (III. 1. 14) следует

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \qquad \text{(III. 1. 15)}$$

Сравнивая в уравнении (III. 1. 15) действительную и мнимую части, получаем уравнения Коши — Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

полностью совпадающие с уравнениями (III. 1. 10).

Следовательно, если взять любую функцию комплексного переменного

$$F(z) = F(x + iy)$$

и отделить в ней действительную часть $\operatorname{Re} F(z)$ от мнимой $\operatorname{Im} F(z)$ [1], то можно трактовать действительную часть, как потенциал некоторого плоского фильтрационного потока, мнимую часть — как функцию тока этого течения:

$$\operatorname{Re} F(z) = \Phi(x, y), \quad \operatorname{Im} F(z) = \Psi(x, y).$$

Приравнивая действительную часть постоянной величине, получаем семейство эквипотенциалей:

$$\Phi(x, y) = \text{const}.$$

Приравнивая мнимую часть другой константе, получаем семейство линий тока $\Psi(x, y) = \text{const}$.

---

[1] $\operatorname{Re} F(z)$ — обозначение действительной части функции комплексного переменного $F(z)$; $\operatorname{Im} F(z)$ — обозначение ее мнимой части. Символы Re и Im являются первыми буквами французских слов «действительный» (reel) и «мнимый» (imaginaire).

Таким образом, каждой функции комплексного переменного можно сопоставить некоторый плоский фильтрационный поток. Зная функцию комплексного переменного $F(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$, $z = x + iy$, называемую характеристической функцией течения или комплексным потенциалом, сразу получаем всю картину движения: семейство эквипотенциалей, семейство линий тока и поле скоростей.

Теория функций комплексного переменного в настоящее время имеет широчайшее применение в гидродинамике, аэродинамике, теории фильтрации, теории упругости, теории электричества и теплоты и т. д.

Докажем, что линии тока и эквипотенциальные линии образуют ортогональную сетку, т. е. каждая пара кривых этих двух семейств пересекается под прямым углом (рис. III. 1).

Уравнения эквипотенциалей и линий тока имеют вид:

$$\Phi(x, y) = \text{const}, \quad \Psi(x, y) = \text{const}. \qquad \text{(III. 1. 16)}$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy = 0. \qquad \text{(III. 1. 17)}$$

Угловой коэффициент $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const}} = k_1$ касательной к эквипотенциали определяется из первого уравнения (III. 1. 17):

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi=\text{const}} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = k_1. \qquad \text{(III. 1. 18)}$$

Совершенно аналогично найдется из второго уравнения (III. 1. 17) и угловой коэффициент k_2 касательной к линии тока:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi=\text{const}} = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = k_2. \qquad \text{(III. 1. 19)}$$

Из уравнений Коши — Римана следует, что $k_1 k_2 = -1$. Действительно, учитывая (III. 1. 10), получаем

$$k_1 k_2 = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}} = -1,$$

что (как известно из аналитической геометрии) имеет место для прямых, пересекающихся под прямым углом. Таким образом, линии тока будут пересекать эквипотенциали под прямым углом.

§ 2. Приток к точечным стокам и источникам на плоскости. Случай равнодебитных стока и источника. Приток к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте

Рассмотрим частный случай движения, которое будет нас интересовать, — приток к стоку или источнику, помещенному в начале координат. Известно, что потенциал точечного источника или стока определяется формулой (I. 2. 18):

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + C. \qquad \text{(III. 2. 1)}$$

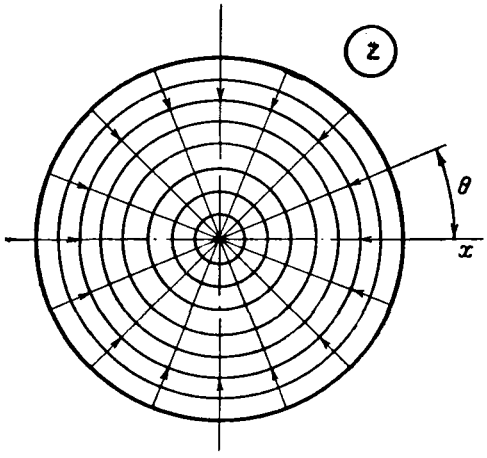


Рис. III. 2. Приток к точечному стоку на плоскости.

Семейство эквипотенциалей будет окружностями $r = \text{const}$, так как $\Phi = \text{const}$ при $r = \text{const}$.

Напомним, что дебит q на единицу мощности пласта считается положительным для скважины-стока (эксплуатационной) и отрицательным для скважины-источника (нагнетательной).

Семейство линий тока будет ортогонально эквипотенциалям, т. е. линии тока будут представлять собой лучи, выходящие из начала координат. По этим лучам будет направлен вектор скорости. Для стока вектор скорости будет направлен к центру. Каждая линия тока является прямой и составляет с осями координат постоянный угол θ (рис. III. 2). Вдоль линии тока функция тока — постоянная величина; значит, в полярных координатах r, θ ее выражение будет иметь простой вид:

$$\Psi = A\theta + B, \qquad \text{(III. 2. 2)}$$

где A и B — некоторые постоянные.

Составим теперь комплекс:

$$\Phi + i\Psi = \frac{q}{2\pi} \ln r + iA\theta + iB + C.$$

Особенно простое выражение последнего комплекса получится, если придадим A значение $A = \frac{q}{2\pi}$:

$$\Phi + i\Psi = \frac{q}{2\pi}(\ln r + i\theta) + \text{const}, \qquad \text{(III. 2. 3)}$$

где

$$\text{const} = iB + C.$$

Далее

$$\ln r + i\theta = \ln\left(r e^{i\theta}\right).$$

Комплексное переменное z в декартовых координатах имеет вид $z = x + iy$, а в полярных координатах, так как $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Но согласно известной из дифференциального исчисления формуле Эйлера

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Таким образом,

$$\ln\left(r e^{i\theta}\right) = \ln[r(\cos\theta + i\sin\theta)] = \ln z. \qquad \text{(III. 2. 4)}$$

Отсюда получаем выражение, уже окончательное, характеристической функции источника или стока, помещенного в начале координат:

$$F(z) = \frac{q}{2\pi}\ln z + C. \qquad \text{(III. 2. 5)}$$

Нас сейчас будет интересовать картина движения, образованная равнодебитными источником и стоком. Физически это означает движение, обусловленное работой двух скважин в неограниченном пласте: первой — инжекционной, второй — эксплуатационной.

Прежде чем рассмотреть эту задачу, посмотрим, что изменится, если источник или сток будет помещен не в начале координат, а в какой-то точке, у которой комплексная координата будет $z_0 = x_0 + iy_0$.

Легко видеть, что для этого случая нужно взять функцию того же самого вида, но заменить в формуле (III. 2. 5) z разностью $(z - z_0)$. Для характеристической функции получим

$$F(z) = \frac{q}{2\pi}\ln(z - z_0) + C. \qquad \text{(III. 2. 6)}$$

Перейдем теперь к указанному выше случаю двух скважин — нагнетательной и эксплуатационной. Для простоты разместим их вдоль оси x (рис. III. 3). Пусть в точке $x = a$, $y = 0$ находится скважина-сток, в точке $x = -a$, $y = 0$ — скважина-источник. Найдем потенциал движения, образованного совместной работой двух скважин. Потенциал и функция тока для первой скважины (опуская постоянные слагаемые) будут равны

$$\Phi_1 = \frac{q}{2\pi}\ln r_1, \quad \Psi_1 = \frac{q}{2\pi}\theta_1, \qquad \text{(III. 2. 7)}$$

где r_1 — расстояние от точки M, где определяется потенциал, до первой скважины; θ_1 — угол, составляемый радиусом-вектором r_1 с осью x.

Совершенно аналогично для второй скважины (также опуская константу) получим

$$\Phi_2 = -\frac{q}{2\pi}\ln r_2, \quad \Psi_2 = -\frac{q}{2\pi}\theta_2, \tag{III.2.8}$$

где r_2 — расстояние от точки M до второй скважины; θ_2 — угол, составленный r_2 с осью x.

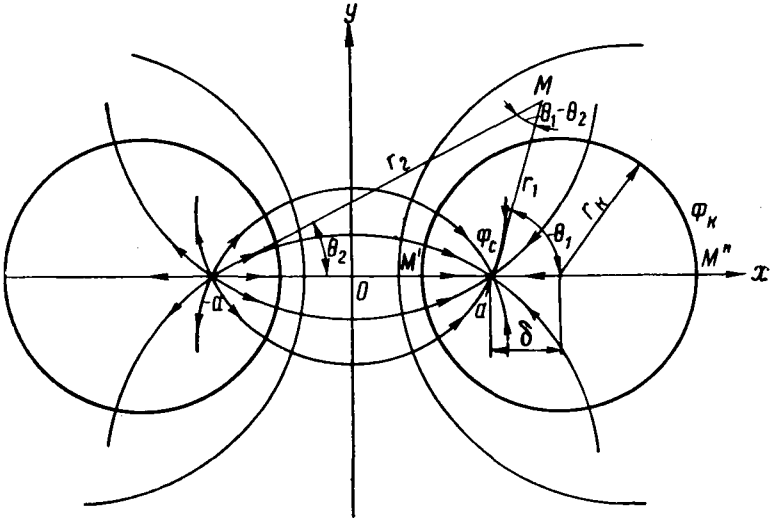


Рис. III. 3. Течение при равнодебитных стоке и источнике на плоскости.

Добавляя произвольную постоянную C, получаем выражение комплексного потенциала результирующего течения в виде

$$F(z) = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{z-a}{z+a} + C. \tag{III.2.9}$$

Докажем, что линии тока будут окружностями, выходящими из нагнетательной скважины и заканчивающимися в эксплуатационной. Отделяя вещественную часть в формуле (III.2.9) и учитывая формулы (III.2.8), найдем потенциал и функцию тока результирующего движения:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} + \text{const}, \tag{III.2.10}$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2). \tag{III.2.11}$$

Условию $\Psi = \text{const}$ соответствует, что на линии тока

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{const}. \qquad \text{(III. 2. 12)}$$

Но, очевидно, $\theta_1 - \theta_2$ — угол, под которым виден отрезок $[-a, a]$, если на него смотреть из точки M. Следовательно, линия тока есть геометрическое место точек, из которых отрезок $-a$, a, соединяющий скважины, виден под одинаковым углом $\theta_1 - \theta_2 = \text{const}$. Из элементарной геометрии известно, что таким геометрическим местом точек является окружность. Следовательно, в зависимости от величин угла $\theta_1 - \theta_2$ будем получать разные окружности — разные линии тока.

Таким образом, семейством линий тока являются окружности, проходящие через сток и источник.

Легко видеть, что семейство эквипотенциалей, пересекающих линии тока под прямым углом, также будет семейством окружностей, ортогональных первому семейству (рис. III. 3). Любую из этих окружностей-эквипотенциалей можем выбрать за круговой контур питания.

Действительно, согласно формуле (III. 2. 10) $\Phi = \text{const}$ в точках, где $\frac{r_1}{r_2} = \text{const}$.

Геометрическое место точек $\frac{r_1}{r_2} = \text{const}$ является кривой, уравнение которой в декартовых координатах имеет вид:

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} = c, \qquad \text{(III. 2. 13)}$$

где c — некоторая постоянная.

Последнее уравнение можно представить так:

$$(x-a)^2 + y^2 = c\,(x+a)^2 + cy^2,$$

$$(1-c)\,x^2 + (1-c)\,y^2 - (1+c)\,2ax + (1-c)\,a^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2a\,\frac{1+c}{1-c}\,x + a^2 = 0. \qquad \text{(III. 2. 14)}$$

Уравнение (III. 2. 14) можно далее представить в виде

$$x^2 - 2a\,\frac{1+c}{1-c}\,x + \left(a\,\frac{1+c}{1-c}\right)^2 - \left(a\,\frac{1+c}{1-c}\right)^2 + y^2 + a^2 = 0$$

или

$$\left(x - a\,\frac{1+c}{1-c}\right)^2 + y^2 = a^2\left[\left(\frac{1+c}{1-c}\right)^2 - 1\right] = \frac{4a^2c}{(1-c)^2}. \qquad \text{(III. 2. 15)}$$

Последнее уравнение является уравнением окружности радиусом $2a\sqrt{c}/(1-c)$ с центром в точке $x_0 = a\,(1+c)/(1-c)$, $y_0 = 0$.

Таким образом, меняя c, будем переходить от одной окружности-эквипотенциали к другой.

Будем считать известными радиус $r_к = R_к$ одной эквипотенциали — контура питания — и эксцентриситет δ, характеризующий положение скважины.

Нам придется в дальнейшем выразить линейный параметр a в (III. 2. 9) через δ и $R_к$.

Найдем сначала дебит q скважины, предполагая величину a известной. Обозначим потенциалы на контуре $R_к$ и контуре скважины $r_с$ через $\Phi_к$ и $\Phi_с$.

Так как окружность $R_к$ является эквипотенциалью, то для потенциала точки M' — левого конца диаметра — согласно формуле (III. 2. 10) и рис. III. 3 можем написать следующее уравнение:

$$r_1 = R_к - \delta; \quad r_2 = 2a - (R_к - \delta)$$

$$\Phi_{M'} = \Phi_к = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{R_к - \delta}{2a - (R_к - \delta)} + C, \qquad \text{(III. 2. 16)}$$

где C — постоянная.

Второе уравнение получаем, используя известный потенциал $\Phi_с$ контура скважины.

Для точек контура скважины $r_1 = r_с$. Что касается r_2 — расстояния до скважины-источника, то здесь целесообразно сделать следующее приближение. Величина r_2 будет заключаться в пределах

$$2a - r_с \leqslant r_2 \leqslant 2a + r_с.$$

Так как $r_с$ считается малым по сравнению с $2a$, то положим $r_2 \approx 2a$.

Тогда второе уравнение будет иметь следующий вид:

$$\Phi_с = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_с}{2a} + C. \qquad \text{(III. 2. 17)}$$

Вычитая уравнение (III. 2. 17) из (III. 2. 16), получаем

$$\Phi_к - \Phi_с = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{2a(R_к - \delta)}{r_с[2a - (R_к - \delta)]}. \qquad \text{(III. 2. 18)}$$

Остается найти связь между a, которое неизвестно, и параметрами $R_к$, δ.

Для этого можно воспользоваться условием, что потенциалы точек M' и M'' одинаковы, откуда следует, что

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{M'} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)_{M''}.$$

Эти отношения имеют вид:

$$\frac{R_к - \delta}{2a - (R_к - \delta)} = \frac{R_к + \delta}{2a + R_к + \delta}.$$

Последнее уравнение позволит нам найти $2a$. Получаем

$$2a(R_к + \delta) - R_к^2 + \delta^2 = 2a(R_к - \delta) + R_к^2 - \delta^2,$$

$$2a\delta - R_к^2 + \delta^2 = -2a\delta + R_к^2 - \delta^2,$$

$$2a = \frac{R_к^2 - \delta^2}{\delta}. \qquad \text{(III. 2. 19)}$$

Теперь остается найденное значение $2a$ подставить в формулу (III. 2. 18).

Предварительно определяем величины, входящие в (III. 2. 18):

$$\frac{2a}{r_с} = \frac{R_к^2 - \delta^2}{\delta r_с},$$

$$2a - (R_к - \delta) = \frac{R_к^2 - \delta^2}{\delta} - (R_к - \delta) = \frac{R_к}{\delta}(R_к - \delta).$$

Формула (III. 2. 18) принимает вид:

$$\Phi_к - \Phi_с = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{(R_к^2 - \delta^2)(R_к - \delta)\delta}{\delta r_с R_к (R_к - \delta)}$$

или

$$\Phi_к - \Phi_с = \frac{q}{2\pi} \ln \left[\frac{R_к}{r_с} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_к^2} \right) \right]. \qquad \text{(III. 2. 20)}$$

Для дебита получаем

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\ln \left[\frac{R_к}{r_с} \left(1 - \frac{\delta^2}{R_к^2} \right) \right]}. \qquad \text{(III. 2. 21)}$$

При $\delta = 0$ формула (III. 2. 21) обращается в формулу Дюпюи.

Покажем в общих чертах, как, имея эту формулу в виде исходной, получить формулы для ряда других случаев расположения скважин.

Ранее была установлена связь между теорией функций комплексного переменного и теорией плоских фильтрационных потоков.

Эта связь позволяет каждую функцию $F(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ трактовать, как поле некоторого плоского движения.

Теперь заменим переменное и введем новое комплексное переменное $\zeta = \xi + i\eta$, связанное со старым переменным z соотношением $z = z(\zeta)$, где $z(\zeta)$ произвольная аналитическая функция.

Первое движение происходило на плоскости комплексного переменного z и характеризовалось комплексным потенциалом $F(z)$. Подставляя вместо $z = z(\zeta)$, получаем

$$F(z) = F[z(\zeta)] = F_1(\zeta),$$

где F_1 — новая функция.

Полученная из F функция F_1 определяет некоторый плоский фильтрационный поток на плоскости ζ. Очевидно, изучив первый поток F, можно легко изучить поток $F_1(\zeta)$.

Таким образом, задаваясь той или иной преобразующей функцией $z = z(\zeta)$, из одного потока $F(z)$ плоскости z можно получить бесчисленное множество других потоков на плоскости ζ. Как принято говорить в теории функций комплексного переменного, функция $z = z(\zeta)$ реализует конформное отображение плоскости z на плоскость ζ.

Для решения задач интерференции скважин в качестве исходного потока удобно взять рассмотренное выше течение к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте, являющееся вместе с тем, как было показано ранее, течением между равнодебитными источником и стоком.

Применение метода конформного отображения позволяет получить решения ряда задач интерференции скважин значительно быстрее, нежели методами, основанными на прямой суперпозиции источников и стоков.

Метод конформных отображений в настоящее время широко применяется во многих физических и технических задачах. Ряд примеров можно найти в книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [1]. К задачам гидротехнической фильтрации — расчетам обтекания подземных контуров плотин фильтрационным потоком — систематическое приложение метода конформных отображений было сделано впервые акад. Н. Н. Павловским [2]. При помощи этого метода удается решить ряд плоских задач напорной и безнапорной фильтраций. Подробное изложение и ряд примеров приведены в [Лт. II. 2, 3, 4, 5], а также ниже в § 3, 4.

§ 3. Вывод некоторых формул для притока к скважинам при помощи конформного отображения

Предположим, что на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ дано некоторое течение с комплексным потенциалом $F(z)$. Введем новое комплексное переменное $\zeta = \xi + i\eta$, связанное со старым переменным z зависимостью $z = z(\zeta)$ или $\zeta = \zeta(z)$.

Отделяя в функции $z = z(\zeta)$ действительную часть от мнимой, получаем

$$z(\zeta) = z(\xi + i\eta) = x(\xi, \eta) + iy(\xi, \eta),$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \\ \xi &= \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \end{aligned} \tag{III. 3. 1}$$

Уравнения (III. 3. 1) устанавливают соответствие между точками плоскостей ζ и z. В зависимости от того, однозначна или многозначна преобразующая функция $z = z(\zeta)$, каждой точке плоскости ζ соответствует одна или несколько точек плоскости z.

Точно так же каждой линии одной плоскости соответствует одна или несколько линий на другой плоскости. Таким образом, линиям тока и эквипотенциалям, т. е. сетке течения одной плоскости, будет соответствовать вполне определенная сетка течения на другой плоскости. При этом, разумеется, сами значения потенциала скорости Ф и функции тока Ψ будут одинаковыми на соответствующих друг другу линиях обеих плоскостей.

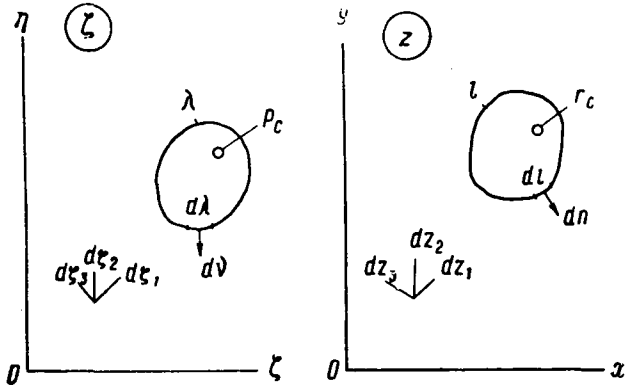


Рис. III. 4.

Производная $dz/d\zeta$ есть также некоторая функция комплексного переменного, вполне определенная в соответствующих друг другу точках обеих плоскостей z и ζ. Это означает по самому определению производной, что предел отношения

$$\lim_{\Delta\zeta\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta\zeta}=\lim_{\Delta\xi\to 0;\ \Delta\eta\to 0}\frac{\Delta x+i\,\Delta y}{\Delta\xi+i\,\Delta\eta}$$

не зависит от закона стремления к нулю отрезков $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$. Отсюда следует, что в каждой точке плоскости ζ и соответствующей (или соответствующих) ей точке плоскости z отношение соответствующих бесконечно малых отрезков dz и $d\zeta$ постоянно. Но из каждой точки плоскости ζ можно провести бесконечное множество отрезков $d\zeta_1$, $d\zeta_2$, ... Им будут соответствовать на плоскости z бесконечно малые отрезки dz_1, dz_2, ..., также исходящие из точки плоскости z, соответствующей рассматриваемой точке плоскости ζ (рис. III. 4).

Так как $\frac{dz}{d\zeta}$ в каждой точке есть вполне определенная величина, то

$$\frac{dz_1}{d\zeta_1}=\frac{dz_2}{d\zeta_2}=\frac{dz_3}{d\zeta_3}=\ldots \qquad \text{(III. 3. 2)}$$

Из (III. 3. 2) следует пропорция

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{d\zeta_1}{d\zeta_2}.$$

Аргумент дроби равен разности аргументов числителя и знаменателя. Но $\arg dz_1$ — это угол между направлениями элемента dz_1 и осью x.

Таким образом,

$$\arg dz_1 - \arg dz_2 = \arg d\zeta_1 - \arg d\zeta_2,$$

т. е. углы между отрезками dz_1, dz_2 и отрезками $d\zeta_1$, $d\zeta_2$ равны.

Поэтому преобразование $z(\zeta)$ или $\zeta(z)$ называется конформным, так как оно сохраняет подобие бесконечно малых элементов в соответствующих точках.

Пусть на плоскости z имеется скважина радиусом r_c.

На плоскости ζ ей будет соответствовать скважина радиусом ϱ_c, причем так как радиусы скважин обеих плоскостей можно считать очень малыми по сравнению с размерами областей течения, то на основании формулы (III. 3. 2)

$$r_c = \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| \varrho_c, \quad \varrho_c = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right| r_c. \tag{III. 3. 3}$$

Покажем теперь, что при конформном отображении дебиты скважин — стоков или источников — сохраняются на обеих плоскостях. Для этого окружим скважину на плоскости z произвольным замкнутым контуром l, которому на плоскости ζ будет соответствовать также замкнутый контур λ. Пусть dn и dl — элементы нормали и касательной для контура l на плоскости z и соответственно $d\nu$ и $d\lambda$ — для контура λ на плоскости ζ.

Тогда абсолютная величина дебита $|Q|$ скважины на плоскости z выразится интегралом по замкнутому контуру

$$|Q| = \oint \left|\frac{d\Phi}{dn}\right| |dl|, \tag{III. 3. 4}$$

так как $w_n = -\frac{d\Phi}{dn}$ — составляющая скорости фильтрации по нормали к контуру.

Но по смыслу конформного преобразования, сохраняющего подобие бесконечно малых элементов в соответствующих точках обеих плоскостей, согласно формуле (III. 3. 2) имеем

$$\begin{aligned} |dn| &= \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| |d\nu|, \\ |dl| &= \left|\frac{dz}{d\zeta}\right| |d\lambda|. \end{aligned} \tag{III. 3. 5}$$

Подставляя эти выражения в формулу (III. 3. 4), получаем

$$\oint \left|\frac{d\Phi}{dn}\right| |dl| = \oint \frac{d\Phi}{\left|\frac{dz}{d\zeta}\, d\nu\right|} \left|\frac{dz}{d\zeta}\, d\lambda\right|.$$

Сокращая на $\frac{dz}{d\zeta}$, будем иметь

$$\oint \left|\frac{d\Phi}{dn}\right| |dl| = \oint \left|\frac{d\Phi}{d\nu}\right| |d\lambda|. \quad \text{(III. 3. 6)}$$

В правой части формулы (III. 3. 6) согласно формуле (III. 3. 4) стоит абсолютная величина дебита скважины на плоскости ζ, равная абсолютному значению дебита скважины на плоскости z.

За исходный поток естественно принять простейший вид течения, например плоско-параллельное течение

$$F(z) = Az. \quad \text{(III. 3. 7)}$$

Пусть A — положительная и действительная постоянная. Отделяя действительную и мнимую части, получаем

$$F(z) = \Phi + i\Psi = A(x + iy),$$

откуда

$$\Phi = Ax, \quad \Psi = Ay. \quad \text{(III. 3. 8)}$$

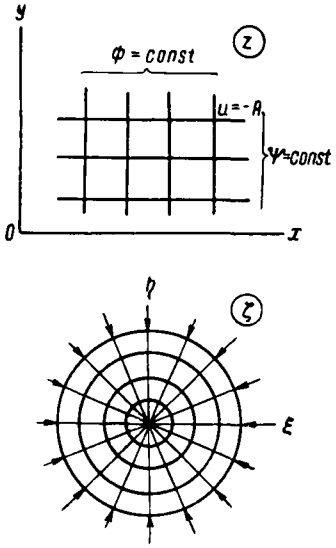


Рис. III. 5. Соответствие между эквипотенциалями и линиями тока при плоско-параллельном течении и притоке к точечному стоку на плоскости.

Таким образом, эквипотенциали $\Phi = Ax = \text{const}$ являются семейством прямых, параллельных оси y (рис. III. 5), а линии тока $\Psi = Ay = \text{const}$ — прямыми, параллельными оси x.

Проекции скорости фильтрации u, v равны

$$u = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -A,$$

$$v = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0. \quad \text{(III. 3. 9)}$$

Таким образом, характеристическая функция течения $F(z) = Az$ определяет плоско-параллельное течение в сторону отрицательной оси x с постоянной во всех точках скоростью $u = -A$.

Сделаем теперь замену переменного

$$z = \ln\zeta, \quad \text{(III. 3. 10)}$$

где $$\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}.$$

Здесь ρ, θ — полярные координаты на плоскости ζ.
Тогда

$$z = x + iy = \ln(\rho e^{i\theta}) = \ln\rho + i\theta, \qquad \text{(III.3.11)}$$

откуда, сравнивая действительные и мнимые части, получаем

$$x = \ln\rho, \quad y = \theta. \qquad \text{(III.3.12)}$$

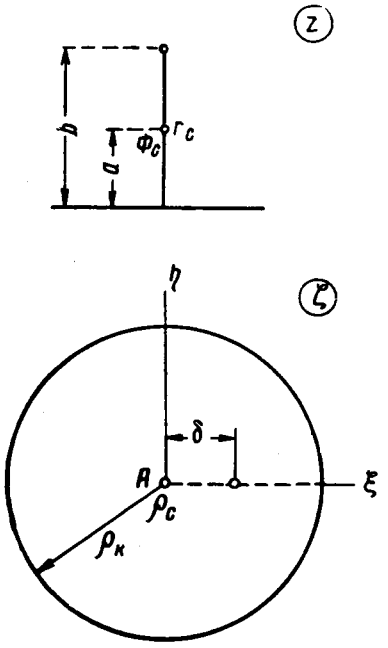


Рис. III. 6.

Прямым линиям $x = \text{const}$ плоскости z соответствуют на плоскости ζ кривые $\ln\rho = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, т. е. окружности с центром в начале координат, а прямым $y = \text{const}$ — лучи $\theta = \text{const}$ плоскости ζ (рис. III. 5).

Следовательно, сетке течения $\Phi = Ax = \text{const}$, $\Psi = Ay = \text{const}$ на плоскости z соответствует на плоскости ζ сетка течения $\rho = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$, т. е. при $A > 0$ приток к точечному стоку в начале координат с дебитом $q = 2\pi A$.

Рассмотрим задачу о притоке к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания и решим ее при помощи конформного отображения.

Возьмем за исходный поток приток к точечному стоку на плоскости ζ:

$$F(\zeta) = \frac{q}{2\pi}\ln\zeta + C, \qquad \text{(III.3.13)}$$

где C — произвольная константа.

Пусть на плоскости z в точке $x = 0$, $y = a$ находится скважина малого радиуса r_c, причем ось x является одной эквипотенциалью $\Phi = \Phi_к$, а окружность малого радиуса r_c — другой эквипотенциалью $\Phi = \Phi_c$ (рис. III. 6). На плоскости z мы имеем приток к скважине в полубесконечном пласте с прямолинейным контуром питания.

Если удастся найти преобразование $\zeta = \zeta(z)$ или обратное $z = z(\zeta)$, которое реализует конформное отображение верхней полуплоскости z в круг $\rho = \rho_к$ плоскости ζ, а точку $z_c = ia$ плоскости z, где расположен центр скважины радиусом r_c, в начало координат $\zeta = 0$ плоскости ζ, то задача будет решена.

Это и другие преобразования, которые нам потребуются ниже, приведены в любом учебнике по теории функций комплексного переменного и являются простейшими примерами конформных отображений.

В нашем случае искомое преобразование имеет вид:

$$\zeta = \varrho_к \frac{z - ia}{z + ia}. \qquad \text{(III. 3. 14)}$$

Действительно, полагая $z = ia$, из формулы (III. 3. 14) получаем $\zeta = 0$, т. е. центру скважины на плоскости z соответствует начало координат $\zeta = 0$ на плоскости ζ.

Точки вещественной оси x плоскости z переходят в точки окружности $\varrho = \varrho_к$ плоскости ζ. Действительно, полагая в формуле (III. 3. 14) $z = x$ — любому вещественному числу, имеем

$$\zeta = \varrho_к \frac{x - ia}{x + ia} = \varrho_к \frac{\sqrt{x^2 + a^2}\, e^{-i \operatorname{arctg} \frac{a}{x}}}{\sqrt{x^2 + a^2}\, e^{i \operatorname{arctg} \frac{a}{x}}} = \varrho_к e^{-i\, 2 \operatorname{arctg} \frac{a}{x}}, \qquad \text{(III. 3. 15)}$$

откуда следует $|\zeta| = \varrho_к$.

Таким образом, действительная ось $z = x$ перешла в окружность $\varrho_к$ плоскости ζ, а точка верхней полуплоскости $z = ia$ в начало координат $\zeta = 0$. Отсюда ясно, что формула (III. 3. 14) и есть нужное нам преобразование. Радиусы скважин обеих плоскостей согласно формуле (III. 3. 3) связаны соотношением

$$\varrho_с = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| r_с.$$

Отсюда согласно (III. 3. 14) получаем

$$\varrho_с = \varrho_к \left| \frac{(z + ia) - (z - ia)}{(z + ia)^2} \right|_{z = ia} r_с = \varrho_к \left| \frac{2ia}{(2ia)^2} \right| r_с = \frac{\varrho_к}{2a} r_с. \qquad \text{(III. 3. 16)}$$

Для комплексного потенциала на плоскости z получаем

$$F[\zeta(z)] = F_1(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \varrho_к \frac{z - ia}{z + ia} + C =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z - ia}{z + ia} + C', \qquad \text{(III. 3. 17)}$$

где C' — новая константа, равная

$$C' = C + \frac{q}{2\pi} \ln \varrho_к. \qquad \text{(III. 3. 18)}$$

Для дебита согласно формуле Дюпюи имеем

$$q = \frac{2\pi (\Phi_к - \Phi_с)}{\ln \frac{\varrho_к}{}}.$$

Подставляя сюда ϱ_c из формулы (III.3.16), получаем

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln \frac{\varrho_к 2a}{\varrho_к r_c}} = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln \frac{2a}{r_c}}. \qquad \text{(III.3.19)}$$

Покажем теперь, как из формулы (III.3.19) получить дебит скважины, эксцентрично расположенной в круговом пласте.

Возьмем то же преобразование (III.3.14)

$$\zeta = \varrho_к \frac{z - ia}{z + ia},$$

но предположим теперь, что на плоскости z центр скважины радиусом r_c расположен не в точке $x = 0$, $y = a$, как раньше, а в другой точке C мнимой оси $x = 0$, $y = b$, причем $b \neq a$ (рис. III.6).

Нетрудно видеть, что точкам $z = iy$, $y > 0$ мнимой оси плоскости z соответствуют точки действительной оси ζ, расположенные на действительном диаметре окружности $\varrho_к$, $-\varrho_к \leqslant \xi \leqslant \varrho_к$, $\eta = 0$. Действительно, полагая в формуле (III.3.14) $z = iy$, имеем

$$\zeta = \varrho_к \frac{iy - ia}{iy + ia} = \varrho_к \frac{y - a}{y + a}, \qquad \text{(III.3.20)}$$

откуда следует, что при изменении y в пределах $0 \leqslant y \leqslant \infty$ ξ изменяется в пределах $-\varrho_к \leqslant \xi \leqslant \varrho_к$, $\eta = 0$.

Центру скважины C плоскости z ($x = 0$, $y = b$) на плоскости ζ будет соответствовать точка C:

$$\xi_C = \delta = \varrho_к \frac{b - a}{b + a}, \qquad \text{(III.3.21)}$$

т. е. на плоскости ζ скважина будет расположена эксцентрично.

Радиусу r_c согласно формуле (III.3.3) соответствует радиус ϱ_c:

$$\varrho_c = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{\substack{x=0\\y=b}} r_c = \varrho_к \left|\frac{(z+ia)-(z-ia)}{(z+ia)^2}\right|_{\substack{x=0\\y=b}} r_c =$$

$$= \varrho_к \left|\frac{2ia}{(ib+ia)^2}\right| r_c = \frac{2a\varrho_к}{(b+a)^2} r_c. \qquad \text{(III.3.22)}$$

Пусть на плоскости ζ заданы ϱ_c и δ.

Выражая из (III.3.21) b через δ, а радиус r_c через ϱ_c, получаем

$$b - a = \frac{\delta}{\varrho_к}(b + a),$$

$$b = a \frac{1 + \frac{\delta}{\varrho_к}}{1 - \frac{\delta}{\varrho_к}}, \qquad \text{(III.3.23)}$$

$$(b+a)^2 = \left(a\,\frac{1+\delta/\varrho_к}{1-\delta/\varrho_к} + a\right)^2 = \frac{4a^2}{\left(1-\frac{\delta}{\varrho_к}\right)^2},$$

$$r_c = \frac{(b+a)^2\,\varrho_c}{2a\,\varrho_к} = \frac{4a^2}{\left(1-\frac{\delta}{\varrho_к}\right)^2}\,\frac{\varrho_c}{2a\,\varrho_к} = \frac{2a}{\left(1-\frac{\delta}{\varrho_к}\right)^2}\,\frac{\varrho_c}{\varrho_к}. \quad \text{(III. 3. 24)}$$

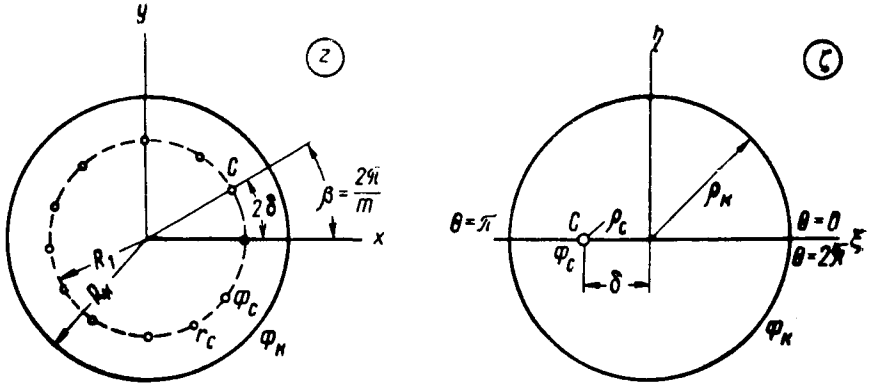


Рис. III. 7.

Если на плоскости z скважина отстоит от действительной оси не на расстоянии a, как раньше, а на расстоянии b, то, очевидно, сохранит силу формула (III. 3. 19), в которую вместо a нужно подставить b:

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln\frac{2b}{r_c}}. \quad \text{(III. 3. 25)}$$

Заменяя b и r_c согласно формулам (III. 3. 23) и (III. 3. 24), получаем из формулы (III. 3. 25) формулу для дебита скважины радиусом ϱ_c, эксцентрично расположенной в круговом пласте радиусом $\varrho_к$ на расстоянии δ от центра круга (рис. III. 6):

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln\left[2a\,\frac{1+\delta/\varrho_к}{1-\delta/\varrho_к}\,\frac{(1-\delta/\varrho_к)^2}{2a}\,\frac{\varrho_к}{\varrho_c}\right]} = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln\left[\frac{\varrho_к}{\varrho_c}\left(1-\frac{\delta^2}{\varrho_к^2}\right)\right]}. \quad \text{(III. 3. 26)}$$

Формула (III. 3. 26) совпадает с формулой (III. 2. 21), выведенной другим путем.

Выведем теперь, исходя из формулы (III. 3. 26), формулу для дебита скважин в круговой батарее из m равнодебитных скважин (рис. III. 7).

Пусть на плоскости z в пласте радиусом $R_к$ вдоль окружности радиусом R_1 расположено m равнодебитных скважин в вершинах

правильного m-угольника; радиусы скважин r_c, забойные потенциалы Φ_c.

Согласно симметрии достаточно рассмотреть приток к одной скважине в секторе с центральным углом $\beta = 2\pi/m$.

Возьмем преобразование

$$\zeta = z^m. \tag{III.3.27}$$

Полагая $z = re^{i\varphi}$ и $\zeta = \varrho e^{i\theta}$, получаем

$$\varrho = r^m,$$

$$\theta = m\varphi. \tag{III.3.28}$$

Таким образом, преобразование (III.3.27) переведет угол $\frac{2\pi}{m} = \beta$ плоскости z в угол $m\beta = 2\pi$ на плоскости ζ, т. е. развернет угол β плоскости z в окружность.

Согласно формуле (III.3.28) центру скважины $r = R_1$ на плоскости ζ будет соответствовать $\varrho = R_1^m$.

Радиус скважины ϱ_c согласно формуле (III.3.3) равен

$$\varrho_c = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_c} r_c = mR_1^{m-1}r_c. \tag{III.3.29}$$

Радиус окружности $\varrho_к$ согласно формуле (III.3.27) равен

$$\varrho_к = R_к^m. \tag{III.3.30}$$

Таким образом, на плоскости ζ получается течение к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте $\varrho_к = R_к^m$ на расстоянии $\delta = R_1^m$ от центра.

Дебит скважины согласно формуле (III.3.26) после замены значений ϱ_c, $\varrho_к$, δ равен

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln\left[\frac{R_к^m}{mR_1^{m-1}r_c}\left(1 - \frac{R_1^{2m}}{R_к^{2m}}\right)\right]}. \tag{III.3.31}$$

При числе скважин в батарее $m \geqslant 5$ обычно член $\left(\frac{R_1}{R_к}\right)^{2m} \ll 1$ и формула (III.3.31) упрощается:

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{m\ln\frac{R_к}{R_1} + \ln\frac{R_1}{mr_c}}. \tag{III.3.32}$$

Формула для дебита скважины в прямолинейной бесконечной цепочке (рис. III. 8) получается при помощи преобразования

$$\zeta = \varrho_к e^{\frac{i\pi z}{\sigma}}. \qquad (III.3.33)$$

Положим $z = x + iy$. Тогда

$$\zeta = \varrho_к e^{\frac{i\pi}{\sigma}(x+iy)} = \varrho_к e^{-\frac{\pi y}{\sigma}} e^{i\frac{\pi x}{\sigma}},$$

откуда

$$\varrho = \varrho_к e^{-\frac{\pi y}{\sigma}}, \quad \theta = \frac{\pi x}{\sigma}. \qquad (III.3.34)$$

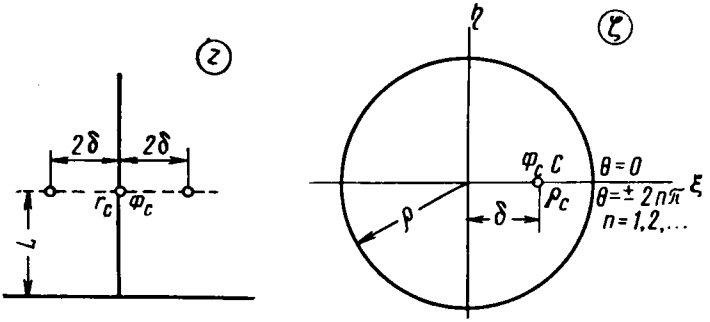


Рис. III. 8.

Из формулы (III. 3. 34) следует, что действительная ось $y = 0$ плоскости z переходит в окружность $\varrho = \varrho_к$ плоскости ζ.

Центры цепочки скважин с координатами $x = \pm 2\sigma n$, $y = L$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ согласно формуле (III. 3. 34) перейдут в одну и ту же точку C на плоскости ζ с координатами

$$\varrho = \varrho_к e^{-\frac{\pi L}{\sigma}}, \quad \theta = \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (III.3.35)$$

Радиус скважины на плоскости ζ согласно формуле (III. 3. 3) равен

$$\varrho_c = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=z_c} r_c = \varrho_к \frac{\pi}{\sigma} e^{-\frac{\pi L}{\sigma}} r_c. \qquad (III.3.36)$$

Дебит одной скважины получаем из формулы (III. 3. 26), в которой согласно (III. 3. 35) полагаем $\delta = \varrho_к e^{-\frac{\pi L}{\sigma}}$:

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln\left[\frac{\varrho_к \sigma}{\pi \varrho_к r_c} e^{\frac{\pi L}{\sigma}}\left(1 - \frac{\varrho_к^2 e^{-\frac{2\pi L}{\sigma}}}{\varrho_к^2}\right)\right]} = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln\left(\frac{2\sigma}{\pi r_c}\operatorname{sh}\frac{\pi L}{\sigma}\right)}. \qquad (III.3.37)$$

Если, как обычно можно считать, $e^{-\frac{2\pi L}{\sigma}} \ll 1$, вместо формулы (III.3.37) получаем с достаточной точностью

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\frac{\pi L}{\sigma} + \ln\frac{\sigma}{\pi r_с}}. \qquad \text{(III.3.38)}$$

§ 4. Течение между конфокальными эллипсами

Этот случай может представить интерес для течения в пластах овальной формы.

Возьмем функцию Н. Е. Жуковского

$$z = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \qquad \text{(III.4.1)}$$

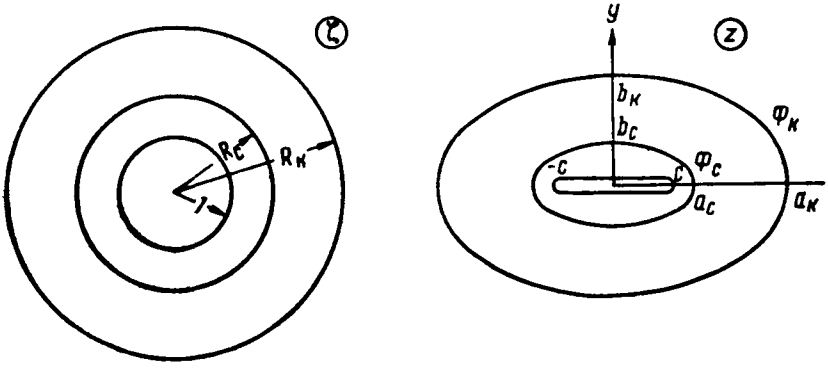


Рис. III. 9.

где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad \text{(III.4.2)}$$

есть фокусное расстояние (рис. III. 9). Как известно, эта функция переводит контур эллипса плоскости z в окружность радиуса $R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$ плоскости ζ, а разрез, соединяющий фокусы, — в окружность единичного радиуса.

Из формулы Дюпюи получим

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\ln\frac{R}{1}} = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\ln\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_с)}{\ln\frac{a+b}{c}}. \qquad \text{(III.4.3)}$$

Здесь Φ_c — потенциал на краях разреза. Если потенциалы $\Phi_к$ и Φ_c заданы на контурах двух конфокальных эллипсов с полуосями $a_к$, $b_к$, a_c, b_c, то, очевидно,

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln \dfrac{\sqrt{\dfrac{a_к + b_к}{a_к - b_к}}}{\sqrt{\dfrac{a_c + b_c}{a_c - b_c}}}} = \frac{4\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln \dfrac{(a_к + b_к)(a_c - b_c)}{(a_к - b_к)(a_c + b_c)}}. \qquad \text{(III. 4. 4)}$$

При этом полуоси обоих эллипсов связаны соотношениями $c^2 = a_к^2 - b_к^2 = a_c^2 - b_c^2$. Отсюда

$$q = \frac{4\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln \dfrac{(a_к + b_к)^2}{c^2} \dfrac{c^2}{(a_c + b_c)^2}} = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln \dfrac{a_к + b_к}{a_c + b_c}} \qquad \text{(III. 4. 5)}$$

или

$$q = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\ln \dfrac{R'_к}{R'_c}}, \quad R'_к = \frac{a_к + b_к}{2}, \quad R'_c = \frac{a_c + b_c}{2}. \qquad \text{(III. 4. 6)}$$

Таким образом, приток между конфокальными эллипсами можно рассчитывать по формуле Дюпюи для кругового пласта радиусом $R'_к$ с центральной скважиной радиусом R'_c, причем величины этих радиусов согласно (III. 4. 6) равны полусуммам полуосей эллипсов.

Укажем, что некоторые точные решения задачи о притоке к разрезам в пласте круговой формы, получающиеся в эллиптических функциях, приведены в работе Ф. Е. Четина [6].

§ 5. Приток к скважинам в пласте овальной формы

Точное решение задачи о притоке к скважине в эллиптическом пласте дано П. Я. Полубариновой-Кочиной при помощи конформного отображения эллипса на круг [Лт. II. 2].

Более удобный для практических целей способ заключается в том, что круг конформно отображается в какой-либо овал, не обязательно эллипс, с заданными полуосями.

Поскольку решена задача о притоке жидкости к скважинам, расположенным в круговой залежи, тем самым будет решена задача для скважин, расположенных в овальной залежи. Функций, преобразующих круг в овал, можно подобрать очень много. Остановимся на следующем способе подбора. Возьмем на плоскости z двуугольник $ABCDA$, образованный двумя равными пересекающимися кругами (рис. III. 10, *а*), и отобразим его при помощи надлежащей функции $\zeta(z)$ в круг единичного радиуса $\varrho = 1$ плоскости ζ. Тогда круг радиуса $\varrho < 1$ отобразится в овал L, внутри которого ζ не будет иметь особенностей. Овал L и примем за контур пласта.

Функция, преобразующая двуугольник $ABCDA$ в единичный круг, имеет вид:

$$\zeta = \frac{1-\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\varkappa}}{1+\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\varkappa}}, \qquad \text{(III. 5. 1)}$$

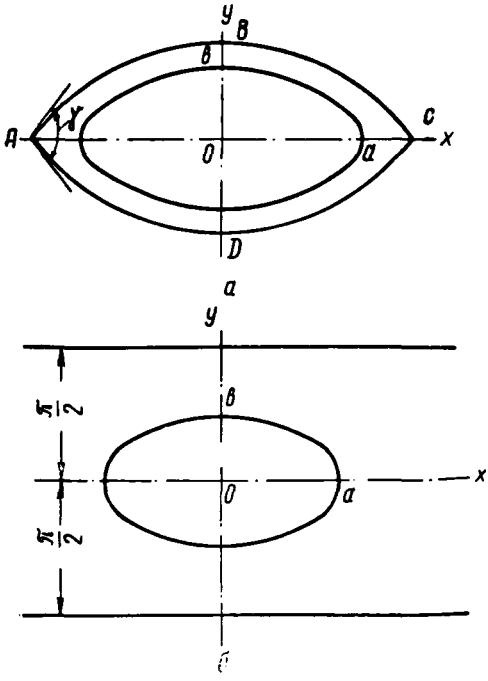


Рис. III. 10.

где принято

$$OA = -1, \quad OC = 1.$$

$$\varkappa = \frac{\pi}{\gamma}, \qquad \text{(III. 5. 2)}$$

γ — угол пересечения окружностей.

Вместо двуугольника можно еще взять на плоскости z полосу шириной π (рис. III. 10, *б*) и отобразить ее в единичный круг. Тогда кругам $\varrho < 1$ будут соответствовать также овалы. Функция, преобразующая полосу шириной π в единичный круг, имеет вид:

$$\zeta = \operatorname{th}\frac{z}{2}. \qquad \text{(III. 5. 3)}$$

Имея решение задачи для круга, тем самым получаем при помощи формул (III. 5. 1) или (III. 5. 3) решение задачи для овалов. Для пересчета скоростей и радиусов скважин нужно знать значения производной $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$.

После вычисления получим

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{4\varkappa(1-z^2)^{\varkappa-1}}{[(1+z)^{\varkappa}+(1-z)^{\varkappa}]^2}, \qquad \text{(III. 5. 4)}$$

откуда, учитывая (III. 5. 1), будем иметь

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{1-z^2}{1-\zeta^2}, \qquad \text{(III. 5. 5)}$$

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right| = \varkappa \sqrt{\frac{(1-\xi)^2+\eta^2}{(1-x)^2+y^2}\,\frac{(1+\xi)^2+\eta^2}{(1+x)^2+y^2}}. \qquad \text{(III. 5. 6)}$$

Отделяя в (III. 5. 1) действительную и мнимую части, найдем

$$\zeta = \varrho\, e^{-i\theta}, \qquad \text{(III. 5. 7)}$$

$$\varrho=\frac{\sqrt{[1-(x_1^2+y_1^2)]^2+4y_1^2}}{(1+x_1)^2+y_1^2},\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{2y_1}{1-(x_1^2+y_1^2)},$$

$$x_1=r_1^{\varkappa}\cos\varkappa\theta_1,\quad y_1=-r_1^{\varkappa}\sin\varkappa\theta_1, \tag{III. 5. 8}$$

$$r_1=\frac{\sqrt{[1-(x^2+y^2)]^2+4y^2}}{(1+x)^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\theta_1=\frac{2y}{1-(x^2+y^2)},$$

$$z=x+iy=re^{i\varphi}.$$

Формулы (III. 5. 8) дают возможность определить точку плоскости ζ, соответствующую заданной точке плоскости z. Наоборот, если нужно найти точку плоскости z, соответствующую заданной точке плоскости ζ, то, решая (III. 5. 1) относительно z и отделяя затем действительную и мнимую части, получаем

$$z=re^{i\varphi}; \tag{III. 5. 9}$$

$$r=\frac{\sqrt{(1-\varrho_2^2)^2+4\varrho_2^2\sin^2\theta_2}}{1+2\varrho_2\cos\theta_2+\varrho_2^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{2\varrho_2\sin\theta_2}{1-\varrho_2^2},$$

$$\varrho_2=\varrho_1^{\frac{1}{\varkappa}},\quad \theta_2=\frac{\theta_1}{\varkappa};\quad \varrho_1=\frac{\sqrt{(1-\varrho^2)^2+4\varrho^2\sin^2\theta}}{1+2\varrho\cos\theta+\varrho^2},$$

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{2\varrho\sin\theta}{1-\varrho^2},\quad \zeta=\xi+i\eta=\varrho e^{i\theta}. \tag{III. 5. 10}$$

Для практических расчетов нужно определить $\varrho_к$ и $\varkappa$, соответствующие контуру L овальной формы с полуосями a и b (рис. 3. 10, $а$). Из (III. 5. 1) и (III. 5. 8) получаем после простых вычислений

$$\varrho_к=\frac{1-\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\varkappa}}{1+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\varkappa}}=\operatorname{tg}\left(\frac{\varkappa}{2}\operatorname{arctg}\frac{2b}{1-b^2}\right) \tag{III. 5. 11}$$

или, что то же самое,

$$\varrho_к=\operatorname{th}\left(\frac{\varkappa}{2}\ln\frac{1+a}{1-a}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\varkappa}{2}\operatorname{arctg}\frac{2b}{1-b^2}\right). \tag{III. 5. 12}$$

Из этих двух уравнений определяются $\varrho_к$ и $\varkappa$. Напомним, что здесь должно быть $a>b$ и большая полуось двуугольника принята за единицу. Малая полуось двуугольника $OB=OD$, как легко показать, определяется из уравнения

$$OB=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{4}. \tag{III. 5. 13}$$

Заметим, что для заданного отношения $\frac{b}{a}$ величину a можно выбирать произвольно, но, конечно, $a<1$. При этом будут получаться различные овалы с одним и тем же отношением осей. Для функции (III. 5. 3) аналогичным образом получим

$$\frac{d\zeta}{dz}=\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{th}^2\frac{z}{2}\right), \tag{III. 5. 14}$$

$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{[(1-\xi)^2+\eta^2]\,[(1+\xi)^2+\eta^2]}. \tag{III. 5. 15}$$

Отделяя в (III. 5. 3) действительную и мнимую части, найдем

$$\zeta = \xi + i\,\eta,$$

$$\xi = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x + \cos y}\,,\quad \eta = \frac{\sin y}{\operatorname{ch} x + \cos y}\,. \tag{III. 5. 16}$$

Обратное определение z по известной ζ проще всего сделать следующим образом. Так как разрешение уравнений (III. 5. 16) относительно x и y очень громоздко, то (III. 5. 3) представим в виде

$$\zeta = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}\,,$$

откуда

$$e^z = \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\,. \tag{III. 5. 17}$$

Полагая далее

$$\zeta = \varrho\, e^{i\theta},$$

из (III. 5. 17) получаем

$$e^z = R\, e^{i\Phi}, \tag{III. 5. 18}$$

где

$$R = \frac{\sqrt{(1-\varrho^2)^2 + 4\varrho^2 \sin^2\theta}}{1 - 2\varrho\cos\theta + \varrho^2}\,,$$

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{2\varrho\sin\theta}{1-\varrho^2}\,. \tag{III. 5. 19}$$

Отсюда

$$x = \ln R,\ y = \Phi\ \left(-\frac{\pi}{2} < \Phi < \frac{\pi}{2}\right). \tag{III. 5. 20}$$

Дальнейшие расчеты ведутся по формулам для кругового пласта.

§ 6. Приток к скважинам в круговом пласте при переменном давлении на контуре питания.

Обычно интерференция скважин рассчитывается для случая постоянного давления на контуре питания. Иногда оказывается необходимым рассмотреть эту задачу при переменном давлении на контуре питания.

Возьмем круговой пласт радиусом $\varrho_к$ с переменным контурным давлением $p_к = p_к(\theta)$, внутри которого расположено N скважин с заданными дебитами. Требуется найти распределение потенциала внутри пласта.

Рассмотрим сначала случай постоянного контурного давления (и, следовательно, потенциала $\Phi_к = \text{const}$), когда в пласте имеется одна эксцентрично расположенная скважина (см. рис. III. 6). Распределение потенциала на плоскости ζ для случая одной скважины, эксцентрично расположенной в круговом пласте, можно получить следующим образом. На плоскости z центр скважины находится в точке $z_c = ib$ и комплексный потенциал течения в пласте с прямолинейным контуром питания выражается уравнением (опуская аддитивную константу)

$$F(z) = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{z-ib}{z+ib}\,. \tag{III. 6. 1}$$

Преобразование, даваемое формулой (III. 3. 14), связывающее точки плоскостей z и ζ, переводит точку $z = ia$ в точку $\zeta = 0$, а точку $z = ib$ в точку $\zeta = \delta$, причем b и δ связаны формулой (III. 3. 23). Величина a является параметром преобразования и может быть выбрана произвольно. Выразим теперь при помощи (III. 3. 14) z через ζ:

$$z = ia\frac{\varrho_к + \zeta}{\varrho_к - \zeta}. \qquad \text{(III. 6. 2)}$$

Для нахождения комплексного потенциала на плоскости ζ значения z из формулы (III. 6. 2) и b из формулы (III. 3. 23) подставим в формулу (III. 6. 1):

$$F[z(\zeta)] = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{ia\dfrac{\varrho_к+\zeta}{\varrho_к-\zeta} - ia\dfrac{\varrho_к+\delta}{\varrho_к-\delta}}{ia\dfrac{\varrho_к+\zeta}{\varrho_к-\zeta} + ia\dfrac{\varrho_к+\delta}{\varrho_к-\delta}} =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\ln\frac{(\varrho_к+\zeta)(\varrho_к-\delta)-(\varrho_к-\zeta)(\varrho_к+\delta)}{(\varrho_к+\zeta)(\varrho_к-\delta)+(\varrho_к-\zeta)(\varrho_к+\delta)}$$

или

$$F[z(\zeta)] = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{\varrho_к^2+\zeta\varrho_к-\varrho_к\delta-\zeta\delta-\varrho_к^2+\zeta\varrho_к-\varrho_к\delta+\zeta\delta}{\varrho_к^2+\zeta\varrho_к-\varrho_к\delta-\zeta\delta+\varrho_к^2-\zeta\varrho_к+\varrho_к\delta-\zeta\delta} =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\ln\frac{\varrho_к(\zeta-\delta)}{\varrho_к^2-\zeta\delta}. \qquad \text{(III. 6. 3)}$$

Формула (III. 6. 3) может быть интерпретирована следующим образом:

$$F[z(\zeta)] = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{\varrho_к(\zeta-\delta)\,e^{i\pi}}{\delta\left(\zeta-\dfrac{\varrho_к^2}{\delta}\right)} = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{\zeta-\delta}{\zeta-\dfrac{\varrho_к^2}{\delta}} + \text{const}, \qquad \text{(III. 6. 4)}$$

где

$$\text{const} = \frac{q}{2\pi}\ln\frac{\varrho_к e^{i\pi}}{\delta}.$$

Слагаемое $\frac{q}{2\pi}\ln(\zeta-\delta)$ — комплексный потенциал скважины-стока, помещенной в точке $\zeta=\delta$ в неограниченном пласте.

Слагаемое $-\frac{q}{2\pi}\ln\left(\zeta-\frac{\varrho_к^2}{\delta}\right)$ — комплексный потенциал равнодебитной скважины-источника, находящейся в точке $\zeta=\frac{\varrho_к^2}{\delta}$ (точка C', рис. III. 11). Присуперпозиции этих двух скважин: одной реальной — скважины-стока, находящейся в точке $\zeta=\delta$, и другой фиктивной — скважины-источника, находящейся на продолжении того же радиуса в точке $\zeta=\frac{\varrho_к^2}{\delta}$ (так называемое преобразование инверсии), окружность $|\zeta|=\varrho_к$ оказывается эквипотенциалью-изобарой.

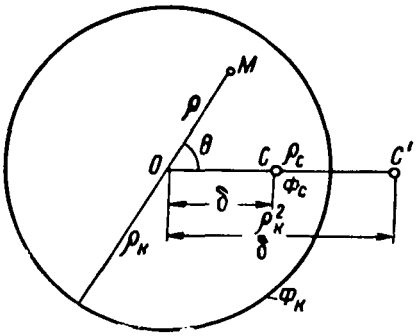


Рис. III. 11.

Отделяя в формуле (III. 6. 4) действительную часть, прибавляя аддитивную константу и полагая $\zeta = \varrho e^{i\theta} = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$, найдем распределение потенциала:

$$\Phi = \Phi(\varrho, \theta) = \operatorname{Re}\frac{q}{2\pi}\ln\frac{\zeta - \delta}{\zeta - \frac{\varrho_к^2}{\delta}} = \operatorname{Re}\frac{q}{2\pi}\ln\frac{\varrho(\cos\theta + i\sin\theta) - \delta}{\varrho(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{\varrho_к^2}{\delta}} =$$

$$= \frac{q}{4\pi}\ln\frac{(\varrho\cos\theta - \delta)^2 + \varrho^2\sin^2\theta}{\left(\varrho\cos\theta - \frac{\varrho_к^2}{\delta}\right)^2 + \varrho^2\sin^2\theta} + C =$$

$$= \frac{q}{4\pi}\ln\frac{\varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\theta}{\varrho^2 + \frac{\varrho_к^4}{\delta^2} - 2\varrho\frac{\varrho_к^2}{\delta}\cos\theta} + C. \qquad \text{(III. 6. 5)}$$

Постоянную C определяем из условия $\Phi = \Phi_к$ при $\varrho = \varrho_к$:

$$\Phi_к = \frac{q}{4\pi}\ln\frac{\varrho_к^2 + \delta^2 - 2\varrho_к\delta\cos\theta}{\varrho_к^2 + \frac{\varrho_к^4}{\delta^2} - 2\varrho_к\frac{\varrho_к^2}{\delta}\cos\theta} + C =$$

$$= \frac{q}{4\pi}\ln\frac{\varrho_к^2 + \delta^2 - 2\varrho_к\delta\cos\theta}{\frac{\varrho_к^2}{\delta^2}(\delta^2 + \varrho_к^2 - 2\varrho_к\delta\cos\theta)} + C = \frac{q}{4\pi}\ln\frac{\delta^2}{\varrho_к^2} + C,$$

откуда

$$C = \Phi_к + \frac{q}{4\pi}\ln\frac{\varrho_к^2}{\delta^2}.$$

Подставляя это значение C в формулу (III. 6. 5), получаем

$$\Phi = \Phi_к + \frac{q}{4\pi}\ln\frac{(\varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\theta)\,\varrho_к^2}{\left(\varrho^2 + \frac{\varrho_к^4}{\delta^2} - 2\varrho\frac{\varrho_к^2}{\delta}\cos\theta\right)\delta^2} =$$

$$= \Phi_к + \frac{q}{4\pi}\ln\frac{\varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\theta}{\frac{\delta^2\varrho^2}{\varrho_к^2} + \varrho_к^2 - 2\varrho\delta\cos\theta}. \qquad \text{(III. 6. 6)}$$

Формула (III. 6. 6) получена для случая, когда центр скважины лежит на полярной оси. Пусть теперь полярные координаты центра скважины будут δ и α. Повернем ось x на угол α и введем новый полярный угол θ' (рис. III. 12). Очевидно, угол θ' и старый угол θ связаны соотношением $\theta' = \theta - \alpha$. Тогда согласно формуле (III. 6. 6)

$$\Phi = \Phi_к + \frac{q}{4\pi}\ln\frac{\varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos\theta'}{\frac{\delta^2\varrho^2}{\varrho_к^2} + \varrho_к^2 - 2\varrho\delta\cos\theta'} =$$

$$= \Phi_к + \frac{q}{4\pi}\ln\frac{\varrho^2 + \delta^2 - 2\varrho\delta\cos(\theta - \alpha)}{\frac{\delta^2\varrho^2}{\varrho_к^2} + \varrho_к^2 - 2\varrho\delta\cos(\theta - \alpha)}. \qquad \text{(III. 6. 7)}$$

Формула (III. 6. 7) легко обобщается для многих скважин, расположенных в круговом пласте радиусом $\varrho_к$ с постоянным контурным давлением $p_к$. Пусть N скважин с дебитами q_1, q_2,... расположены в точках с полярными координатами δ_1, α_1; δ_2, α_2,...

Потенциал результирующего течения получится суммированием выражений (III. 6. 7):

$$\Phi = \Phi_к + \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N} q_i \ln \frac{\varrho^2 + \delta_i^2 - 2\varrho\delta_i \cos(\theta - \alpha_i)}{\frac{\delta_i^2 \varrho^2}{\varrho_к^2} + \varrho_к^2 - 2\varrho\delta_i \cos(\theta - \alpha_i)}. \qquad \text{(III. 6. 8)}$$

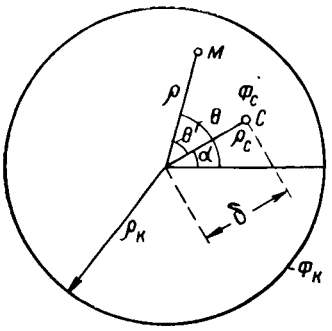


Рис. III. 12.

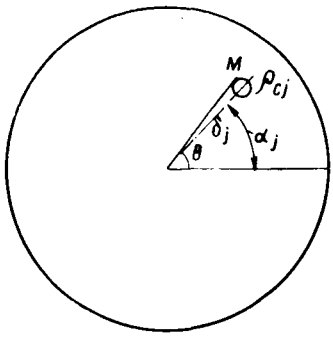


Рис. III. 13.

Перейдем теперь к более общему случаю, когда контурный потенциал $\Phi_к$ переменный и является известной функцией полярного угла θ.

Непосредственное применение формулы (III. 6. 8) не приведет к цели, так как согласно (III. 6. 8) при $\varrho = \varrho_к$ контурный потенциал $\Phi_к$ постоянный ($\Phi_к = \text{const}$) вместо того, чтобы обратиться в заданную функцию угла θ.

Для решения задачи возьмем сумму

$$\Phi(\varrho, \theta) = \overline{\Phi}_к + \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N} q_i \ln \frac{\varrho^2 + \delta_i^2 - 2\varrho\delta_i \cos(\theta - \alpha_i)}{\frac{\delta_i^2 \varrho^2}{\varrho_к^2} + \varrho_к^2 - 2\varrho\delta_i \cos(\theta - \alpha_i)} + \varphi(\varrho, \theta), \qquad \text{(III. 6. 9)}$$

где $\overline{\Phi}_к$ — средний потенциал по периметру $\varrho = \varrho_к$ (постоянная составляющая):

$$\overline{\Phi}_к = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi_к(\theta)\, d\theta, \qquad \text{(III. 6. 10)}$$

а $\varphi(\varrho, \theta)$ — новая неизвестная функция, удовлетворяющая, как и потенциал Φ, уравнению Лапласа.

Функция $\varphi(\varrho, \theta)$ внутри круга не имеет логарифмических особенностей и обязана своим происхождением переменной составляющей контурного потенциала $\Phi_к(\theta)$.

Всякую периодическую функцию можно представить в виде ряда Фурье [7]

$$\Phi_к(\theta)=\Phi_к+\sum_{n=1}^{\infty}(\Phi_n\cos n\theta+\Phi'_n\sin n\theta), \qquad (III.6.11)$$

где коэффициенты Φ_n и Φ'_n определяются из формул

$$\Phi_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_к(\theta)\cos n\theta\,d\theta, \qquad \Phi'_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_к(\theta)\sin n\theta\,d\theta. \qquad (III.6.12)$$

Эти коэффициенты всегда могут быть определены аналитически или численно. Очевидно, если потребовать, чтобы функция $\varphi(\varrho,\theta)$ на окружности $\varrho=\varrho_к$ обращалась в переменную составляющую ряда (III.6.11)

$$\varphi(\varrho_к,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(\Phi_n\cos n\theta+\Phi'_n\sin n\theta), \qquad (III.6.13)$$

то согласно формулам (III.6.9) и (III.6.11) задача будет решена.

Таким образом, функция $\varphi(\varrho,\theta)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа, должна быть найдена внутри круга $\varrho=\varrho_к$ по ее известному значению на окружности $\varrho=\varrho_к$, которое дается формулой (III.6.13) — это задача Дирихле для круга. Решение ее хорошо известно и приведено во многих руководствах по математическому анализу [7]. Оно имеет вид:

$$\varphi(\varrho,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(\Phi_n\cos n\theta+\Phi'_n\sin n\theta)\left(\frac{\varrho}{\varrho_к}\right)^n. \qquad (III.6.14)$$

Таким образом, согласно формулам (III.6.9) и (III.6.14) потенциал $\Phi=\Phi(\varrho,\theta)$ определяется уравнением

$$\Phi=\Phi(\varrho,\theta)=\overline{\Phi}_к+\sum_{n=1}^{\infty}(\Phi_n\cos n\theta+\Phi'_n\sin n\theta)\left(\frac{\varrho}{\varrho_к}\right)^n+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}q_i\ln\frac{\varrho^2+\delta_i^2-2\varrho\delta_i\cos(\theta-\alpha_i)}{\dfrac{\delta_i^2\varrho^2}{\varrho_к^2}+\varrho_к^2-2\varrho\delta_i\cos(\theta-\alpha_i)}. \qquad (III.6.15)$$

Если заданы забойные потенциалы Φ_{ci} на скважинах радиусами ϱ_{ci}, то дебиты могут быть найдены следующим образом.

В какой-либо точке M контура j-й скважины радиусом ϱ_{cj} (рис. III.13) член $\varrho^2+\delta_j^2-2\varrho\delta_j\cos(\theta-\alpha_j)$, очевидно, будет квадратом расстояния этой точки до центра скважины, т. е.

$$\varrho^2+\delta_j^2-2\varrho\delta_j\cos(\theta-\alpha_j)=\varrho_{cj}^2. \qquad (III.6.16)$$

В остальных членах формулы (III.6.15), пользуясь малостью радиуса ϱ_{cj}, при нахождении забойного потенциала Φ_{cj} полагаем $\varrho=\delta_j$, $\theta=\alpha_j$.

Тогда получим

$$\Phi_{cj}=\overline{\Phi}_{\text{к}}+\sum_{n=1}^{\infty}(\Phi_n\cos n\,\theta+\Phi'_n\sin n\,\theta)\left(\frac{\delta_j}{\varrho_{\text{к}}}\right)^n+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}{}'\,q_i\ln\frac{\delta_j^2+\delta_i^2-2\delta_j\delta_i\cos(\alpha_j-\alpha_i)}{\dfrac{\delta_i^2\delta_j^2}{\varrho_{\text{к}}^2}+\varrho_{\text{к}}^2-2\delta_i\delta_j\cos(\alpha_j-\alpha_i)}+$$

$$+\frac{1}{4\pi}q_j\ln\frac{\varrho_{cj}^2}{\dfrac{\delta_j^4}{\varrho_{\text{к}}^2}+\varrho_{\text{к}}^2-2\delta_j^2}$$

или

$$\Phi_{cj}=\overline{\Phi}_{\text{к}}+\sum_{n=1}^{\infty}(\Phi_n\cos n\,\theta+\Phi'_n\sin n\,\theta)\left(\frac{\delta_j}{\varrho_{\text{к}}}\right)^n+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}{}'\,q_i\ln\frac{\delta_i^2+\delta_j^2-2\delta_j\delta_i\cos(\alpha_j-\alpha_i)}{\dfrac{\delta_i^2\delta_j^2}{\varrho_{\text{к}}^2}+\varrho_{\text{к}}^2-2\delta_j\delta_i\cos(\alpha_j-\alpha_i)}-$$

$$-\frac{q_j}{2\pi}\ln\left[\frac{\varrho_{\text{к}}}{\varrho_{cj}}\left(1-\frac{\delta_j^2}{\varrho_{\text{к}}^2}\right)\right]. \qquad \text{(III.6.17)}$$

Штрих (′) у суммы $\sum_{i=1}^{N}{}'$ означает, что при суммировании от $i=1$ до $i=N$ опускается член $i=j$.

Для пласта мощностью h, в котором расположены скважины с дебитами Q_i, переходя от потенциала к давлениям и вспоминая, что

$$\Phi=\frac{kp}{\mu}\,,\quad q_i=\frac{Q_i}{h}\,,$$

получаем из (III.6.15)

$$p(\varrho,\theta)=\overline{p}_{\text{к}}+\sum_{n=1}^{\infty}(p_n\cos n\,\theta+p'_n\sin n\,\theta)\left(\frac{\varrho}{\varrho_{\text{к}}}\right)^n+$$

$$+\frac{\mu}{4\pi\,kh}\sum_{i=1}^{N}Q_i\ln\frac{\varrho^2+\delta_i^2-2\varrho\delta_i\cos(\theta-\alpha_i)}{\dfrac{\delta_j^2\varrho^2}{\varrho_{\text{к}}^2}+\varrho_{\text{к}}^2-2\varrho\delta_i\cos(\theta-\alpha_i)}\,. \qquad \text{(III.6.18)}$$

Из формул (III. 6. 16) и (III. 6. 17) для забойных давлений будет

$$p_{c\,j}=\bar{p}_к+\sum_{n=1}^{\infty}(p_n\cos n\,\theta+p_n'\sin n\,\theta)\left(\frac{\delta_j}{\varrho_к}\right)^n+$$

$$+\frac{\mu}{4\pi\,kh}\sum_{i=1}^{N}Q_i\ln\frac{\delta_j^2+\delta_i^2-2\delta_j\delta_i\cos(\alpha_j-\alpha_i)}{\frac{\delta_i^2\delta_j^2}{\varrho_к^2}+\varrho_к^2-2\delta_i\delta_j\cos(\alpha_j-\alpha_i)}-$$

$$-\frac{\mu\,Q_j}{2\pi\,kh}\ln\left[\frac{\varrho_к}{\varrho_{c\,j}}\left(1-\frac{\delta_j^2}{\varrho_к^2}\right)\right]. \qquad \text{(III. 6. 19)}$$

Если скважины несовершенные, то, как будет показано в § 2 и 4 главы V, под ϱ_{cj} следует подразумевать приведенный радиус, учитывающий ее несовершенство.

Полученные выше формулы могут быть применены к исследованию пластов и скважин при помощи карты изобар следующим образом.

Пусть для какого-либо месторождения известны карта изобар, дебиты и забойные давления скважин. Усредненное значение параметра kh/μ вдоль некоторой площади можно определить при помощи формул (III. 6. 18) и (III. 6.19) следующим образом.

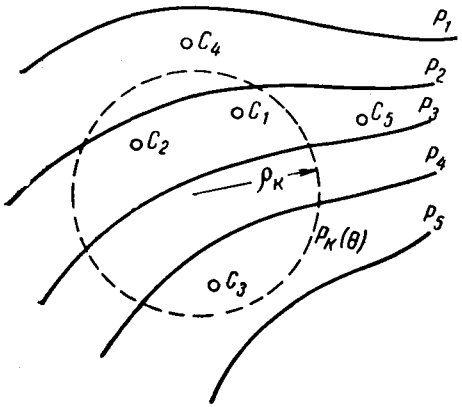


Рис. III. 14. Схема карты изобар месторождения.

Выделим на карте изобар месторождения круг желаемого радиуса $\varrho_к$ (рис. III. 14). Центр круга O следует поместить в точке, удаленной от скважин на расстояние не меньше нескольких мощностей пласта. По карте изобар непосредственно можно определить пластовое давление в любой точке круга и, следовательно, давление $p_к$ на контуре $\varrho_к$, которое, таким образом, будет известной функцией $p_к(\theta)$ полярного угла θ.

Из уравнений (III. 6. 12) численно [7] могут быть найдены коэффициенты Фурье p_n и p_n'. Тогда, зная по карте изобар давление $p(\varrho, \theta)$ в любой точке и дебиты Q_i, из уравнения (III. 6. 18) можно найти параметр kh/μ. Если пласт однороден, для любой точки внутри круга с координатами ϱ, θ из формулы (III. 6. 18) будет получаться одно и то же значение параметра kh/μ.

Если пласт, как это обычно бывает, неоднороден, для разных точек с разными координатами ϱ, θ будут получаться неодинаковые значения kh/μ. Можно предполагать, что среднее вдоль площади значение kh/μ получится по давлению p_0 в центре круга — точке $\varrho = 0$, которое также берется по карте изобар.

Для этой точки из (III. 6. 18) имеем

$$p_0 = \overline{p}_к + \frac{\mu}{4\pi kh} \sum_{i=1}^{N} Q_i \ln \frac{\delta_i^2}{\varrho_к^2} = \overline{p}_к - \frac{\mu}{2\pi kh} \sum_{i=1}^{N} Q_i \ln \frac{\varrho_к}{\delta_i},$$

откуда

$$\frac{kh}{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Q_i \ln \frac{\varrho_к}{\delta_i}}{2\pi (\overline{p}_к - p_0)}. \qquad \text{(III. 6. 20)}$$

Определив из (III. 6. 20) kh/μ, по известным забойным давлениям p_{cj} из уравнения (3. 6. 19) можно найти приведенные радиусы скважин ϱ_{cj}.

Таким образом, строя на карте изобар круги желаемых радиусов, содержащие внутри хоть одну скважину, можно найти усредненные вдоль этих кругов параметры пласта и скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, 1958.

2. Павловский Н. Н. Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения. Изд.-во АН СССР, т. II, 1956.

3. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехтеориздат, 1953.

4. Нельсон-Скорняков Ф. Б. Фильтрация в однородной среде. Изд-во «Советская наука», М., 1947.

5. Веденников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. Госстройиздат, 1939.

6. Четин Ф. Е. Некоторые приложения эллиптических функций к двухмерным задачам гидродинамики, Диссертация. Моск. обл. педаг. ин-т, 1955.

7. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 1, 2, 3. Гостехиздат, 1948.

ГЛАВА IV

ПРАКТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПРИТОКА К СОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ

§ 1. Вводные замечания. Потенциал нескольких точечных стоков в неограниченном пласте

В главе III были рассмотрены некоторые гидродинамические задачи фильтрации о течениях при наличии заданного числа источников или стоков на плоскости. Эти задачи тесно связаны с основной проблемой разработки нефте-водо-газоносных пластов — расчетом притока к одной или группе совершенных скважин. Точные решения, как правило, оказываются весьма сложными и громоздкими. Для практических целей обычно применяются более простые приближенные, но вместе с тем достаточно точные методы расчета, которые изложены ниже.

Нефтяные месторождения эксплуатируются обычно большим числом скважин.

Могут быть два вида задач.

1. Задается дебит скважин и требуется определить необходимое для этого дебита забойное давление и, кроме того, давление в любой точке пласта.

Задавать дебит скважины выше известного предела нельзя, так как для этого может потребоваться слишком большая депрессия. Если увеличение депрессии сопровождается снижением забойного давления, то может случиться, что для обеспечения данного дебита потребуется забойное давление, равное нулю или даже отрицательное, что физически невозможно.

2. В большинстве случаев приходится встречаться с другой задачей: задано забойное давление, требуется определить дебит.

Забойное давление на скважине определяется технологическими условиями эксплуатации, которые бывают самые разнообразные.

Например, забойное давление должно быть определенным образом связано с давлением насыщения, т. е. давлением, при котором весь газ растворен в нефти.

Если давление в какой-нибудь точке ниже давления насыщения, то из нефти будет выделяться газ в виде пузырьков. Пузырьки газа закупоривают поровое пространство и при достаточном снижении давления могут снижать продуктивные свойства скважины.

Снижение забойного давления, т. е. увеличение депрессии, действует здесь двояким образом: с одной стороны, оно должно вести к увеличению дебита жидкости; с другой стороны, снижение забойного давления ниже давления насыщения и связанное с этим разгазирование жидкости вызывают увеличение фильтрационного сопротивления призабойной зоны ввиду ее частичного закупоривания выделяющимися пузырьками газа. Оптимальное в том или ином смысле значение забойного давления должно специально определяться в каждом отдельном случае.

Наконец, если возможен вынос песка из пласта на забой скважины, то скорость фильтрации на стенке скважины должна быть меньше некоторой предельной величины.

Таким образом, могут быть заданы различные условия на стенках скважины в зависимости от технологического режима эксплуатации.

Каждый нефтяник хорошо знает, что если эксплуатируется группа скважин в одинаковых условиях, т. е. с одинаковым забойным давлением, то дебит всего месторождения растет медленнее числа скважин, вводимых в эксплуатацию. При этом предполагается, что все скважины находятся в одинаковых условиях.

Можно поставить требование — эксплуатировать месторождение так, чтобы суммарный дебит возрастал пропорционально числу скважин или даже быстрее. Но в этих случаях забойное давление придется непрерывно понижать и, наконец, мы дойдем до предела, когда уже снизить забойное давление нельзя. Тогда опять кривая суммарного дебита будет стремиться к некоторому пределу при возрастании числа скважин.

Раньше скважины расставлялись по сеткам-треугольникам или в шахматном порядке. В настоящее время выдвинут другой принцип расстановки скважин — в виде рядов, расположенных вдоль линий, геометрически подобных первоначальному контуру нефтеносности.

Решим вначале задачу, называемую плоской задачей интерференции скважин. Пусть пласт мощностью h вскрыт множеством совершенных скважин. Пласт заполнен однородной несжимаемой жидкостью.

Пьезометрические воронки имеют примерно вид, показанный на рис. IV. 1, *а*.

В плане будет область той или иной формы, ограниченная некоторым контуром, называемым контуром питания, на котором предполагается заданным давление $p_к$ и, следовательно, известен потенциал $\Phi_к = \frac{kp_к}{\mu}$.

Внутри этого контура размещено множество кружочков, являющихся проекциями скважин (рис. IV. 1, *б*).

На скважинах радиусами r_c устанавливается забойное давление p_c и соответственно забойный потенциал Φ_c.

Величины p_c будут зависеть от дебита и дебит — от величин забойных давлений.

Если p_c равно $p_к$, то никакого притока нет. Статический уровень всюду один и тот же и равен $p_к/\gamma$. Если к скважинам начнется приток, то образуется разность давлений $p_к - p_c$ — депрессия, под действием которой жидкость будет притекать к скважинам.

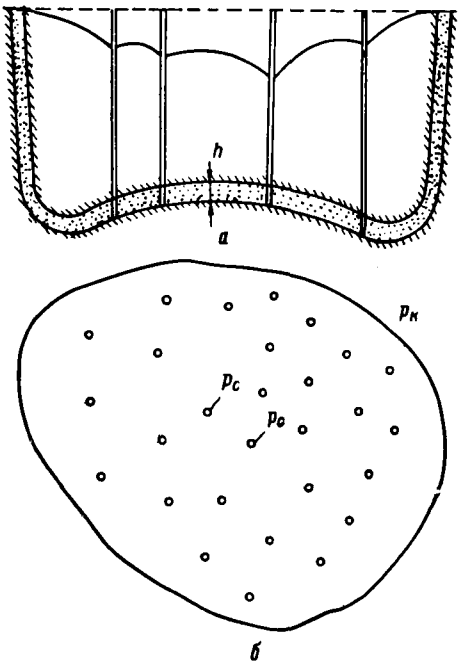


Рис. IV. 1. Схема притока к скважинам при напорном режиме.

Для решения обратимся к формуле (I. 2. 18)

$$\Phi = \frac{q}{2\pi} \ln r + \text{const} \qquad \text{(IV. 1. 1)}$$

и поставим задачу о притоке не к одному, а к множеству точечных стоков или источников на плоскости, $q = Q/h$ — дебит, отнесенный к единице мощности пласта.

Рассмотрим неограниченную плоскость и разместим на этой плоскости произвольное количество стоков или источников. Важно подчеркнуть, что вначале берется именно неограниченная плоскость, не ограниченный в плане пласт.

При линейном законе фильтрации и наличии нескольких стоков вызванные ими потенциалы можно алгебраически суммировать. Потенциал результирующего течения будет равняться алгебраической сумме потенциалов, вызванных каждым стоком в отдельности. Это называется принципом суперпозиции или сложения течений и следует из линейности уравнения Лапласа для потенциала и возможности суммирования его частных решений. Скорости течения при этом складываются геометрически, как векторы.

Возьмем произвольную точку пласта M (рис. IV. 2), в котором расположено множество стоков с дебитами q_1, q_2, ...

Можно, пользуясь принципом сложения течений, найти резуль-

тирующий потенциал точки M, суммируя потенциалы, определяемые формулой (IV. 1. 1):

$$\Phi_M = \left(\frac{q_1}{2\pi}\ln r_1 + C_1\right) + \left(\frac{q_2}{2\pi}\ln r_2 + C_2\right) + \ldots + \left(\frac{q_n}{2\pi}\ln r_n + C_n\right), \qquad \text{(IV. 1. 2)}$$

где r_1, r_2, r_3, ... — соответственно расстояния точки M от первого, второго, третьего и т. д. стоков; C_1, C_2, C_3, ... — постоянные (const), входящие в формулу (IV. 1. 1), различные для каждого стока.

От каждого стока будет своя собственная константа. Если их сложить, то получим одну суммарную константу. Таким образом, потенциал любой точки пласта можно представить в виде

$$\Phi = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} q_i \ln r_i + C, \qquad \text{(IV. 1. 3)}$$

где n — число стоков; r_i — расстояние от i-го стока до точки, где определяется потенциал.

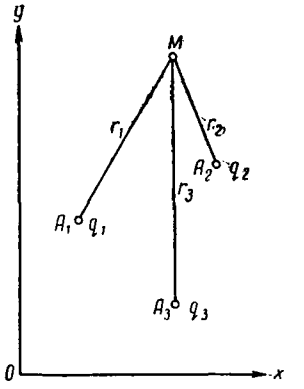


Рис. IV. 2.

При этом

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \sum_{i=1}^{n} C_i; \quad q_i = \frac{Q_i}{h}, \qquad \text{(IV. 1. 4)}$$

где Q_i — дебит i-й скважины со всей мощности пласта h.

Повторяем еще раз — пласт предполагается неограниченным в плане. При этом на бесконечности получается бесконечный потенциал.

В центрах стоков ($r_i = 0$) получаются также бесконечные потенциалы.

§ 2. Приток к совершенной скважине в пласте с прямолинейным контуром питания. Метод отражения

Формула (IV. 1. 3) является основной в решении задачи интерференции скважин.

Покажем применение этой формулы в двух случаях — для пласта с прямолинейным контуром питания и пласта с произвольным контуром питания, но удаленным от скважин.

В реальных условиях приходится встречаться не с бесконечным в плане пластом, а с площадью, ограниченной более или менее удаленным контуром.

Некоторые точные решения помимо приведенных в главе III могут быть получены при помощи известного в гидродинамике метода отражения.

Этот метод можно продемонстрировать на следующей задаче.

Пусть жидкость притекает к одной скважине, расположенной в полубесконечном пласте. Примем ось x за контур питания. На прямой $y = 0$ — оси x — поддерживается постоянный потенциал $\Phi_к$ (рис. IV. 3).

На скважине поддерживается другой потенциал $\Phi_с$.

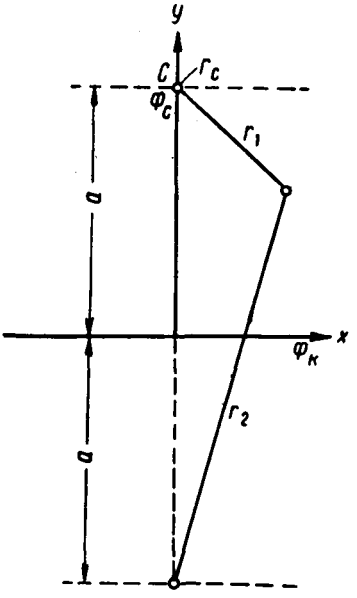


Рис. IV. 3.

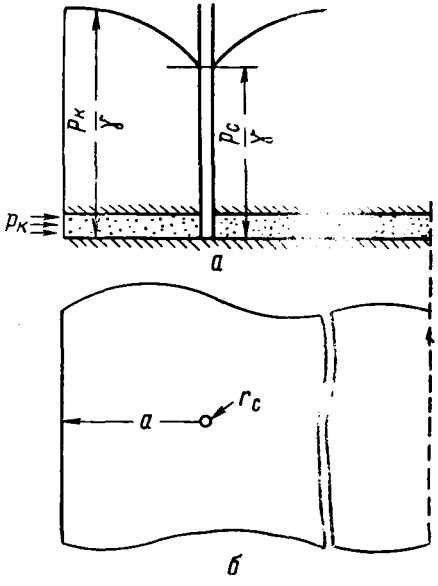


Рис. IV. 4. Воронка депрессии при притоке к скважине в пласте с прямолинейным контуром питания.

Например, пусть в полосообразном нефтяном пласте пробурена одна скважина (рис. IV. 4, *а*). Тогда в плане (рис. IV. 4, *б*) будет пласт весьма большой протяженности с прямолинейной границей, на которой известны давление $p_к$, и проекция единичной скважины радиусом $r_с$ с забойным давлением $p_с$.

Решим задачу о притоке к такой скважине.

Отличие от ранее рассмотренной задачи радиального движения заключается в том, что там контур питания был окружностью и пласт имел в плане форму круга, а сейчас пласт является полуплоскостью $y > 0$ с прямолинейным контуром питания $y = 0$ — осью x.

Если бы пласт был неограниченным и в нем была единственная

скважина, то потенциал в любой точке пласта определялся бы формулой (IV. 1. 1)

Посмотрим, удовлетворяет ли формула (IV. 1. 1) нашим граничным условиям или не удовлетворяет.

На стенке скважины при $r = r_c$ формула (IV. 1. 1) удовлетворяет одному условию — во всех точках контура $r = r_c$ потенциал постоянный и может быть приравнен Φ_c. На контуре питания — на оси $y = 0$ — по формуле (IV. 1. 1) получается переменное давление, так как расстояния от центра скважины до точек оси x различны (рис. IV. 3). Значит, формула (IV. 1. 1) условиям на контуре питания не удовлетворяет, потому что она дает переменное значение потенциала на границе пласта, а по условию оно должно быть постоянным. Этого постоянства можно добиться, пользуясь очень простым приемом.

Отразим нашу скважину в оси x, как в зеркале, и рассмотрим совместное действие двух равнодебитных скважин: одной — действительной и второй — фиктивной скважины-изображения, т. е. как бы увеличим размер пласта вдвое. При этом знак дебитов пусть будет различным.

Потенциал в любой точке M, вызванный действием двух скважин — действительной и изображения, согласно формуле (IV. 1. 3), где полагаем $n = 2$, $q_1 = q$, $q_2 = -q$, равняется

$$\Phi = \Phi_M = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + C, \qquad \text{(IV. 2. 1)}$$

где r_1 — расстояние от точки M до действительной скважины с положительным дебитом — скважины-стока; r_2 — расстояние от точки M до скважины-изображения с отрицательным дебитом — скважины-источника.

Но потенциал в любой точке оси x должен быть постоянным, чему формула (IV. 2. 1) удовлетворяет, так как для этих точек $r_1 = r_2$.

Напоминаем, что дебит скважины-стока считается положительным, скважины-источника отрицательным.

Для точек оси x согласно граничному условию с учетом формулы (IV. 2. 1) имеем

$$y = 0,\ r_1 = r_2,\ \Phi = \Phi_к = C. \qquad \text{(IV. 2. 2)}$$

Таким образом,

$$\Phi = \Phi_M = \Phi_к + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}. \qquad \text{(IV. 2. 3)}$$

Для нахождения оставшейся неизвестной величины q определим потенциал на стенке действительной скважины, т. е. поместим точку M на контур действительной скважины. Получим

$$\Phi_c = \Phi_к + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_c}{2a}, \qquad \text{(IV. 2. 4)}$$

где a — ордината центра действительной скважины, так как в этом случае $r_1 = r_c$, $r_2 \approx 2a$. Строго говоря, под r_2 должно подразумеваться расстояние от центра скважины-изображения до какой-либо точки контура $r = r_c$ действительной скважины. В зависимости от положения этой точки на контуре скважины $r = r_c$ величина r_2 будет изменяться в пределах $(2a - r_c) \leqslant r_2 \leqslant (2a + r_c)$. Ввиду малости значения r_c по сравнению с $2a$ можно с вполне достаточной точностью принять $r_2 \approx 2a$, откуда и следует формула (IV. 2. 4).

Из последнего уравнения получаем

$$q = \frac{2\pi (\Phi_к - \Phi_c)}{\ln \frac{2a}{r_c}}. \qquad \text{(IV. 2. 5)}$$

Сравним эту формулу с формулой Дюпюи для радиального движения в пласте при притоке к скважине, расположенной в центре пласта круговой формы.

Движение в пласте с прямолинейным контуром питания происходит с таким же дебитом, как в пласте с круговым контуром питания, радиус которого равняется $2a$.

Так как обычно r_c значительно меньше $R_к$ — в тысячи раз и более, то ошибка в несколько раз в величине $R_к$ сравнительно мало отражается на величине дебита. Таким образом, для практических расчетов точное знание формы и расстояния до контура питания является необязательным в случае скважины малого радиуса, но порядок расстояния до контура питания должен быть, конечно, известен.

§ 3. Приток к группе совершенных скважин в пласте с удаленным контуром питания. Потенциал и скорость фильтрации результирующего течения

В большинстве задач контур питания находится довольно далеко. Ознакомимся с приближенным методом решения задач интерференции скважин для пластов с удаленным контуром питания, позволяющим выполнять конкретные практические расчеты.

Пусть в пласте расположена группа скважин, показанная в плане на рис. IV. 5, *а*, с различными для общности дебитами, забойными потенциалами и радиусами скважин.

Расположение скважин задано. Где-то далеко находится контур питания, форма которого в деталях неизвестна, но известен порядок расстояния $R_к$ от контура питания до наших скважин.

На контуре питания известен потенциал $\Phi_к$, на контурах скважин — потенциалы Φ_c.

Величина контурного потенциала $\Phi_к$ обычно определяется при помощи исследования скважин. Как только пласт вскрывается, измеряется пластовое давление и, поскольку в пласте движения нет, по законам гидростатики напор всюду будет постоянным.

Нужно сказать несколько слов о старых точках зрения на работу скважин. В свое время, да и сейчас еще иногда применяется понятие «радиус влияния скважины».

Считалось, что одна скважина «влияет» на пласт только в некоторой окрестности в пределах своего радиуса влияния и что за пределами этой окрестности влияния движения в пласте нет. Если расстояние между скважинами будет больше «радиуса влияния», то интерференции скважин происходить не будет.

Между тем это совершенно неправильно. Пласт представляет собой единую систему и нельзя говорить о радиусе влияния отдельной скважины.

Если из скважины начался отбор жидкости, то, строго говоря, начинают двигаться частицы жидкости во всем пласте. Поэтому понятие о радиусе влияния не имеет физического смысла. Радиус влияния можно рассматривать лишь как условную величину расстояния, за пределами которого возмущения, вызываемые работой скважины, становятся практически мало заметными [1].

Будем пользоваться формулой (IV. 1. 3)

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} q_i \ln r_i + C. \qquad \text{(IV. 3. 1)}$$

Будем считать, что заданы забойные потенциалы $\Phi_{c\,i}$ и подлежат определению дебиты q_i.

В таком случае можно для дебитов и константы C составить следующую систему уравнений.

Поместим точку M на контуре первой скважины. Из формулы (IV. 3. 1) получим

$$\Phi_{c\,1} = \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{c\,1} + q_2 \ln r_{2,\,1} + q_3 \ln r_{3,\,1} + \ldots + q_n \ln r_{n,\,1}) + C, \qquad \text{(IV. 3. 2)}$$

где $\Phi_{c\,1}$ — забойный потенциал на контуре первой скважины; $r_{c\,1}$ — радиус первой скважины; $r_{2,\,1}$, $r_{3,\,1}$, ..., $r_{n,\,1}$ — расстояние от центра первой скважины последовательно до центра второй, третьей, ..., n-й скважины.

Здесь имеется небольшая неточность.

Точку M располагаем в произвольной точке контура первой скважины. Строго говоря, расстояния $r_{2,1}$, $r_{3,1}$, ..., $r_{n,1}$ переменные, они зависят от того, в какую именно точку контура первой скважины помещаем точку M.

В связи с тем, что расстояние между скважинами выражается цифрами порядка 300—500 *м*, а радиус скважин 0,1 *м*, эта неточность вполне допустима.

Далее поместим точку M на контур второй скважины:

$$\Phi_{c\,2} = \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{1,\,2} + q_2 \ln r_{c\,2} + q_3 \ln r_{3,\,2} + \ldots + q_n \ln r_{n,\,2}) + C, \qquad \text{(IV. 3. 3)}$$

где $\Phi_{c\,2}$ — забойный потенциал второй скважины; $r_{c\,2}$ — радиус второй скважины; $r_{1,\,2}$, $r_{3,\,2}$, ..., $r_{n,\,2}$ — расстояния от центров остальных скважин до центра второй скважины. Для последней n-й скважины имеем

$$\Phi_{c\,n} = \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln r_{1,\,n} + q_2 \ln r_{2,\,n} + q_3 \ln r_{3,\,n} + \ldots + q_n \ln r_{c\,n}) + C, \qquad \text{(IV. 3. 4)}$$

где $\Phi_{c\,n}$ — забойный потенциал n-й скважины; $r_{i,\,j} = r_{j,\,i}$ — расстояние между центрами i-й и j-й скважин.

Таких уравнений будет столько, сколько скважин, т. е. n уравнений. Неизвестных же будет $n+1$, так как константа также неизвестна.

Для нахождения константы C воспользуемся условием $\Phi = \Phi_к$ на удаленном контуре питания:

$$\Phi_к \approx \frac{1}{2\pi} (q_1 \ln R_к + q_2 \ln R_к + q_3 \ln R_к + \ldots + q_n \ln R_к) + C. \qquad \text{(IV. 3. 5)}$$

Приближение заключается в том, что для точек контура питания принимаем и те же расстояния $R_к$ до скважин.

Если контур питания достаточно удален, то расстояние $R_к$ можно принять одинаковым для всех скважин, учитывая, что оно находится под знаком логарифма.

Уравнение (IV. 3. 5) и будет $(n + 1)$ уравнением.

Таким образом, плоская задача интерференции при удаленном контуре питания сводится к решению алгебраической системы уравнений (IV. 3. 2) — (IV. 3. 5), являющихся уравнениями первой степени с соответствующим числом неизвестных.

Эту систему можно упростить, исключив константу C.

Вычтем каждое из уравнений (IV. 3. 2) — (IV. 3. 4) из последнего уравнения (IV. 3. 5). Тогда получится система из n уравнений.

Вычитаем сначала первое уравнение (IV. 3. 2) из (IV. 3. 5):

$$\Phi_к - \Phi_{с\,1} = \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ln \frac{R_к}{r_{с\,1}} + q_2 \ln \frac{R_к}{r_{2,\,1}} + q_3 \ln \frac{R_к}{r_{3,\,1}} + \ldots + q_n \ln \frac{R_к}{r_{n,\,1}}\right). \quad \text{(IV. 3. 6)}$$

Вычитая второе уравнение, получаем

$$\Phi_к - \Phi_{с\,2} = \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ln \frac{R_к}{r_{1,\,2}} + q_2 \ln \frac{R_к}{r_{с\,2}} + q_3 \ln \frac{R_к}{r_{3,\,2}} + \ldots + q_n \ln \frac{R_к}{r_{n,\,2}}\right) \quad \text{(IV. 3. 7)}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\Phi_к - \Phi_{с\,n} = \frac{1}{2\pi}\left(q_1 \ln \frac{R_к}{r_{1,\,n}} + q_2 \ln \frac{R_к}{r_{2,\,n}} + q_3 \ln \frac{R_к}{r_{3,\,n}} + \ldots + q_n \ln \frac{R_к}{r_{с\,n}}\right). \quad \text{(IV. 3. 8)}$$

При помощи последней системы уравнений можно решать задачи двоякого рода: или находить депрессию при заданном дебите, или, если заданы депрессии, то, решая эту систему, получить значения дебитов. Положительные значения дебитов будут для скважин-стоков — эксплуатационных, отрицательные — для скважин-источников — нагнетательных. После того как дебиты найдены, пластовое давление в любой точке определяется из формулы (IV. 3. 1), причем результат тем точнее, чем дальше эта точка отстоит от контура питания.

Эти формулы дают полное решение задачи. Они годятся для пластов с удаленным контуром питания, потому что для пластов с близким контуром питания уравнение (IV. 3. 5) будет недостаточно точным.

Покажем в заключение, как определяются скорости фильтрации в любой точке пласта, где находится группа скважин.

Нетрудно видеть, что если результирующий потенциал получается алгебраическим суммированием потенциалов каждой скважины в отдельности, то результирующая скорость получится геометрическим суммированием скоростей, определяемых каждой скважиной в отдельности.

Рассмотрим группу скважин. Контур питания предполагается достаточно удаленным.

Требуется найти потенциал и скорость фильтрации в точке M, отстоящей от наших скважин на известных расстояниях r_1, r_2, ..., r_n (рис. IV. 5, *а*).

Если бы эксплуатировалась только одна первая скважина, то скорость фильтрации была бы направлена по радиусу r_1 и равнялась бы

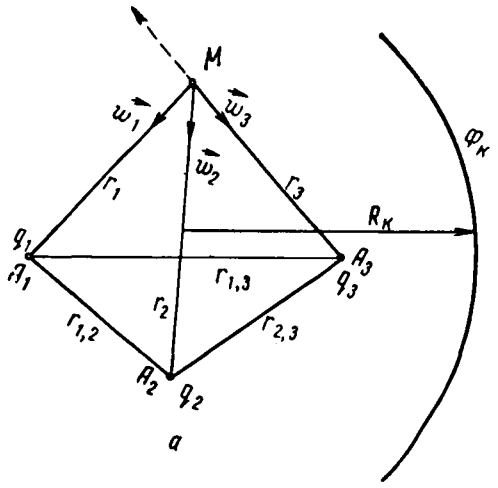
$$w_1 = \frac{q_1}{2\pi r_1}.$$

Скорости w_2, w_3, ..., w_n, определяемые второй, третьей и т. д. скважинами, равны

$$w_2 = \frac{q_2}{2\pi r_2}, \quad w_3 = \frac{q_3}{2\pi r_3} \ldots w_n = \frac{q_n}{2\pi r_n}.$$

Остается сложить эти скорости, определяемые каждой скважиной в отдельности, по правилу параллелограмма или по правилу многоугольника, чтобы получить результирующую скорость (рис. IV. 5, *б*). $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3 + \ldots + \vec{w}_n$.

Зная вектор скорости фильтрации, можно найти истинную скорость движения жидкости в этой точке по формуле $\vec{v} = \vec{u}/m$.



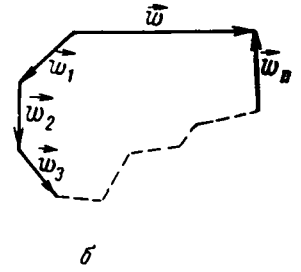


Рис. IV. 5.

Вернемся к решению задачи о скважине в пласте с прямолинейным контуром питания (см. рис. IV. 6).

Найдем скорость в какой-либо точке M пласта.

Если расстояние a от контура питания до скважины велико по сравнению с расстоянием точки M до скважины, то скважину можно не отражать. Если a мало, то нужно зеркально отразить реальную скважину C в контуре питания, причем дебит изображения C' будет $-q$.

При вычислении скорости нужно учесть скорость, определяемую действительной скважиной и ее изображением.

Скорость, определяемую скважиной-стоком, обозначим вектором $\vec{w}_1$ (рис. IV. 6), а скорость, определяемую скважиной-изображением, которая является источником, обозначим через $\vec{w}_2$.

Результирующая скорость $\vec{w}$ будет равняться их геометрической сумме: $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$, причем

$$w_1 = \frac{q}{2\pi r_1}, \quad w_2 = \frac{q}{2\pi r_2}.$$

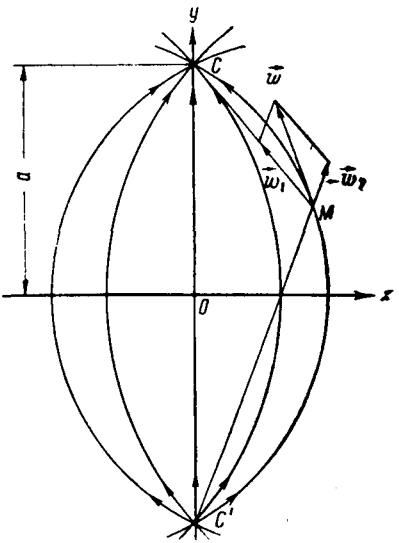


Рис. IV. 6.

Найдем направления скоростей точек, лежащих на оси x, $y = 0$. Легко видеть из рис. (IV. 6), что результирующая скорость $\vec{w}$ для этих точек будет направлена перпендикулярно оси x.

§ 4. Приток к бесконечным цепочкам и кольцевым батареям скважин

Перейдем к многорядным батареям скважин.

Исследование задачи об интерференции скважин в пласте с удаленным контуром питания показывает, что в общем случае приходится решать столько уравнений, сколько имеется скважин.

На месторождениях имеются десятки и сотни скважин. Очевидно, решать десятки или сотни уравнений даже первой степени невозможно без применения быстродействующих вычислительных устройств. Приближенное решение задачи получается следующим образом.

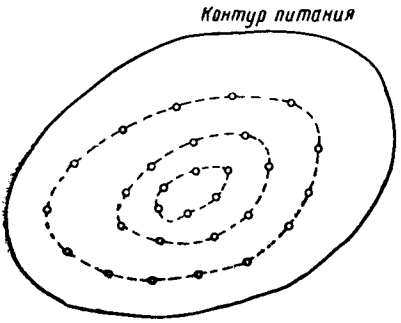


Рис. IV. 7.

При рациональной системе разработки скважины располагаются обычно в виде рядов, расставленных вдоль контура нефтеносности и контура питания.

Пусть внутри области питания вдоль нескольких линий расположены скважины. Эти линии называются часто батареями или рядами скважин (рис. IV. 7).

Можно считать, обычно без большой погрешности, дебит скважин в каждом ряду одинаковым, если, конечно, в каждом ряду скважины находятся в одинаковых условиях.

Дебиты же скважин в разных рядах будут отличаться друг от друга.

Наибольший дебит будет иметь первый ряд, ближайший к контуру питания. Поэтому число одновременно работающих рядов редко бывает больше двух-трех и последующие ряды включаются по мере приближения контура нефтеносности. Когда вода подошла к первому ряду, он выключается и включается один из следующих рядов и т. д.

В этом случае число неизвестных уменьшается от числа скважин n до числа рядов N (причем N обычно не превосходит 2, 3, 4), а это уже гораздо более простая задача.

Будем исходить из формулы (IV. 3. 1) для потенциала при работе группы скважин

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} q_i \ln r_i + C,$$

где n — число всех скважин.

Последовательное расположение точки M на контуре каждой скважины позволило составить систему (IV. 3. 2)—(IV. 3. 4), $(n+1)$

уравнений для n дебитов q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и постоянной

$$\Phi_{c\,i} = \frac{1}{2\pi}(q_1 \ln r_{1i} + q_2 \ln r_{2i} + \ldots + q_i \ln r_{c\,i} + \ldots + q_n \ln r_{ni}) + C,$$

$$\Phi_к \approx \frac{1}{2\pi}(q_1 \ln R_к + q_2 \ln R_к + \ldots + q_n \ln R_к) + C. \quad \text{(IV. 4. 1)}$$

Такие уравнения выписываются теперь для какой-либо одной «опорной» скважины каждого ряда.

При этом предполагается, что в каждом ряду скважины находятся в одинаковых условиях, т. е. имеют одинаковые забойные давления и одинаковые радиусы.

Допущение о равнодебитности скважин, как показывают подсчеты, практически мало отражается на величине суммарного дебита скважин. Дебит какой-нибудь одной скважины будет отличаться от расчетного, но если подсчитывать суммарный дебит батареи или всего месторождения, то он будет довольно близким к действительности.

Расстояния r_{ij} между центрами i-й и j-й скважин могут быть взяты прямо из плана расположения скважин на месторождении. Задача же решения системы уравнений с малым числом неизвестных не вызывает никаких затруднений. Для контроля можно повторить расчет, выбрав другие «опорные» скважины в каждом ряду. Если точность окажется недостаточной, следует обратиться к более точным методам или к электромоделированию [Лт. I. 16].

§ 5. Метод эквивалентных фильтрационных сопротивлений

Практические расчеты интерференции по указанным выше схемам могут быть еще более упрощены. Это было сделано Ю. П. Борисовым, который предложил применить схемы эквивалентных фильтрационных сопротивлений [Лт. I. 12, 16].

Рассмотрим формулу (III. 3. 38) и обратим внимание только на первый член знаменателя. Выясним, какой физический смысл имеет эта формула, когда в знаменателе оставлен только первый член, а второй член отброшен:

$$q_1 = \frac{2\pi(\Phi_к - \Phi_c)}{\frac{\pi L}{\sigma}}. \quad \text{(IV. 5. 1)}$$

Перейдем от потенциала к давлению:

$$q_1 = \frac{k}{\mu}(p_к - p_c)\frac{2\sigma}{L}. \quad \text{(IV. 5. 2)}$$

Легко видеть, что формула (IV. 5. 2) определяет дебит дренажной галереи на длине 2σ в пласте мощностью $h = 1$ (рис. IV. 8), когда забойное давление в галерее равно p_c. Наш действительный дебит q оказывается меньше этого дебита. Поэтому можно дальше поступить так.

Представим формулу (III. 3. 38) в таком виде:

$$q=\frac{\Phi_к-\Phi_с}{\frac{L}{2\sigma}+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sigma}{\pi r_с}}. \qquad (IV.5.3)$$

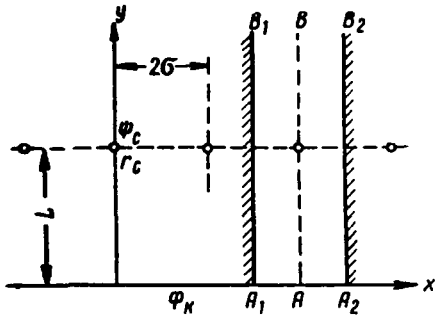


Рис. IV. 8.

Обозначим

$$\frac{L}{2\sigma}=R,\quad \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sigma}{\pi r_с}=R'. \qquad (IV.5.4)$$

В таком случае формулы (IV. 5. 1) и (IV. 5. 3) могут быть представлены в виде «закона Ома»:

$$q_1=\frac{\Phi_к-\Phi_с}{R}, \qquad (IV.5.5)$$

$$q=\frac{\Phi_к-\Phi_с}{R+R'}. \qquad (IV.5.6)$$

Величина R по терминологии Ю. П. Борисова может быть названа внешним фильтрационным сопротивлением батареи, R' — внутренним.

Таким образом, наш приток можно представить схемой эквивалентных фильтрационных сопротивлений, показанной на рис. IV. 9.

Точно так же легко показать, что член $R=\frac{m}{2\pi}\ln\frac{R_к}{R_1}$ в формуле (III. 3. 32) определяет сопротивление дренажной кольцевой галереи на длине дуги 2σ.

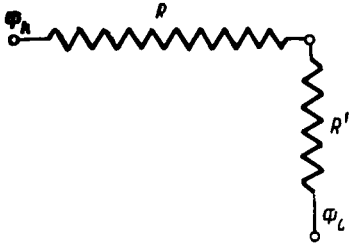


Рис. IV. 9. Схема последовательного соединения фильтрационных сопротивлений.

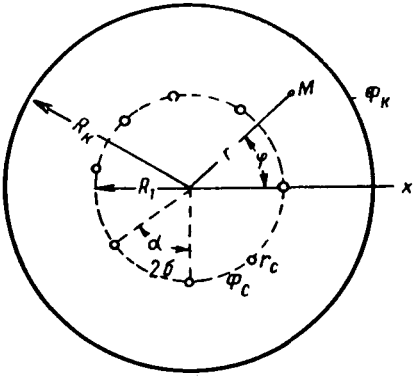


Рис. IV. 10.

Действительно (рис. IV. 10), дебит этого отрезка галереи согласно формуле Дюпюи будет в m раз меньше дебита кольцевой галереи радиусом R_1:

$$q_{гал}=\frac{2\pi(\Phi_к-\Phi_с)}{m\ln\frac{R_к}{R_1}}=\frac{\Phi_к-\Phi_с}{\frac{m}{2\pi}\ln\frac{R_к}{R_1}}=\frac{\Phi_к-\Phi_с}{\frac{1}{\alpha}\ln\frac{R_к}{R_1}}, \qquad (IV.5.7)$$

где $\alpha=\frac{2\pi}{m}$ — угол сектора в радианах, приходящегося на одну скважину.

Таким образом, практически можно считать, что R во всех случаях определяет фильтрационное сопротивление галереи с тем же забойным потенциалом Φ_c, длина которой, измеренная вдоль линии расположения батареи, равна расстоянию между соседними скважинами в батарее.

Когда имеется несколько батарей с различными числами скважин, удобнее расчеты вести не для дебита q одной отдельной скважины, а для суммарного действительного дебита батареи.

Пусть сначала в полубесконечном пласте мощностью h между непроницаемыми границами находится одна прямолинейная батарея с числом скважин m.

Тогда суммарный дебит батареи согласно (IV. 5. 3) равен

$$\sum Q = qmh = \frac{\Phi_к - \Phi_c}{\frac{L}{2\sigma\, mh} + \frac{1}{2\pi\, mh} \ln \frac{\sigma}{\pi\, r_c}} = \frac{k}{\mu} \frac{p_к - p_c}{\frac{L}{2\sigma\, mh} + \frac{1}{2\pi\, mh} \ln \frac{\sigma}{\pi\, r_c}}. \quad \text{(IV. 5. 8)}$$

Суммарный дебит галереи на этой же длине согласно закону Дарси равен

$$\sum Q_{гал} = \frac{\Phi_к - \Phi_c}{L} f = \frac{\Phi_к - \Phi_c}{L} 2\sigma\, mh = \frac{k}{\mu} \frac{p_к - p_c}{L} 2\sigma\, mh, \quad \text{(IV. 5. 9)}$$

где $f = 2\sigma\, mh$ — площадь сечения галереи.

Согласно (IV. 5. 8) можно написать

$$\sum Q = \frac{p_к - p_c}{\varrho + \varrho'}, \quad \text{(IV. 5. 10)}$$

где ϱ — внешнее суммарное фильтрационное сопротивление, обусловливающее приток к галерее, заменяющей батарею;

$$\varrho' = \frac{\mu}{k} \frac{1}{2\pi\, mh} \ln \frac{\sigma}{\pi\, r_c} \quad \text{(IV. 5. 11)}$$

внутреннее суммарное фильтрационное сопротивление, обусловленное конечным расстоянием между скважинами. Согласно упрощениям, при помощи которых из точных формул (III. 3. 31) и (III. 3. 37) были получены формулы (III. 3. 32) и (III. 3. 38), точность тем больше, чем больше расстояние от контура питания L до батареи по сравнению с половиной расстояния между скважинами σ.

В большинстве случаев приток к галерее можно достаточно точно аппроксимировать прямолинейно-поступательным течением (рис. IV. 11, *а*) или плоско-радиальным в секторе с центральным углом α (рис. IV. 11, *б*).

В первом случае

$$\varrho = \frac{\mu L}{kf} \approx \frac{\mu L}{k\, П\, h_{ср}}, \quad \text{(IV. 5. 12)}$$

где f — площадь сечения пласта; L — расстояние от батареи до контура питания; $П$ — длина галереи; $h_{ср}$ — средняя мощность пласта по длине L.

Во втором случае

$$\varrho = \frac{\mu}{k\, \alpha\, h_{ср}} \ln \frac{R_к}{R_1}. \quad \text{(IV. 5. 13)}$$

Сопротивление же ϱ' должно определяться по формуле (IV. 5. 11), где h — мощность в месторасположении батареи. При этом, конечно, предполагается, что скважины каждой батареи находятся в одинаковых условиях.

Теперь рассмотрим приток к нескольким батареям скважин с забойным давлением $p_{с1}$, $p_{с2}$, ... в пласте с контурными давлениями $p_{к1}$ и $p_{к2}$ (рис. IV. 11). Пусть $p_{к1} > p_{к2}$. Очевидно, поток от контура питания к первому ряду скважин будет частично перехватываться первой батареей, частично двигаться ко второй. Поток, движущийся ко второй батарее, будет частично перехватываться второй батареей, частично двигаться к третьей

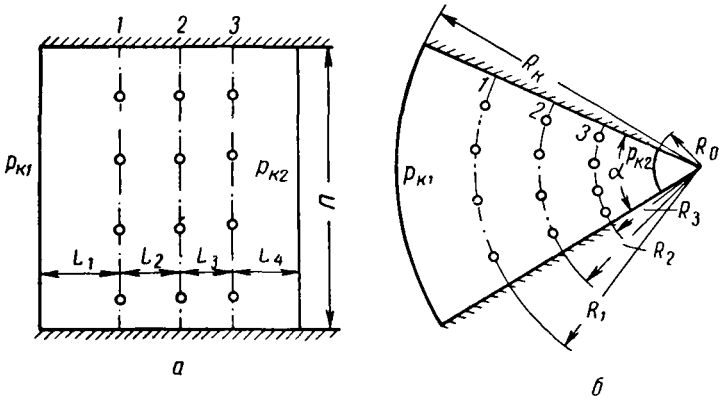


Рис. IV. 11.

и т. д. Этому движению отвечает схема фильтрационных сопротивлений, показанная на рис. IV. 12 для трех батарей. На рис. IV. 12, *а* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 — внешние суммарные фильтрационные сопротивления, соответственно равные: для прямолинейно-поступательной аппроксимации движения (рис. IV. 11, *а*)

$$Q_1 = \frac{\mu L_1}{k \Pi_1 h_{1\,ср}}, \quad Q_2 = \frac{\mu L_2}{k \Pi_2 h_{2\,ср}}, \quad Q_3 = \frac{\mu L_3}{k \Pi_3 h_{3\,ср}}, \quad Q_4 = \frac{\mu L_4}{k \Pi_4 h_{4\,ср}}, \qquad \text{(IV. 5. 14)}$$

где $h_{1\,ср}$, $h_{2\,ср}$, $h_{3\,ср}$, $h_{4\,ср}$, L_1, L_2, L_3, L_4 — соответственно средние мощности и длины участков, показанных на рис. IV. 11, *а*.

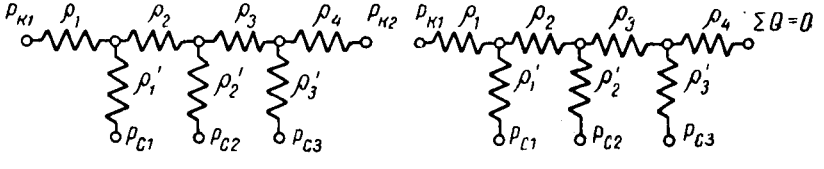


Рис. IV. 12. Схемы соединения эквивалентных фильтрационных сопротивлений.

При плоско-радиальной аппроксимации пласта в виде сектора с центральным углом α в радианах (рис. IV, *б*)

$$Q_1 = \frac{\mu}{k \alpha h_{1\,ср}} \ln \frac{R_к}{R_1}, \quad Q_2 = \frac{\mu}{k \alpha h_{2\,ср}} \ln \frac{R_1}{R_2}, \quad Q_3 = \frac{\mu}{k \alpha h_{3\,ср}} \ln \frac{R_2}{R_3},$$

$$Q_4 = \frac{\mu}{k \alpha h_{4\,ср}} \ln \frac{R_3}{R_0}. \qquad \text{(IV. 5. 15)}$$

Внутренние фильтрационные сопротивления рассчитываются в обоих случаях по формулам (IV. 5. 11):

$$\varrho_1' = \frac{\mu}{2\pi m_1 h_1 k} \ln \frac{\sigma_1}{\pi r_{c1}}, \quad \varrho_2' = \frac{\mu}{2\pi m_2 h_2 k} \ln \frac{\sigma_2}{\pi r_{c2}},$$

$$\varrho_3' = \frac{\mu}{2\pi m_3 h_3 k} \ln \frac{\sigma_3}{\pi r_{c3}}, \qquad \text{(IV. 5. 16)}$$

где m_1, m_2, m_3, r_{c1}, r_{c2}, r_{c3}, $2\sigma_1$, $2\sigma_2$, $2\sigma_3$ — соответственно числа скважин, их радиусы и расстояния между соседними скважинами в первой, второй, третьей батареях; h_1, h_2, h_3 — мощности пласта в местах расположения батарей.

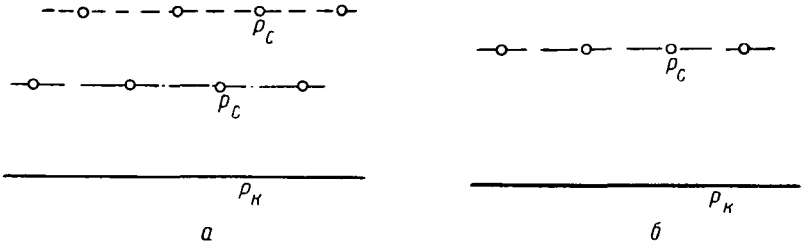


Рис. IV. 13. Схемы линейных батарей скважин.

Дальнейший расчет ведется, как для электрических разветвленных цепей, согласно законам Ома и Кирхгоффа и не вызывает никаких принципиальных затруднений.

Если одна из границ пласта непроницаема, то сквозь нее расход равен нулю. В этом случае в соответствующем узле схемы фильтрационных сопротивлений

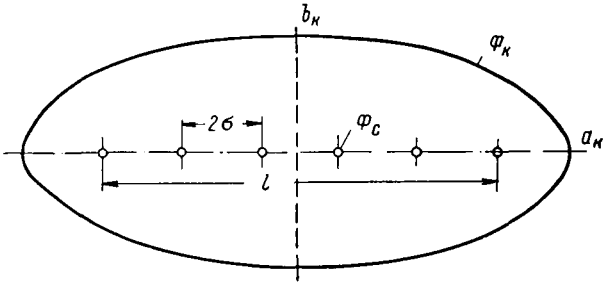


Рис. IV. 14. Схема притока к батарее скважин в эллиптическом пласте.

будет задано не давление, а расход. На рис. IV. 12, *б* дана схема фильтрационных сопротивлений для случая, когда второй контур пласта непроницаем. Вместо давления $p_{к2}$, показанного на рис. IV. 12, *а*, здесь в узле задано условие $\Sigma Q = 0$.

Приведенные выше формулы тем точнее, чем больше расстояние между батареями по сравнению с половиной расстояния между скважинами. Если расстояние между скважинами много больше расстояния между батареями,

нужно обращаться к общим формулам интерференции скважин [Лт. II. 9, 2] или к другим видам схематизации течения, например, заменить две близко расположенные соседние батареи скважин с редкими расстояниями между скважинами (рис. IV. 13, *а*) эквивалентной одной батареей с суммарным числом скважин, проведенной посредине (рис. IV. 13, *б*).

Изложенный выше метод эквивалентных фильтрационных сопротивлений дает вполне удовлетворительную точность при расчете суммарного дебита эллиптической батареи из m скважин, расставленных в пласте эллиптической формы с полуосями $a_к$, $b_к$ на длине l (рис. IV. 14).

При этом в (IV. 5. 10) согласно (III. 4. 5) и (III. 4. 6)

$$Q = \frac{\mu}{2\pi kh} \ln \frac{\frac{1}{2}(a_к + b_к)}{\frac{1}{4} l}, \qquad \text{(IV. 5. 17)}$$

а Q' определяется из (IV. 5. 11).

Ю. А. Мясников, получивший точное решение этой задачи в эллиптических функциях [3], показал, что погрешность метода эквивалентных фильтрационных сопротивлений в данном случае выражается величиной порядка 2—3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н., Пыхачев Г. Б. Интерференция скважин и теория пластовых водонапорных систем. АзГОНТИ, Баку, 1939.

2. Крылов А. П., Глоговский М. М., Мирчинк М. Ф., Николаевский Н. М., Чарный И. А. Научные основы разработки нефтяных месторождений. Гостоптехиздат, 1948.

3. Мясников Ю. А. О притоке к прямолинейной цепочке скважин в пласте эллиптической формы. Нефть и газ, № 2, 1961.

ГЛАВА V

ПРИТОК К НЕСОВЕРШЕННЫМ СКВАЖИНАМ ПРИ ЛИНЕЙНОМ И НЕЛИНЕЙНОМ ЗАКОНАХ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 1. Виды несовершенства скважин. Приток к одной необсаженной скважине с открытым забоем в центре кругового пласта

Рассмотренные выше задачи относились к случаям притока к совершенным скважинам с открытым забоем, которые вскрывали пласт на всю мощность.

Во многих случаях нефтяные или водяные пласты вскрываются не на всю мощность, а частично.

Различают два вида несовершенства скважин — несовершенство по степени вскрытия и несовершенство по характеру вскрытия.

Несовершенная скважина по степени вскрытия — это скважина с открытым забоем, вскрывшая пласт не на всю мощность, а частично.

Если вся вскрытая поверхность забоя является фильтрующей поверхностью и со всех участков поверхности забоя жидкость поступает в скважину, то такая скважина называется совершенной по характеру вскрытия.

Скважины с фильтром или перфорированные называются несовершенными по характеру вскрытия.

Рассмотрим сначала задачу о притоке к одной несовершенной скважине, затем к группе несовершенных скважин.

Здесь имеет место пространственная фильтрация, потому что в окрестности самой скважины, очевидно, движение никак нельзя считать плоским.

Отметим, что этот круг задач имеет существенный интерес не только для нефтяной и газовой промышленности, но и для гидротехники и водоснабжения.

Начнем с задачи о притоке к одной несовершенной скважине с открытым забоем, т. е. скважине, совершенной по характеру, но несовершенной по степени вскрытия.

Будем считать, что кровля и подошва пласта непроницаемы (рис. V. 1).

Пусть на расстоянии $R_к$ расположен контур питания — цилиндрическая поверхность, на которой потенциал постоянный и равный $Ф_к$.

На стенке скважины будем считать заданным потенциал $Ф_с$ определяемый забойным давлением скважины.

Задачей притока к несовершенной скважине занималось довольно много исследователей. Были предложены различные схемы решения.

Наиболее простая и иногда применяемая расчетная схема заключается в следующем. Приток к несовершенной скважине разбивается искусственно на два притока: на радиальный $Q_{рад}$, который рассчитывается как для совершенной скважины мощностью b, и на дон-

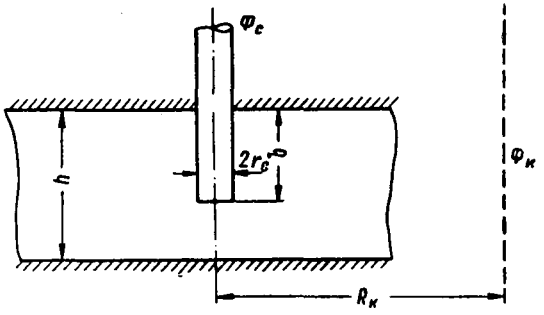


Рис. V. 1. Схема притока к скважине, несовершенной по степени вскрытия.

ный $Q_{дон}$, который рассчитывается как для полусферической скважины (§ 2, гл. I). Тогда $Q = Q_{рад} + Q_{дон}$, где Q — полный дебит.

Эта расчетная схема дает возможность получить порядок величин, но на высокую точность претендовать не может.

Лучшие результаты получаются, если воспользоваться методом источников и стоков, который широко применяется в гидродинамике.

Выражение потенциала для точечного стока в пространстве, как было показано выше в § 2 главы I, имеет вид (опуская произвольную постоянную):

$$Ф = -\frac{Q}{4\pi r}, \qquad (V.1.1)$$

где Q — дебит стока, а r — расстояние точки, где определяется потенциал, от этого стока.

Вдоль оси z скважины $O-O_1$ (рис. V. 2) расположим воображаемую линию, поглощающую жидкость, каждый элемент которой является стоком. Каждый элемент $d\zeta$ этой линии является элементарным стоком с дебитом $q\,d\zeta$, где через q обозначена интенсивность стоков, распределенных вдоль прямой $O-O_1$, $q = q(\zeta) = dQ/d\zeta$, где dQ — дебит элементарного стока. Дебит, приходящийся на еди-

ницу длины поглощающей линии, называется интенсивностью, причем интенсивность может быть разная в разных точках.

Элементарный потенциал, вызванный точечным стоком $q(\zeta)\,d\zeta$, определяется как потенциал точечного стока в пространстве:

$$d\Phi = -\frac{q(\zeta)\,d\zeta}{4\pi r}. \qquad \text{(V. 1. 2)}$$

Результирующий потенциал находится интегрированием выражения (V. 1. 2).

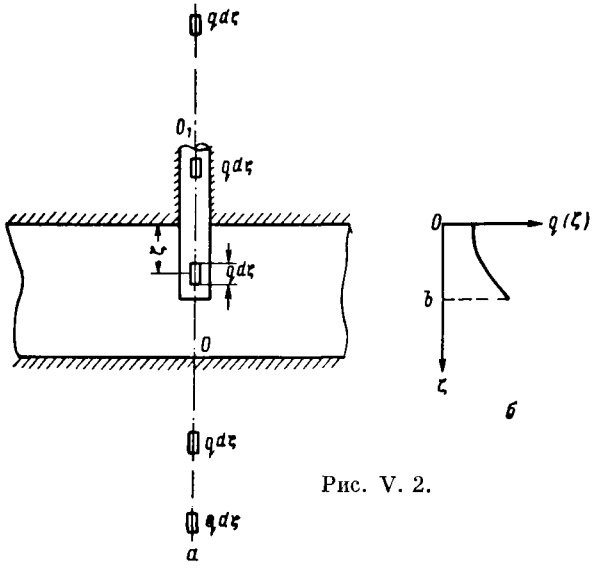


Рис. V. 2.

Нам нужно получить решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее следующим граничным условиям: кровля и подошва пласта непроницаемы, цилиндрическая поверхность $r = R_к$ является эквипотенциалью $\Phi = \Phi_к$, внутренняя граница скважины — поверхность забоя — также является эквипотенциальной поверхностью $\Phi = \Phi_с$.

Этим граничным условиям можно удовлетворить при помощи следующих операций.

Возьмем две параллельные плоскости — кровлю и подошву — и рассмотрим изолированно элемент стока $q\,d\zeta$ (рис. V. 2).

Чтобы кровлю пласта можно было рассматривать как непроницаемую границу, нужно отразить наш элементарный сток $q\,d\zeta$ в кровле пласта и приписать дебиту изображения знак плюс, т. е. тот же знак, что у действительного элементарного стока.

Очевидно, суммарное действие этих двух стоков в силу симметрии будет таким, что расход сквозь кровлю будет равен нулю.

Но расход сквозь подошву при этом не равен нулю.

Нужно отразить наш элемент $qd\zeta$ в кровле и в подошве бесчисленное множество раз. Картина будет такая, как если бы точка $qd\zeta$ находилась между двумя параллельными зеркалами.

Получится бесконечная система изображений, и только такая система с одинаковыми знаками дебитов обеспечит благодаря симметрии выполнение условий непроницаемости кровли и подошвы.

Однако эта бесконечная система изображений элементарных стоков не удовлетворяет пока другим граничным условиям $\Phi = \Phi_к$ на контуре питания и $\Phi = \Phi_с$ на контуре скважины.

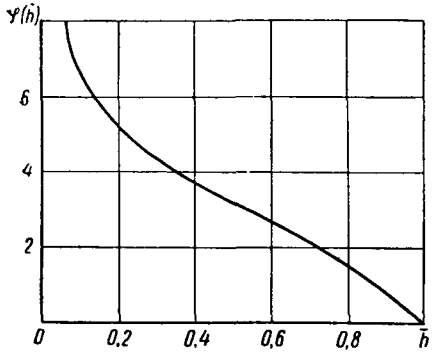


Рис. V. 3.

Это достигается следующим образом. Условия на контуре питания и на скважине удовлетворяются надлежащим выбором зависимости интенсивности $q(\zeta)$.

Один и тот же дебит может быть получен при различных видах интенсивности $q(\zeta)$, так как

$$Q = \int_0^e q(\zeta)\, d\zeta.$$

Эпюра интенсивности расходов $q(\zeta)$ вблизи скважины имеет приблизительно вид, показанный на рис. V. 2, *б*.

Этим методом Маскет получил следующую формулу для дебита несовершенной скважины с донным притоком [Лт. I. 11]:

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_к - \Phi_с)}{\xi}, \qquad (V.1.3)$$

где безразмерный знаменатель ξ равен

$$\xi = \frac{1}{2\bar{h}}\left[2\ln\frac{4h}{r_с} - \varphi(\bar{h})\right] - \ln\frac{4h}{R_к} \qquad (V.1.4)$$

$$\bar{h} = \frac{b}{h}. \qquad (V.1.5)$$

— относительное вскрытие пласта.

Функция $\varphi(\bar{h})$ определяется из рис. V. 3.

Развернутое выражение функции $\varphi(\bar{h})$ имеет следующий вид:

$$\varphi(\bar{h}) = \ln\frac{\Gamma(0{,}875\,\bar{h})\,\Gamma(0{,}125\,\bar{h})}{\Gamma(1-0{,}875\,\bar{h})\,\Gamma(1-0{,}125\,\bar{h})}, \qquad (V.1.6)$$

где Γ — обозначение интеграла Эйлера второго рода, называемого гамма-функцией:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Когда n — целое число ($n = 1, 2, \ldots$), она имеет очень простой вид:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Гамма-функция удовлетворяет рекуррентному соотношению $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, являющемуся ее основным свойством.

Для гамма-функции имеются таблицы в математических справочниках [1].

Зная эти зависимости и имея таблицы, можно выполнять расчеты довольно просто. При отсутствии таблиц расчеты дебитов производятся при помощи графика, приведенного на рис. V. 3.

Распределение потенциала при $q(\xi) = \text{const}$ Маскет получил в виде двух различных представлений для больших и малых значений расстояния r до оси скважины (рис. V. 2):

при $r \leqslant 2h$

$$\Phi = -\frac{Q}{4\pi b}\left\{-\ln\frac{\Gamma(1+w+x)\,\Gamma(1-w+x)}{\Gamma(1-w-x)\,\Gamma(1+w-x)} + \right.$$

$$+\ln\frac{w+x+[\varrho^2+(w+x)^2]^{\frac{1}{2}}}{w-x+[\varrho^2+(w-x)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{4}\varrho^2[\zeta(2,1-w-x) -$$

$$\left. -\zeta(2,1-w+x)+\zeta(2,1+w-x)-\zeta(2,1+w+x)]+\right.$$

$$+O(\varrho^4)+\text{const}, \qquad \text{(V. 1. 7)}$$

$$\varrho = \frac{r}{2h}, \quad w = \frac{z}{2h},$$

$$x = \frac{b}{2h}, \quad \zeta(s,y) = \sum_0^\infty \frac{1}{(n+y)^s}, \qquad \text{(V. 1. 8)}$$

где $\zeta(s, y)$ — обобщенная дзета-функция Римана, таблицы которой приведены в работе [2];

при $r \geqslant 2h$

$$\Phi = -\frac{Q}{\pi b}\left[\frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{n} K_0(2\pi n\varrho)\cos(2\pi nw)\sin(2\pi nx) + \right.$$

$$\left. + x\ln\frac{2}{\varrho}\right] + \text{const}; \qquad \text{(V. 1. 9)}$$

где K_0 — функция Бесселя мнимого аргумента второго рода нулевого порядка.

Ряд задач о притоке к несовершенным скважинам в однослойном и многослойном пластах был рассмотрен Ю. И. Стклянным [3, 4] методом интегральных преобразований [5, 6], позволяющим свести задачу интегрирования линейных уравнений в частных производных, в частности уравнения Лапласа, к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. При распределении вдоль прямой линии стоков (рис. V. 2) с постоянной интенсивностью $q(\zeta) = q = \text{const}$ Ю. И. Стклянин получил следующее представление для потенциала:

$z < b$,

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi b} \ln \frac{r}{R_к} + \frac{Q}{\pi b} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu_i \varkappa \frac{z}{R_к} \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \frac{h-b}{R_к} J_0\left(\frac{r}{R_к} \mu_i\right)}{\mu_i^2 \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \frac{h}{R_к} J_1^2(\mu_i)}; \qquad \text{(V. 1. 10)}$$

$z > b$,

$$\Phi = -\frac{Q}{\pi b} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu_i \varkappa \frac{h-z}{R} \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \frac{b}{R_к} J_0\left(\frac{r}{R_к} \mu_i\right)}{\mu_i^2 \operatorname{sh} \mu_i \varkappa \frac{h_0}{R_0} J_1^2(\mu_i)}, \qquad \text{(V. 1. 11)}$$

$\varkappa^2 = k/k_z$, k_z — вертикальная проницаемость, $J_0\left(\frac{r}{R_к} \mu_i\right)$, $J_1(\mu_i)$ — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка соответственно; μ_i — положительный корень уравнения $J_0(\mu_i) = 0$.

Приток к несовершенным скважинам является задачей, которую можно моделировать также на электролитических моделях, что в широких масштабах было выполнено В. И. Щуровым [7; Лт. I. 16].

Некоторые результаты, полученные также на электролитических моделях, приведены в работах [8, 9].

Это моделирование производится следующим образом. Ванна заполняется электролитом. В электролит погружается один кольцевой электрод, моделирующий контур питания. В центре ванны погружается электрод на заданную глубину, причем степень погружения электрода определяет степень относительного вскрытия пласта. К кольцевому электроду и к внутреннему электроду подводится разность потенциалов — аналог перепада давления; сила тока является аналогом дебита.

Таким образом, В. И. Щуров построил множество кривых, характеризующих приток жидкости к скважинам, с разнообразной

степенью несовершенства как по величине, так и по характеру вскрытия.

Укажем далее работу М. М. Глоговского [10], посвященную притоку к несовершенной скважине с различными видами несовершенства. М. М. Глоговский рассмотрел приток к обсаженной скважине, вскрывающей пласт на всю мощность, но перфорированную в различных интервалах.

Интервалы перфорации не всегда находятся в самом верху скважины. Иногда скважину перфорируют на некотором интервале в средней части ствола.

Решение осложняется следующим обстоятельством. На интервале перфорации задан потенциал. На обсаженной части задано условие, что труба непроницаема, т. е. $\partial \Phi/\partial n = 0$.

Следовательно, получается разрывное условие: на одной части цилиндрической поверхности задана функция, а на других частях ее производные.

Задачи такого рода со смешанными в данном случае разрывными граничными условиями иногда называются задачами Гильберта и относятся к числу весьма сложных задач математической физики. М. М. Глоговский показал, что точное решение приводит к бесконечной системе уравнений с бесконечным числом неизвестных. Для численных расчетов эту систему приходится урезать, например, оставлять всего десять уравнений с десятью неизвестными.

Эффективное приближенное решение, основанное на замене задачи Гильберта задачей с однородными граничными условиями, изложено ниже в § 3.

Результаты решения М. М. Глоговского показывают, что положение интервала перфорации сравнительно мало влияет на величину дебита.

Если глубина вскрытия не слишком мала, то формула Маскета дает хорошие результаты, а так как она проще остальных формул, то ею обычно и пользуются для скважин, несовершенных по степени вскрытия, но совершенных по характеру вскрытия.

Еще одно существенное замечание. Формула Маскета (V. 1. 3) получена при условии, что радиус пласта $R_к$ больше его мощности h[1]. Однако этой формулой можно также пользоваться, когда радиус пласта меньше мощности, до значений $R_к \geqslant {}^1/_2 h$, хотя в этом случае формула будет давать менее точные результаты.

Приведем еще формулу Н. К. Гиринского [11] для дебита скважины в пласте бесконечной мощности (рис. V. 4):

$$Q = \frac{2\pi b (\Phi_к - \Phi_с)}{\ln \frac{1{,}6\, b}{r_с}}, \qquad (V.1.12)$$

[1] Отношение $\frac{h}{r_с}$ должно быть не меньше нескольких десятков.

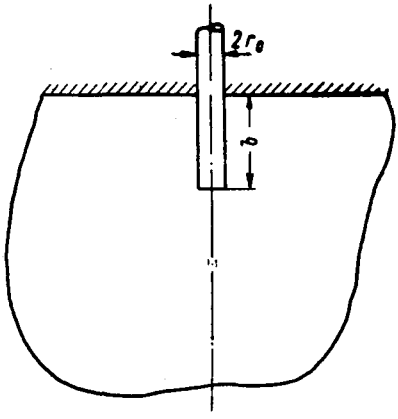


Рис. V. 4. Схема притока к несовершенной скважине в пласте бесконечной мощности.

полученную интегрированием потенциалов, вызванных элементарными стоками согласно (V. 1. 2), вдоль оси скважины на длине b и соответствующим отражением в кровле пласта.

Формула (V. 1. 12) получена в результате замены полуэллипсоида вращения, который является эквипотенциальной поверхностью при $q(\zeta) = \text{const}$, эквивалентным цилиндром. Точность формулы (V. 1. 12) для практических целей вполне достаточная при $b \gg r_c$.

Отметим в заключение, что этот круг задач (так же, как и задачи интерференции скважин) имеет очень много общего с аналогичными в математическом отношении задачами электростатики, распространения электрических токов в земле (теория заземления) и электроразведкой [12, 13, 14].

§ 2. Интерференция несовершенных скважин. Приведенный радиус несовершенной скважины

Строгое теоретическое решение задачи об интерференции несовершенных скважин наталкивается на почти непреодолимые математические затруднения.

Отдельные частные случаи были рассмотрены Б. И. Сегалом [15, 16].

Решение Б. И. Сегала имеет чрезвычайно сложную форму и было использовано как эталон, с которым можно было сравнить результаты более простого решения [Лт. II. 9], приведенного ниже.

Рассмотрим характерные линии тока при притоке к несовершенной скважине. Они будут иметь вид, примерно показанный на рис. V. 5.

Эквипотенциальные поверхности должны быть перпендикулярны линиям тока.

Проведем вокруг скважины цилиндрическую поверхность радиусом R_0, равным или бо́льшим мощности пласта: $R_0 \geqslant h$. При этом область движения искусственно разбивается на две зоны. Первая — в интервале между контуром питания и радиусом R_0. В этой зоне движение можно считать плоским. Вторая — в интервале между радиусом скважины r_c и нашей цилиндрической поверхностью R_0, где движение будет существенно пространственное.

Рассмотрим план нефтяного месторождения, вскрытого множеством несовершенных скважин (рис. V. 6).

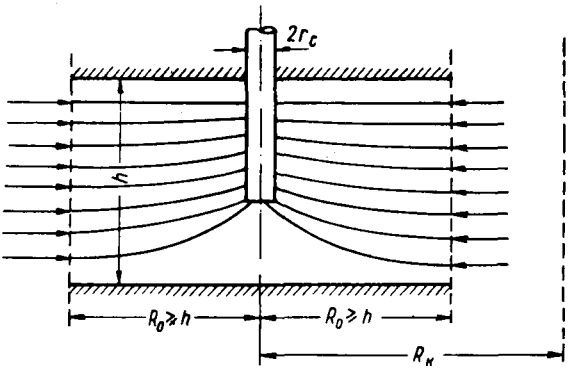


Рис. V. 5. Схема линий тока при притоке к несовершенной скважине.

Внутри контура расставлено множество несовершенных скважин радиусами r_c и с забойными потенциалами Φ_c. Забойные потенциалы, радиусы и степени вскрытия могут быть различными. Расстояние между скважинами обычно гораздо больше мощности пласта.

Каждую несовершенную скважину можно окружить мысленно цилиндрической поверхностью радиусом R_0, и эти цилиндрические поверхности рассматривать как воображаемые совершенные скважины. Приток к совершенным скважинам рассчитывается по формулам плоской интерференции скважин. Появляется дополнительное неизвестное — потенциал Φ_0 — на контуре воображаемой совершенной скважины.

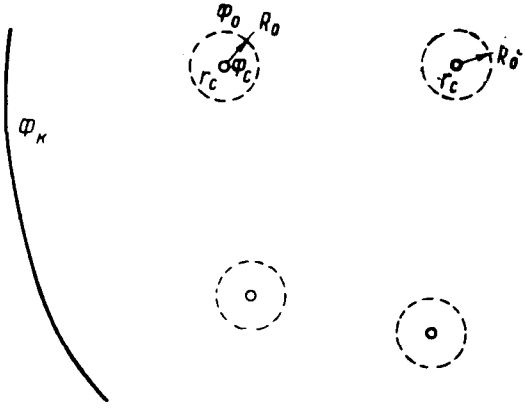


Рис. V. 6.

Решение задачи о притоке к совершенным скважинам радиусом R_0 сводится к решению системы (IV. 3. 6) — (IV. 3. 8), что дает для дебита формулу вида

$$Q = \frac{2\pi h (A - \Phi_0)}{\ln \frac{B}{R_0}}, \qquad (V.2.1)$$

где A, B — некоторые постоянные, зависящие от числа и расположения скважин.

Кроме того, этот же дебит равняется дебиту действительной несовершенной скважины:

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_0 - \Phi_c)}{\xi_0}, \qquad (V.2.2)$$

где ξ_0 вычисляется из формулы (V.1.4) в предположении, что $R_к = R_0 \approx h$. Приравнивая (V.2.1) и (V.2.2.), имеем

$$\frac{A - \Phi_0}{\ln \frac{B}{R_0}} = \frac{\Phi_0 - \Phi_c}{\xi_0}.$$

Отсюда получаем

$$Q = \frac{2\pi h (A - \Phi_c)}{\ln \frac{B}{R_0} + \xi_0}. \qquad (V.2.3)$$

Таким образом, нужно решить задачу об интерференции совершенных скважин радиусом R_0 и увеличить фильтрационное сопротивление, обусловливающее приток к воображаемым совершенным скважинам, на величину ξ_0.

Формулу (V.2.3) можно еще упростить следующим образом. Представим ξ_0 в таком виде:

$$\xi_0 = \ln \frac{R_0}{r_c} + \xi_0 - \ln \frac{R_0}{r_c} = \ln \frac{R_0}{r_c} + C, \qquad (V.2.4)$$

где

$$C = \xi_0 - \ln \frac{R_0}{r_c} \qquad (V.2.5)$$

так называемое фильтрационное сопротивление, обусловленное несовершенством скважины.

Учитывая формулу (V.1.4), для C получаем

$$C = \frac{1}{2\bar{h}} \left[2 \ln \frac{4h}{r_c} - \varphi(\bar{h}) \right] - \ln \frac{4h}{R_0} - \ln \frac{R_0}{r_c}.$$

Раскрывая скобки, видим, что $\ln R_0$ сокращается и формула приобретает следующий простой вид:

$$C = \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1 \right) \ln \frac{4h}{r_c} - \frac{1}{2\bar{h}} \varphi(\bar{h}). \qquad (V.2.6)$$

Другие формулы для C в случае обсаженной скважины, т. е. скважины без донного притока, приведены в [Лт. IV. 2; Лт. I. 8 Лт. I. 16).

Величина C, т. е. добавка к фильтрационному сопротивлению совершенной скважины радиусом r_c, не зависит от радиуса R_0,

разумеется, при условии, что $R_0 \geqslant h$ или в крайнем случае $R_0 \geqslant \frac{1}{2} h$.

Подставляя значение ζ_0 из формулы (V. 2. 4), получаем для дебита скважины вместо формулы (V. 2. 3) уравнение

$$Q = \frac{2\pi h (A - \Phi_c)}{\ln \frac{B}{R_0} + \ln \frac{R_0}{r_c} + C} = \frac{2\pi h (A - \Phi_c)}{\ln \frac{B}{r_c} + C} . \qquad \text{(V. 2. 7)}$$

Из сравнения формул (V. 2. 3) и (V. 2. 7) получается следующий чрезвычайно простой способ для решения задачи.

Вначале определяется дебит совершенных скважин радиусами r_c по формулам теории интерференции для притока к стокам и источникам на плоскости, а затем фильтрационное сопротивление каждой скважины увеличивается на величину C, определяемую формулой (V. 2. 6) и зависящую только от характеристики вскрытия.

Для формулы (V. 2. 6) на рис. V. 7 приведен график зависимости $C = C(\bar{h})$.

Этот график построен для отношения $\frac{h}{r_c} = 100$.

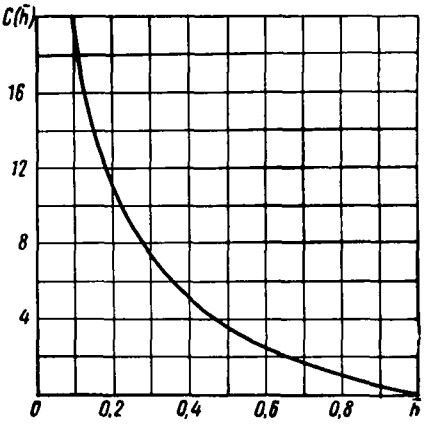


Рис. V. 7. График безразмерного фильтрационного сопротивления для несовершенной скважины без донного притока.

Для других отношений $\frac{h}{r_c}$ его ординаты, как легко видеть, следует увеличить на величину $\left(\frac{1}{\bar{h}} - 1\right) \ln \frac{0{,}01\, h}{r_c}$.

В. И. Щуров опытами на электролитических моделях скважин с двойным видом несовершенства показал [7, Лт. I. 16; Лт. I. 8], что если, кроме того, скважина перфорирована, то C следует соответствующим образом увеличить. Об этом будет сказано в § 4, 5.

Рассмотрим более подробно знаменатель формулы (V. 2. 7). Его можно представить таким образом:

$$\ln \frac{B}{r_c} + C = \ln \frac{B}{r_c e^{-C}} .$$

Обозначим

$$r_c e^{-C} = r_c' . \qquad \text{(V. 2. 8)}$$

Произведение $r_c e^{-C} = r_c'$ можно назвать приведенным радиусом несовершенной скважины. Это — радиус совершенной скважины,

дебит которой равняется дебиту нашей несовершенной скважины. Получаем

$$\ln \frac{B}{r_c} + C = \ln \frac{B}{r_c'}.$$

Таким образом, вначале находятся приведенные радиусы r_c' и дальнейший расчет ведется, как для совершенных скважин радиусами r_c'.

Все эти выводы сохраняются для скважин с любым видом несовершенства, с любым фильтром, для которого задано значение C.

Значения C можно найти по опытам В. И. Щурова и по материалам, приведенным в журнальной литературе.

Упомянем о другом методе расчета, основанном на коэффициенте несовершенства скважин.

Рассмотрим несовершенную скважину в центре кругового пласта радиусом R_0 с контурным потенциалом Φ_0. Дебит этой скважины, как мы видели, равен

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_0 - \Phi_c)}{\xi_0}$$

или

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_0 - \Phi_0)}{\ln \frac{R_0}{r_c} + C}. \qquad \text{(V. 2. 9)}$$

Коэффициент C от радиуса R_0 не зависит, а зависит только от вскрытия, разумеется, при условии $R_0 \geqslant \frac{1}{2}h$, которое обычно имеет место.

Дебит совершенной скважины в этих же условиях равняется

$$Q_{сов} = \frac{2\pi h (\Phi_0 - \Phi_c)}{\ln \frac{R_0}{r_c}}. \qquad \text{(V. 2. 10)}$$

В литературе вместо коэффициента C иногда приводятся графики так называемого коэффициента совершенства скважин

$$\eta = \frac{Q}{Q_{сов}}, \qquad \text{(V. 2. 11)}$$

примерный вид которых показан на рис. V. 8.

Коэффициентом совершенства скважины называется отношение дебита несовершенной скважины Q к дебиту совершенной скважины $Q_{сов}$ в тех же условиях.

Неудобство этих графиков заключается в том, что они всегда даны для фиксированного отношения R_0/r_c и пользоваться ими непосредственно для решения задачи интерференции скважин нельзя, потому что R_0/r_c может быть самым разнообразным.

Однако, имея график для коэффициента совершенства η, можно рассчитать соответствующее значение C.

Из формул (V. 2. 8), (V. 2. 9) и (V. 2. 10) следует

$$\eta = \frac{Q}{Q_{\text{сов}}} = \frac{\ln \frac{R_0}{r_c}}{\ln \frac{R_0}{r_c} + C}. \qquad \text{(V. 2. 12)}$$

Решая последнее уравнение, получаем

$$C = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) \ln \frac{R_0}{r_c}. \qquad \text{(V. 2. 13)}$$

Имея графики коэффициента η и зная, для какого радиуса R_0 пласта они построены, можно использовать их для правильной методики расчета.

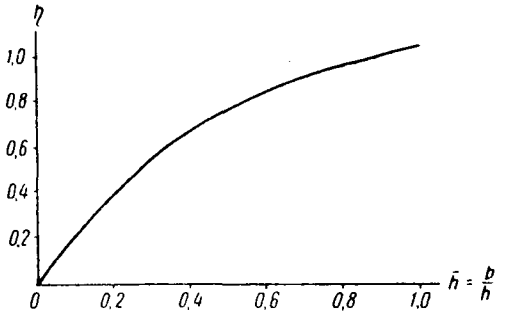


Рис. V. 8. График коэффициента совершенства.

Фильтрационное сопротивление C, обусловленное несовершенством скважины или, что то же, ее приведенный радиус r'_c, как указывалось, практически не зависит от расстояния между скважинами, когда оно равно или больше мощности пласта. Если же расстояние между скважинами меньше мощности пласта (такие случаи близкого расположения скважин встречаются иногда в горнорудных и гидротехнических задачах, связанных с осушением предназначенных для разработки пластов полезных ископаемых или водопонижением [17]), то C зависит также от расстояния между скважинами. Этим вопросам посвящены работы Л. Н. Павловской [18] и И. Н. Кочиной [19].

§ 3. Расчет фильтрационного сопротивления, обусловленного несовершенством скважины в однородно-анизотропном пласте

Как известно, простым преобразованием масштабов движение в условиях однородно-анизотропного пласта может быть сведено к движению в однородном пласте.

В однородно-анизотропном пласте горизонтальные u, v и вертикальная w проекции скорости фильтрации имеют вид:

$$u = -\frac{k_r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad v = -\frac{k_r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad w = -\frac{k_z}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad \text{(V. 3. 1)}$$

где k_r — проницаемость в направлении параллельно пласту; k_z — проницаемость в направлении оси z перпендикулярно пласту.

Считая жидкость несжимаемой, из уравнения неразрывности $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ получаем

$$k_r\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)+k_z\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0. \qquad \text{(V.3.2)}$$

Введем в рассмотрение Φ — фильтрационный потенциал, определяемый по горизонтальной проницаемости. Тогда вместо (V.3.2) получим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0,\quad \frac{k_r}{\mu}p=\Phi,\quad \varkappa^2=\frac{k_r}{k_z}. \qquad \text{(V.3.3)}$$

Заменой переменного $\varkappa z=z'$ уравнение (V.3.3) обращается в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z'^2}=0. \qquad \text{(V.3.4)}$$

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Найдем распределение потенциала в однородно-анизотропном пласте мощностью h, вскрытом скважиной, при следующих условиях.

Условия непроницаемости кровли и подошвы

$$z=0,\quad z=h,\quad (r_c\leqslant r\leqslant R_0),\quad -\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0; \qquad \text{(V.3.5)}$$

на области питания

$$r=R_0,\quad (0\leqslant z\leqslant h)\quad \Phi=\Phi_0; \qquad \text{(V.3.6)}$$

на стенке скважины $r=r_c$ задан переменный расход на единицу длины вдоль оси скважины-стока:

$$r=r_c,\quad \left(2\pi r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)_{r=r_c}=q(z)\quad (0\leqslant z\leqslant h). \qquad \text{(V.3.7)}$$

Вид функции $q(z)$ может быть произвольным с единственным ограничением — предполагается, что $q(z)$ удовлетворяет условиям Дирихле [Лт. III. 7].

Решение уравнения Лапласа (V.3.4) получается обычным методом разделения переменных. Рассмотрим сначала случай однородно-изотропного пласта, когда $\varkappa=1$, $z=z'$.

В силу симметрии уравнение Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0, \qquad \text{(V.3.8)}$$

и решение его не будет зависеть от полярного угла θ.

Решение уравнения (V.3.8) будем искать в виде

$$\Phi = R(r)\,Z(z), \qquad \text{(V.3.9)}$$

где $R(r), Z(z)$ — неизвестные пока функции, зависящие соответственно от аргументов r и z.

Подставляя (V.3.9) в (V.3.8), получаем

$$Z\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) + RZ'' = 0$$

или

$$-\frac{Z''}{Z} = \frac{1}{R}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right) = \pm\lambda^2. \qquad \text{(V.3.10)}$$

Поскольку левая и правая части (V.3.10) зависят только от одной переменной — соответственно z, r, равенство (V.3.10) может выполняться тождественно только при условии, что левая и правая части равны постоянной величине $\pm\lambda^2$, которая предполагается вещественной.

Уравнение (V.3.10) расщепляется на два уравнения:

$$Z'' \pm \lambda^2 Z = 0, \qquad \text{(V.3.11)}$$

$$R'' + \frac{1}{r}R' \mp \lambda^2 R = 0. \qquad \text{(V.3.12)}$$

Если в (V.3.10) при λ^2 стоит знак минус, то линейно независимые решения уравнений (V.3.11) и (V.3.12) имеют вид:

$$Z = e^{-\lambda z},\ e^{\lambda z}; \quad R = J_0(\lambda r),\ Y_0(\lambda r), \qquad \text{(V.3.13)}$$

где J_0, Y_0 — функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка вещественного аргумента.

Если в (V.3.10) при λ^2 стоит знак плюс, то линейно независимые решения уравнений (V.3.11) и (V.3.12) суть

$$Z = \sin\lambda z,\ \cos\lambda z; \quad R = I_0(\lambda r),\ K_0(\lambda r). \qquad \text{(V.3.14)}$$

где I_0, K_0 — функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка мнимого аргумента [20].

При $\lambda = 0$

$$Z = c_1 z + c_2,\ R = c_3 \ln r + c_4. \qquad \text{(V.3.15)}$$

Так как при $z = 0$ согласно граничным условиям должно быть $\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$, то решения (V.3.13), а следовательно, и знак минус отпадают. Этому же граничному условию из решений (V.3.14) удовлетворяет только функция $\cos\lambda z$. Для выполнения условий на

подошве пласта $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = h\right)$ необходимо, чтобы $-\lambda \sin \lambda h = 0$, откуда

$$\lambda = \frac{n\pi}{h} (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Это дает основание искать решение в виде

$$\Phi = c_0 + c_1 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n I_0 \left(\frac{n\pi r}{h} \right) + B_n K_0 \left(\frac{n\pi r}{h} \right) \right] \cos \frac{n\pi z}{h} \qquad (V.3.16)$$

или в общем случае $\varkappa \neq 1$ в виде

$$\Phi = c_0 + c_1 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n I_0 \left(\frac{n\pi r}{h'} \right) + B_n K_0 \left(\frac{n\pi r}{h'} \right) \right] \cos \frac{n\pi z}{h}, \qquad (V.3.17)$$

где

$$h' = \varkappa h; \qquad (V.3.18)$$

c_0, c_1, A_n, B_n — постоянные, подлежащие определению из граничных условий на поверхностях $r = r_c$, $r = R_0$.

Для решения необходимо предварительно $q(z)$ разложить в ряд Фурье по косинусам в интервале $0 < z < h$:

$$q(z) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos \frac{n\pi z}{h}, \qquad (V.3.19)$$

$$q_0 = \frac{1}{h} \int_0^h q(z)\, dz, \quad q_n = \frac{2}{h} \int_0^h q(z) \cos \frac{n\pi z}{h}\, dz. \qquad (V.3.20)$$

После простых вычислений получаем распределение потенциала, удовлетворяющее всем граничным условиям, в следующем виде:

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{q_0}{2\pi} \ln \frac{R_0}{r} + \frac{\varkappa h}{2\pi^2 r_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U\left(\frac{n\pi r}{\varkappa h}\right)}{n U'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)} q_n \cos \frac{n\pi z}{h}, \qquad (V.3.21)$$

где

$$U\left(\frac{n\pi r}{\varkappa h}\right) = I_0\left(\frac{n\pi r}{\varkappa h}\right) K_0\left(\frac{n\pi R_0}{\varkappa h}\right) - I_0\left(\frac{n\pi R_0}{\varkappa h}\right) K_0\left(\frac{n\pi r}{\varkappa h}\right), \qquad (V.3.22)$$

$$U'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right) = I_1\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right) K_0\left(\frac{n\pi R_0}{\varkappa h}\right) + I_0\left(\frac{n\pi R_0}{\varkappa h}\right) K_1\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right). \qquad (V.3.23)$$

В реальных условиях на вскрытой части стенки скважины задано забойное давление, т. е. забойный потенциал Φ_c, а на не вскрытой обсаженной части — условие равенства нулю радиальной скорости фильтрации. Таким образом, в точной постановке имеем задачу Гильберта теории потенциала для осесимметричного движения. Для коэффициентов в (V. 3. 16) при этом получается бесконечная система уравнений. В такой постановке задача впервые рассматривалась М. М. Глоговским [10], давшим ее приближенное решение заменой бесконечной системы уравнений усеченной системой из 10 уравнений, которые решались численно.

Выше рассмотрена более простая задача с однородными граничными условиями.

Покажем теперь, что если на некотором участке вдоль стенки скважины одно распределение давления заменяется другим, статически эквивалентным, то дебит скважины в реальных условиях будет меняться незначительно.

Для этого выберем функцию $q(z)$ следующим образом:

$$q(z) = \frac{Q}{b} = \text{const}, \quad 0 \leqslant z \leqslant b; \quad q(z) = 0, \quad b \leqslant z \leqslant h. \quad \text{(V. 3. 24)}$$

Здесь Q — дебит скважины, равномерно распределенный вдоль отрезка b. Ниже скважина обсажена. Из (V. 3. 20) для этого случая имеем

$$q_0 = \frac{Q}{h}, \quad q_n = \frac{2Q}{n\pi b} \sin \frac{n\pi b}{h}, \quad \text{(V. 3. 25)}$$

тогда формула (V. 3. 21) принимает вид:

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{R_0}{r} + \frac{Q\varkappa h}{\pi^3 b r_c} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U\left(\frac{n\pi r}{\varkappa h}\right)}{n^2 U'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)} \sin \frac{n\pi b}{h} \cos \frac{n\pi z}{h}. \quad \text{(V. 3. 26)}$$

Найдем теперь среднее значение потенциала вдоль вскрытой части на некотором участке $0 < z < b_1$, причем возможны случаи $b_1 = b$, $b_1 \neq b$:

$$\overline{\Phi}_{b_1} = \frac{1}{b_1} \int_0^{b_1} \Phi(r_c, z)\, dz = \Phi_0 - \frac{Q}{2\pi h} \ln \frac{R_0}{r_c} +$$

$$+ \frac{Q\varkappa h^2}{\pi^4 b b_1 r_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}{n^3 U'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)} \sin \frac{n\pi b}{h} \sin \frac{n\pi b_1}{h}. \quad \text{(V. 3. 27)}$$

Последнюю формулу можно представить еще так:

$$\overline{\Phi}_{b_1} = \Phi_0 - \frac{Q}{2\pi h}\left[\ln\frac{R_0}{r_c} - \frac{2\varkappa h^3}{\pi^3 b b_1 r_c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}{n^3 U'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\sin\frac{n\pi b}{h}\sin\frac{n\pi b_1}{h}\right]. \qquad \text{(V.3.28)}$$

Обозначим

$$\varphi = \frac{\pi b}{h}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi b_1}{h}, \qquad \text{(V.3.29)}$$

$$C = -\frac{2\varkappa h^3}{\pi^3 b b_1 r_c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}{n^3 U'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}\sin\frac{n\pi b}{h}\sin\frac{n\pi b_1}{h} =$$

$$= -\frac{2\varkappa h}{\pi r_c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}{nU'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}\frac{\sin n\varphi}{n\varphi}\frac{\sin n\varphi_1}{n\varphi_1}. \qquad \text{(V.3.30)}$$

Тогда согласно (V.3.28)

$$\overline{\Phi}_{b_1} = \Phi_0 - \frac{Q}{2\pi h}\left(\ln\frac{R_0}{r_c} + C\right), \quad Q = \frac{2\pi h(\Phi_0 - \overline{\Phi}_{b_1})}{\ln\frac{R_0}{r_c} + C}. \qquad \text{(V.3.31)}$$

Таким образом, C можно рассматривать как фильтрационное сопротивление, обусловленное несовершенством скважины, если под забойным потенциалом подразумевать $\overline{\Phi}_{b_1}$.

Для случая $\varkappa = 1$, $b = b_1$ (V.3.30) обращается в формулу

$$C = -\frac{2h}{\pi r_c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U\left(\frac{n\pi r_c}{h}\right)}{nU'\left(\frac{n\pi r_c}{h}\right)}\frac{\sin^2 n\varphi}{n^2\varphi^2}. \qquad \text{(V.3.32)}$$

Рассмотрим теперь два крайних случая.

1. Пусть b и b_1 малы, причем пусть $b \to 0$. Тогда согласно (V.3.30)

$$C = -\frac{2\varkappa h}{\pi r_c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}{nU'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}\frac{\sin n\varphi_1}{n\varphi_1}. \qquad \text{(V.3.33)}$$

2. Пусть теперь $b = b_1$. Тогда

$$C = -\frac{2\varkappa h}{\pi r_c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}{nU'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)} \frac{\sin^2 n\varphi}{n^2\varphi^2}. \qquad \text{(V.3.34)}$$

При малых значениях $\varphi_1 = \frac{n\pi b_1}{h}$ оба ряда близки.

Таким образом, такие крайние случаи — сосредоточенный расход ($b = 0$) и равномерно распределенный расход ($b = b_1$) — мало отражаются на величине C, если b_1 мало. Отсюда следует, что так как C определяет среднее значение потенциала вдоль b_1 при фиксированном дебите Q, то различные вариации потенциала вдоль b_1 при сохранении его среднего значения мало отражаются на величине дебита. Этот факт был установлен также К. Ф. Ширинovым [21], который непосредственно вычислил величины C при разных видах функции $q(z)$, и использован далее В. Н. Николаевским [45]. Прямым дополнительным подтверждением этого положения, высказанного ранее в работах [22, 23], являются эксперименты Ю. Г. Трофименкова по электромоделированию безнапорного притока к несовершенным скважинам (рис. V. 9).

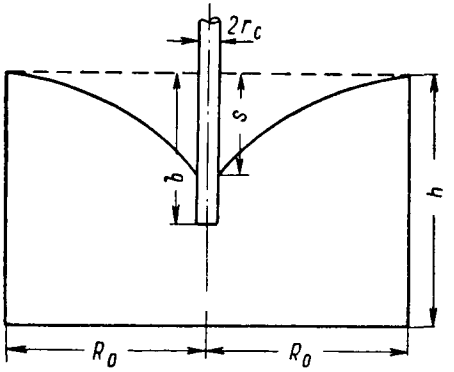


Рис. V. 9. Схема безнапорного притока к несовершенной скважине.

Из осреднения потенциала вдоль вскрытой части стенки скважины, который при безнапорном притоке является линейной функцией высоты, для дебита получается формула, вывод которой дан ниже в § 5 главы VI:

$$Q = \frac{2\pi h}{\xi} cs\left(1 - \frac{s}{2b}\right), \qquad \text{(V.3.35)}$$

где c — коэффициент фильтрации; s — понижение уровня в скважине (рис. V. 9); ξ определяется из формулы (V. 1. 4).

Сопоставление с опытными данными Ю. Г. Трофименкова было выполнено по нашей просьбе А. А. Ланитиной. Результаты приведены в табл. 1. В опытах Ю. Г. Трофименкова $h = 12$ *см*, $R_0 = 30$ *см*.

Из табл. 1 следует вполне удовлетворительное согласие экспериментов и результатов расчета с осреднением потенциала вдоль вскрытой части.

Таблица 1

r_c, *см*	b, *см*	$\overline{h}$	s, *см*	Q/c, *см*²		% расхождения
				эксперимент	формула (V. 3. 35)	
0,764	9,6	0,8	2,4	39,3	44,1	12,2
	7,2	0,6	2,4	35,6	37,7	5,9
	4,8	0,4	2,4	31,0	27,2	—12,25
	9,6	0,8	4,8	72,6	75,8	4,3
	7,2	0,6	4,8	58,7	60,1	2,38
	9,6	0,8	7,2	92,4	94,5	2,3
0,56	9,6	0,8	2,4	38,4	40,1	4,3
	7,2	0,6	2,4	32,7	33,6	2,3
	4,8	0,4	2,4	24,5	23,7	—3,3
	9,6	0,8	4,8	65,4	68,7	5,0
	7,2	0,6	4,8	52,8	53,6	1,5
	9,6	0,8	7,2	85,0	86,0	1,18
0,33	9,6	0,8	2,4	33,2	34,8	7,84
	7,2	0,6	2,4	29,1	28,4	—2,3
	4,8	0,4	2,4	21,5	19,6	—6,53
	9,6	0,8	4,8	58,7	59,6	1,53
	7,2	0,6	4,8	47,5	45,4	4,32
	9,6	0,8	7,2	73,0	74,5	2,06
					Среднее	1,82%

Покажем, что при $k_z = 0$, $\varkappa \to \infty$ и $b = b_1$ формула (V. 3. 31), как и должно быть, превращается в формулу Дюпюи для плоскорадиального притока к совершенной скважине в пласте мощностью b. Из известных формул для функций Бесселя при больших и малых значениях аргумента имеем при $\varkappa \to \infty$

$$I_0\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right) \to 1, \quad I_0\left(\frac{n\pi R_к}{\varkappa h}\right) \to 1,$$

$$I_1\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right) \to \frac{1}{2}\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}.$$

Далее при $\varkappa \to \infty$

$$K_0\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right) \to -\left(\gamma + \ln\frac{n\pi r_c}{2\varkappa h}\right),$$

$$K_0\left(\frac{n\pi R_0}{\varkappa h}\right) \to -\left(\gamma + \ln\frac{n\pi R_0}{2\varkappa h}\right),$$

$$K_1\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right) \to \left(\gamma + \ln\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)\frac{1}{2}\frac{n\pi r_c}{\varkappa h} + \frac{\varkappa h}{n\pi r_c} \to \frac{\varkappa h}{n\pi r_c},$$

где $\gamma = 0{,}577\ldots$ — эйлерова постоянная.

Согласно (V. 3. 22) и (V. 3. 23) при $\varkappa \to \infty$ получаем

$$\frac{U}{U'} \to \frac{-\left(\gamma+\ln\frac{n\pi R_0}{2\varkappa h}\right)+\left(\gamma+\ln\frac{n\pi r_c}{2\varkappa h}\right)}{-\frac{1}{2}\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\left(\gamma+\ln\frac{n\pi R_0}{2\varkappa h}\right)+\frac{\varkappa h}{n\pi r_c}} \to -\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\ln\frac{R_0}{r_c}. \quad \text{(V. 3. 36)}$$

Из (V. 3. 34) для C получаем

$$C = -\frac{2\varkappa h}{\pi r_c}\frac{-\pi r_c}{\varkappa h}\ln\frac{R_0}{r_c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{n\sin^2 n\varphi}{n^2\varphi^2} = 2\ln\frac{R_0}{r_c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\varphi}{n^2\varphi^2}. \quad \text{(V. 3. 37)}$$

Ряд в (V. 3. 37) суммируется [24]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\varphi^2}{n^2\varphi^2} = \frac{1}{2\varphi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos 2n\varphi}{n^2} = \frac{1}{2\varphi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\varphi^2}\left[\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\pi^2}{6}-\pi\varphi+\varphi^2\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\varphi}-1\right). \quad \text{(V. 3. 38)}$$

Таким образом, согласно (V. 3. 37) и (V. 3. 31), учитывая (V. 3. 29),

$$C = 2\ln\frac{R_0}{r_c}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\varphi}-1\right) = \left(\frac{\pi}{\varphi}-1\right)\ln\frac{R_0}{r_c},$$

$$Q = \frac{2\pi h(\Phi_0-\bar{\Phi}_{b_1})}{\ln\frac{R_0}{r_c}+\left(\frac{\pi}{\varphi}-1\right)\ln\frac{R_0}{r_c}} = \frac{2\pi h\varphi(\Phi_0-\bar{\Phi}_{b_1})}{\pi\ln\frac{R_0}{r_c}} =$$

$$= \frac{2\pi b(\Phi_0-\bar{\Phi}_{b_1})}{\ln\frac{R_0}{r_c}}, \quad \text{(V. 3. 39)}$$

что совпадает с формулой Дюпюи.

Для расчета C по указанным выше формулам в случае однородно-анизотропного пласта можно пользоваться формулами для изотропного, но следует заменить h на $h' = \varkappa h$.

Значения C из формулы (V. 3. 34), как нетрудно видеть из формул (V. 3. 22) и (V. 3. 23) при $R_0 \geqslant 0{,}5\varkappa h$, практически не зависят от R_0 и определяются только условиями вскрытия.

Сходимость ряда (V. 3. 34) была улучшена Я. И. Алихашкиным [25], который по нашей просьбе вычислил значения C, приведенные в табл. 2 для значений $\varkappa h = 10$ *м*, $r_c = 0{,}1$ *м*, $\varkappa h/r_c = 100$.

При $\varkappa \to \infty$ согласно (V. 3. 39)

$$C = \left(\frac{1}{\bar{h}}-1\right)\ln\frac{R_0}{r_c}. \quad \text{(V. 3. 40)}$$

Для значений r_c и R_0, не указанных в табл. 2, величина C может быть найдена интерполяцией численной или, что предпочти-

Таблица 2

R_0, м	$\frac{R_0}{r_c}$	$\bar{h}=b/h$			
		0,125	0,25	0,5	0,75
10	100	19,36	9,361	3,318	1,040
5	50	19,11	9,165	3,228	1,019
1	10	14,07	6,482	2,170	0,7203
0,5	5	10,403	4,603	1,550	0,5116
0,2	2	4,500	2,642	0,6682	0,2936

Примечание. $C = 588{,}11 \sim 590$ при $R_0 \geqslant 10$ м, $\bar{h} = 0{,}0032$.

тельнее, графической. При $\varkappa h/r_c \neq 100$, чтобы не обращаться к ряду (V. 3. 34), можно воспользоваться табл. 2, исходя из следующих соображений.

Проведем мысленно концентричную со скважиной цилиндрическую поверхность такого радиуса r_0, что $\frac{\varkappa h}{r_0} = 100$.

Тогда, конечно, если $r_c \ll \varkappa h$, движение между цилиндрическими поверхностями r_0 и r_c можно считать плоско-радиальным, следующим формуле Дюпюи (V. 3. 39), где под Φ_0 и $\bar{\Phi}_{b_1}$ следует подразумевать потенциалы на поверхностях r_0 и r_c. Дополнительное сопротивление к сопротивлению между R_0 и r_0, вычисленному в табл. 2, пренебрегая донным притоком через кольцо радиусами r_0 и r_c, площадью $|\pi (r_0^2 - r_c^2)|$, согласно (V. 3. 40) можно представить в виде

$$\Delta C = \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1\right) \ln \frac{r_0}{r_c} . \qquad \text{(V. 3. 41)}$$

Последнюю формулу можно представить в таком виде:

$$\Delta C = \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1\right) \ln \frac{r_0}{r_c} = \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1\right) \ln \left(\frac{r_0}{\varkappa h} \frac{\varkappa h}{r_c}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\bar{h}} - 1\right) \ln \frac{0{,}01\, \varkappa h}{r_c} . \qquad \text{(V. 3. 42)}$$

Таким образом, при $\frac{\varkappa h}{r_c} \neq 100$ можно сначала вычислить C при помощи табл. 2 и результат увеличить на ΔC согласно формуле (V. 3. 42).

Укажем еще способ пользования табл. 2 при малых вскрытиях, когда $\varphi = \frac{\pi b}{h} = \pi \bar{h}$ мало.

Ряд (V.3.34) можно представить еще в таком виде:

$$C(\bar{h}) = -\frac{2\varkappa h}{\pi r_c}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}{nU'\left(\frac{n\pi r_c}{\varkappa h}\right)}\frac{\sin^2[n(\pi-\varphi)](\pi-\varphi)^2}{n^2(\pi-\varphi)^2\varphi^2} =$$

$$= \frac{(\pi-\varphi)^2}{\varphi^2}C(1-\bar{h}) = \left(\frac{1-\bar{h}}{\bar{h}}\right)^2 C(1-\bar{h}), \qquad \text{(V.3.43)}$$

где $C(\bar{h})$, $C(1-\bar{h})$ — значения C при вскрытиях b и $b' = h - b$.

Значения $C(1-\bar{h})$ при малых $\bar{h}$ могут быть найдены интерполяцией при помощи табл. 2, так как $C(1) = 0$.

Выше были рассмотрены задачи притока к скважине с простейшими видами несовершенства. Ряд других случаев — приток к частично заиленной скважине, скважине в двухслойном пласте, скважине, подвергнутой гидравлическому разрыву, скважине с горизонтальным непроницаемым экраном и др. — рассмотрен в работах [26, 27, 28, 29 и др.]. Некоторые результаты, полученные на электролитических моделях скважин с различными видами несовершенства, приведены в работах [8, 9]. Следует отметить также прием, позволяющий получить завышенное значение фильтрационного сопротивления, заключающийся в следующем. Вообразим, что в фильтрационный поток при сохранении контурных граничных потенциалов на контуре питания и скважинах мысленно введена некоторая система жестких непроницаемых перегородок. Очевидно, такая система перегородок, искажающая истинную картину линий и трубок тока, соответствует увеличению фильтрационного сопротивления против действительного и уменьшению дебита. Выбирая же схему расположения этих воображаемых перегородок достаточно простой, расчет фильтрационного сопротивления можно вести по простым формулам теории одномерного движения в трубке тока переменного сечения. Этим методом было рассмотрено несколько задач о притоке к совершенным и несовершенным скважинам [30, 31], а также к скважинам, подвергнутым гидравлическому разрыву [32].

Сопоставления с некоторыми точными решениями и оценками снизу в тех случаях, когда удавалось их получить, показывают, что при этом может быть обеспечена хорошая точность — погрешность не выше 10%.

§ 4. Приток к скважинам с двойным видом несовершенства

Перейдем к расчету дебитов перфорированных скважин и скважин с двойным видом несовершенства.

Наряду с результатами экспериментов на электролитических

моделях, можно для приближенного расчета предложить некоторые аналитические методы.

Рассмотрим один из таких возможных методов на примере скважины с двойным видом несовершенства, т. е. вскрывшей пласт не на всю мощность и перфорированную (рис. V. 10).

Непосредственно к такой перфорированной скважине формулу Маскета (V. 1.4) применить нельзя, потому что она дана для скважин с открытым забоем.

Выясним характер движения вблизи отверстия. Картина линий тока будет иметь приблизительно вид, показанный на рис. V. 11.

Важно отметить, что на каком-то расстоянии r_0 от оси поток почти радиальный и влияние перфорацион-

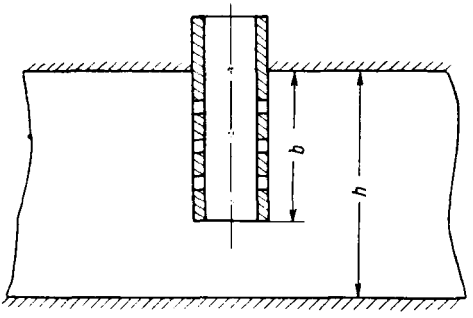
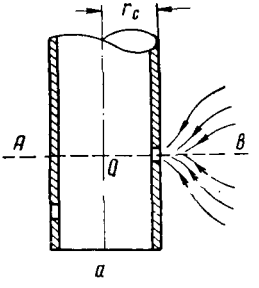


Рис. V. 10. Схема фильтра с перфорационными отверстиями.



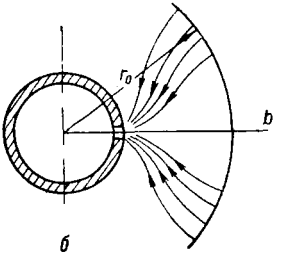


Рис. V. 11. Схема притока к перфорационному отверстию.

а — сечение скважины плоскостью, проходящей через ось; *б* — сечение скважины плоскостью, перпендикулярной оси.

ного отверстия не ощущается. Вдали от скважины влияние перфорационного отверстия практически не сказывается.

Можно предполагать, что величина r_0 будет порядка двух-трех радиусов скважины: $r_0/r_c = 2 \div 3$.

В таком случае можно провести воображаемую скважину с радиусом r_0, которую нужно рассматривать как скважину с открытым забоем (рис. V. 12).

Обозначим потенциал на стенке этой скважины Φ_0'.

Указанным выше способом производится «сшивание» решений о притоке к скважине с открытым забоем и притоке к отверстию. Вначале рассматривается приток между областями r_0 и R_0. Это движение рассматривается по формуле (V. 1. 4). Для расчета движения

же между областями r_0 и r_c нужно знать, как изменяется скорость при втекании в отверстие.

Естественно предположить, что в непосредственной близости от отверстия распределение скорости будет приближаться к радиально-сферическому, т. е. скорости будут обратно пропорциональны квадрату расстояния.

Эти соображения, более подробно изложенные в § 5, 6, позволяют оценить увеличение фильтрационного сопротивления, обусловленное перфорацией. Расчетная формула для приведенного радиуса скважины с двойным видом несовершенства имеет вид:

$$r_c' = r_c e^{-(C+C')}, \quad \text{(V. 4. 1)}$$

где C' — фильтрационное сопротивление, обусловленное перфорацией.

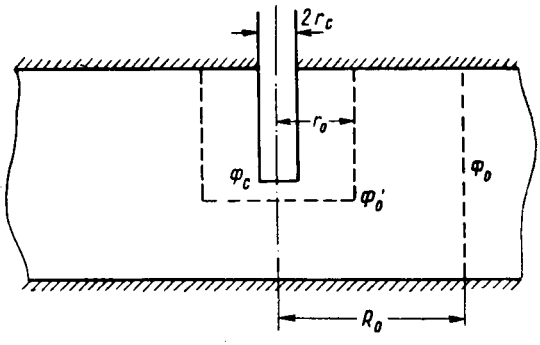


Рис. V. 12.

Обычно фильтрационное сопротивление $C_{\text{фильтр}}$, обусловленное перфорацией или фильтром, задается для скважины, вскрывшей пласт на всю мощность. Значения $C_{\text{фильтр}}$ для разных типов фильтров приведены в [Лт. I. 8, 16; Лт. IV. 2, 33]. Таким образом, эти значения $C_{\text{фильтр}}$ непосредственно пригодны для случая $b = h$. При $b \neq h$ и пользовании формулой (V. 4. 1) $C_{\text{фильтр}}$, очевидно, следует увеличить в отношении h/b. Таким образом, при расчетах, отнесенных к пласту мощностью h, можно считать

$$C' = \frac{C_{\text{фильтр}}}{\bar{h}}, \quad \text{(V. 4. 2)}$$

где

$$\bar{h} = \frac{b}{h}.$$

Сумму $C + C'$ можно определить также из опытов В. И. Щурова на электролитических моделях скважин с двойным видом несовершенства. Для ориентировочных расчетов величину C можно рассчитать из формулы (V. 1. 4) для скважины с открытым забоем, а C' — из теоретической формулы, скорректированной по опытам В. И. Щурова [34]:

$$C' \approx \frac{800\varepsilon}{Dn\bar{h}}, \quad \text{(V. 4. 3)}$$

где D — диаметр фильтрового отверстия в *см*; n — число отверстий на 1 *м* перфорированной части; $\bar{h} = b/h$; ε — безразмерный коэффициент.

Из сопоставления с опытами В. И. Щурова $\varepsilon \approx 0{,}4$ для отверстий без учета углубления пуль в породу. Если учесть углубление пуль в породу и вероятное образование незначительных каверн у отверстий, значение ε следует еще снизить примерно в 2—3 раза и полагать $\varepsilon \approx 0{,}15$. При помощи такой схемы можно рассчитать дебит перфорированной скважины и при желании учесть нарушение закона Дарси вблизи перфорационных отверстий.

Более подробно этот вопрос освещен в [34, 35, 36, 37].

§ 5. Случай обсаженной скважины, вскрытой небольшим числом перфораций

Во многих случаях скважины в нефтяных месторождениях вскрываются небольшим числом перфораций.

В однородно-анизотропном пласте после преобразования $z' = \varkappa z = \frac{k_r}{k_z} z$, т. е. приведения к однородному пласту с теми же горизонтальными размерами, а вертикальными, увеличенными в $\varkappa$ раз, круглые отверстия перейдут в эллиптические. Дебиты в обоих пластах связаны соотношением $Q = \frac{Q'}{\varkappa}$, где Q — дебит в однородно-анизотропном пласте; Q' — дебит в преобразованном. Действительно,

$$Q = 2\pi \int_0^h r \frac{\partial \Phi}{\partial r} dz = \frac{2\pi}{\varkappa} \int_0^{h'} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} dz' = \frac{Q'}{\varkappa}. \qquad \text{(V. 5. 1)}$$

Величина Φ определяется из формулы (V. 3. 3). Далее

$$Q' = \frac{2\pi h' (\Phi_0 - \Phi_c)}{\ln \frac{R_0}{r_c} + C'}, \qquad \text{(V. 5. 2)}$$

где C' — фильтрационное сопротивление, обусловленное несовершенством скважины в преобразованном пласте; Φ_0, Φ_c — потенциалы на границе $r = R_0$ и в отверстиях. Из (V. 5. 2)

$$\frac{Q'}{\varkappa} = Q = \frac{2\pi h (\Phi_0 - \Phi_c)}{\ln \frac{R_0}{r_c} + C'}. \qquad \text{(V. 5. 3)}$$

Таким образом, задача сводится к расчету C'. Обычно заданы значения C для круглых перфораций. После преобразования $z' = \varkappa z$ круглые перфорации перейдут в эллиптические. Ниже рассмотрен один из возможных методов приближенного расчета притока к скважине, вскрытой небольшим числом эллиптических отверстий, удаленных друг от друга настолько, что их взаимной интерференцией для простоты можно пренебречь.

Рассмотрим сначала приток в эллиптическую полость в неограниченном однородном пространстве. Пусть потенциалы на бесконечности и на границе эллипсоида Φ_0 и Φ_c. Эта задача эквивалентна задаче об электрическом сопротивлении заземленного эллипсоида, поэтому можно воспользоваться ее хорошо известным решением [12, 38].

Для дебита, притекающего к эллипсоиду с полуосями a_1, a_2, a_3, имеем

$$Q = \frac{\Phi_0 - \Phi_c}{\varrho}, \quad \varrho = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi + a_1^2)(\xi + a_2^2)(\xi + a_3^2)}}. \qquad \text{(V. 5. 4)}$$

Вычисление эллиптического интеграла (V. 5. 4) не представляет затруднений и всегда может быть выполнено. Для нашей задачи, когда рассматривается эллиптическое отверстие, одну из полуосей эллипсоида полагаем равной нулю, например $a_3 = 0$. Кроме того, так как приток к отверстию происходит с одной стороны, сопротивление ϱ следует удвоить:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi + a_1^2)(\xi + a_2^2)}}. \qquad \text{(V. 5. 5)}$$

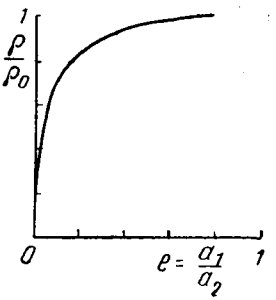


Рис. V. 13. Вспомогательный график для расчета притока к эллиптическому отверстию.

Обозначим через $a = \sqrt{a_1 a_2}$ радиус равновеликого по площади круглого отверстия и введем в рассмотрение величину

$$\varrho_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi + a^2)^2}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2)\sqrt{\xi}} = \frac{1}{4a}, \qquad \text{(V. 5. 6)}$$

Из (V. 5. 5) и (V. 5. 6) можно вычислить отношение сопротивлений:

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \varphi(e), \quad e = \frac{a_1}{a_2}, \qquad \text{(V. 5. 7)}$$

где e согласно (V. 5. 7) — отношение полуосей эллипса.

График $\varphi(e)$ согласно (V. 5. 7) представлен на рис. V. 13, причем принято $a_1 < a_2$. Таким образом, для сопротивления имеем

$$\varrho = \frac{1}{4a} \varphi\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{a_1 a_2}} \varphi\left(\frac{a_1}{a_2}\right), \qquad \text{(V. 5. 8)}$$

где $\varphi\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$ может быть определено из графика рис. V. 13.

Таким образом, согласно формуле (V. 5. 4) приток к отверстию определяется уравнением

$$Q = \frac{4(\Phi_0 - \Phi_c)\sqrt{a_1 a_2}}{\varphi\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}. \qquad (V.5.9)$$

Рассмотрим теперь движение в однородно-анизотропном пласте мощностью h, вскрытом обсаженной скважиной, перфорированной круглыми отверстиями диаметром d, причем расстояние между отверстиями считается большим по сравнению с их диаметром.

Пусть на расстоянии $R_к > h$ потенциал равен $\Phi_к$. Как уже указывалось, движение в области $R_к > r > R_0$ можно считать плоскорадиальным, причем $R_0 \approx h$.

Найдем дебит Q' в преобразованном однородном пласте мощностью $h' = \varkappa h$. При этом в области $r_c < r < R_0$ вблизи отверстий будем пользоваться формулой (V. 5. 9). Пусть число отверстий N.

Тогда, обозначая промежуточный потенциал на границе $r = R_0$ через Φ_0, получим следующие уравнения неразрывности движения:

$$\Phi_к - \Phi_0 = \frac{Q'}{2\pi h'} \ln \frac{R_к}{R_0}, \quad \Phi_0 - \Phi_c = \frac{Q'}{N} \frac{\varphi\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{4\sqrt{a_1 a_2}}. \qquad (V.5.10)$$

В (V. 5. 10) следует положить $a_1 = \frac{1}{2}d$, $a_2 = \frac{1}{2}\varkappa d$, так как обычно $\varkappa > 1$.

Тогда вместо (V. 5. 10) будет

$$\Phi_0 - \Phi_c = \frac{Q'}{N} \frac{\varphi(\varkappa^{-1})}{2d\sqrt{\varkappa}} = \frac{Q'}{2\pi h'} \frac{\pi\varphi(\varkappa^{-1})h'}{Nd\sqrt{\varkappa}}. \qquad (V.5.11)$$

Из (V. 5. 10) и (V. 5. 11) получаем

$$\Phi_к - \Phi_c = \frac{Q'}{2\pi h'}\left[\ln \frac{R_к}{R_0} + \frac{\pi h' \varphi(\varkappa^{-1})}{Nd\sqrt{\varkappa}}\right] =$$

$$= \frac{Q}{2\pi h}\left[\ln \frac{R_к}{r_c} + \frac{\pi h}{Nd}\sqrt{\varkappa}\,\varphi(\varkappa^{-1}) - \ln \frac{R_0}{r_c}\right]. \qquad (V.5.12)$$

Для создания некоторого запаса в расчете можно $\ln R_0/r_c$ в (V. 5. 12) отбросить и определять фильтрационное сопротивление C в этом случае из формулы

$$C = \frac{\pi h}{Nd}\sqrt{\varkappa}\,\varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\right). \qquad (V.5.13)$$

Отметим, что небольшое внедрение пуль в породу, как следует из опытов В. И. Щурова на электролитических моделях несовершенных скважин, значительно (в 2,5—3 раза) снижает величину C. Та-

ким образом, для скважин, вскрытых пулевой перфорацией, значение C из (V. 5. 13) можно уменьшить в 3 раза и считать

$$C \approx \frac{h}{Nd} \varkappa \varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\right). \qquad \text{(V. 5. 14)}$$

§ 6. Индикаторные кривые дебит — депрессия для однородной несжимаемой жидкости и для газа при линейном и нелинейном законах фильтрации. Интерференция скважин при двучленном законе фильтрации

Индикаторные кривые дебит — депрессия, снимаемые при установившемся режиме, являются важнейшим документом, характеризующим скважину и призабойную зону пласта.

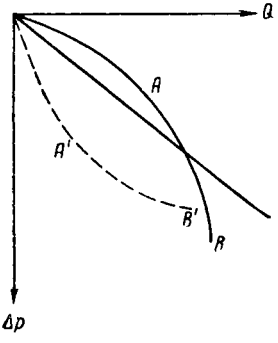


Рис. V. 14. Индикаторные кривые скважин дебит — депрессия.

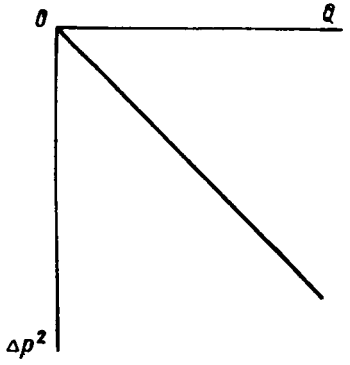


Рис. V. 15. Индикаторная кривая газовой скважины при притоке, следующему закону Дарси.

Для нефтяных скважин, когда справедлив закон Дарси во всей области течения, индикаторная кривая, т. е. зависимость дебита Q от депрессии Δp, имеет вид (рис. V. 14):

$$Q = C_0 \Delta p, \qquad \text{(V. 6. 1)}$$

где C_0 — коэффициент продуктивности.

В развернутом виде для совершенных скважин согласно формуле Дюпюи коэффициент C_0 определяется формулой

$$C_0 = \frac{2\pi kh}{\mu \ln \frac{R_к}{r_с}}. \qquad \text{(V. 6. 2)}$$

Совершенно то же должно иметь место для фильтрации газа, когда она следует закону Дарси (рис. V. 15).

Под депрессией для газов понимается разность квадратов контурного и забойного абсолютных давлений $\Delta p^2 = p_к^2 - p_с^2$. Напомним, что при стационарной фильтрации газа функция Лейбензона имеет вид $\frac{\gamma_{ат}}{2p_{ат}} p^2$ и линейно связана с весовым дебитом газа G. Часто вместо весового дебита вводится величина объемного дебита $Q_{прив}$, приведенного к некоторым стандартным условиям, например атмосферному давлению и пластовой температуре.

Для газовых скважин, строя зависимость $Q_{прив} = \varphi(\Delta p^2)$, мы также должны получить прямую линию, если фильтрация газа следует вплоть до стенки скважины закону Дарси:

$$Q_{прив} = C_0 \Delta p^2,$$

где

$$C_0 = \frac{\pi kh}{p_{ат}\mu \ln \frac{R_к}{r_с}}. \qquad (V.6.3)$$

В большинстве случаев, однако, дебит газовых скважин не следует полностью закону Дарси, так же как в некоторых случаях и для нефтяных и водяных скважин.

Вблизи фильтрационных отверстий при приближении к стенке скважины скорость фильтрации становится настолько большой, что числа Рейнольдса превосходят критические. Квадраты скоростей становятся весьма большими, и ими пренебрегать уже нельзя.

Обычно применяют два способа обработки индикаторных кривых.

Первый способ заключается в том, что опытная зависимость аппроксимируется степенной формулой

$$Q = C_0 \Delta p^n. \qquad (V.6.4)$$

Для каждой скважины получаются свои C_0 и n.

Механизму явления гораздо ближе соответствует двучленная формула для градиента давления (см. § 4, гл. I)

$$-\frac{dp}{ds} = \frac{\mu}{k} w + b\varrho w^2, \qquad (V.6.5)$$

где w — скорость фильтрации; ds — элемент струйки; коэффициент b зависит от геометрии самой пористой среды, от микрошероховатостей и т. д.

Так как при прочих равных условиях скорости струек пропорциональны дебитам, то нетрудно видеть, что двучленному закону фильтрации (V. 6. 5) соответствует следующее уравнение индикаторной кривой для несжимаемой жидкости:

$$\Delta p = AQ + BQ^2, \qquad (V.6.6)$$

графически изображаемое параболой OAB (см. рис. V. 14).

Соответственно для газовой скважины

$$\Delta p^2 = A_1 Q_{\text{прив}} + B_1 Q^2_{\text{прив}}, \qquad \text{(V. 6. 7)}$$

где A, B, A_1, B_1 — параметры, постоянные для данной нефтяной или газовой скважины.

Отметим, что при испытаниях скважин иногда получаются индикаторные кривые вида $OA'B'$ (рис. V. 14). Такие индикаторные кривые, направленные вогнутостью вправо, как указывают В. Н. Щелкачев и К. М. Донцов [39], обычно являются следствием неустановившихся процессов.

Следует отметить, что проницаемость и вязкость в приведенных выше рассуждениях считались постоянными, не зависящими от давления. Как указывалось в начале книги (§ 3, гл. I), в ряде случаев последнее предположение не имеет места. Как показано в работах А. Бана, В. Н. Николаевского и других [40, 41, 42; Лт. I. 24], индикаторные кривые дебит — депрессия, снятые при установившихся режимах, могут иметь различный вид в зависимости от характера изменения проницаемости и вязкости от давления и быть направленными вправо как выпуклостью, так и вогнутостью. Известное влияние на этот эффект может иметь также трещиноватость породы [40].

Если же проницаемость и вязкость от давления не зависят, то индикаторные кривые, полученные методом пробных откачек при действительно установившемся режиме, должны быть прямолинейными или направленными выпуклостью вправо (см. рис. V. 14).

Приближенное теоретическое определение параметров A, B, A_1, B_1 для некоторых видов забоев можно выполнить следующим образом.

Будем исходить из закона фильтрации, который представлен двучленной формулой (V. 6. 5).

Коэффициент b по данным Е. М. Минского определяется формулой

$$b = \frac{12 \cdot 10^{-5}}{m \sqrt{k}} \left(\frac{d_{\text{эфф}}}{\sqrt{k}} \right)^2. \qquad \text{(V. 6. 8)}$$

Е. М. Минский считает возможным пользоваться формулой (V.6.5) при любых скоростях движения независимо от значения числа Рейнольдса.

По Е. М. Минскому число Рейнольдса только позволяет выяснить, какова будет погрешность, если при заданном числе Рейнольдса отбросить в формуле (V. 6. 5) второй член, содержащий квадрат скорости.

То обстоятельство, что формулой (V. 6. 5) можно пользоваться независимо от числа Рейнольдса, весьма облегчает выполнение расчетов, если принять следующую методику.

При притоке к скважине наибольшие скорости фильтрации существуют на стенке скважины или, если она перфорирована,

в перфорационных отверстиях. Вдали же от скважины скорости малы.

Рассмотрим схему притока к группе несовершенных скважин с двойным видом несовершенства (см. рис. V. 6).

В нефтяных задачах расстояние между скважинами обычно выражается величинами 300—500 *м* и более при мощности порядка десятка метров.

На рис. V. 10 показан разрез пласта в вертикальной плоскости, проходящий через какую-либо скважину, вскрывшую пласт не на всю мощность.

Пусть скважина, кроме того, перфорирована или снабжена фильтром. Это будет несовершенство по характеру вскрытия. Как мы уже ранее поступали (§ 2, гл. V), окружим мысленно каждую реальную скважину цилиндрической поверхностью радиусом $R_0 \geqslant h$, которую, как и раньше, будем считать воображаемой совершенной скважиной (см. рис. V. 12).

Таким образом, область движения разбивается на две зоны: на зону плоского движения между контуром питания и фиктивными совершенными скважинами радиусами R_0 (эту зону можно рассчитать по формулам плоской интерференции скважин) и область, где движение будет существенно пространственным, между фиктивными совершенными скважинами радиусом R_0 и нашими реальными несовершенными скважинами.

Общий метод решения задач заключается в следующем.

Возьмем произвольную струйку MN, которая начинается на контуре питания и заканчивается в каком-либо отверстии. Рассмотрим сначала случай несжимаемой жидкости.

Обозначим давление на контуре питания $p_к$, забойное давление на стенке скважины $p_с$.

Длину s будем отсчитывать по направлению движения струйки. Тогда из (V. 6. 5) получим

$$-dp = \frac{\mu}{k} w\, ds + b\varrho\, w^2\, ds.$$

Для простоты проницаемость будем считать постоянной всюду вдоль пласта.

Интегрируя, получаем

$$p_к - p_с = \frac{\mu}{k}\int_0^l w\, ds + b\varrho \int_0^l w^2\, ds, \qquad \text{(V. 6. 9)}$$

где l — длина струйки.

Чтобы можно было пользоваться формулой (V. 6. 9), нужно знать распределение скоростей вдоль всей струйки.

Непосредственно определить эти интегралы из строгого гидродинамического решения в общем случае невозможно. Однако можно поступить следующим образом.

Рассмотрим в отдельности первый интеграл, т. е. выражение

$$p_к - p'_с = \frac{\mu}{k}\int_0^l w\,ds. \qquad (V.6.10)$$

Очевидно, если бы всюду вплоть до стенки скважины действовал закон Дарси, то этот интеграл определял бы перепад давления между давлением на контуре питания и давлением в скважине, которое в этом случае обозначено $p'_с$.

Для дебита скважины в области, внутри которой всюду вплоть до отверстия действует закон Дарси, получаем формулу

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu}\,\frac{p_к - p'_с}{\ln\dfrac{R_к}{r'_с}}, \qquad (V.6.11)$$

где $r'_с$ — приведенный радиус скважины.

Отсюда получается

$$p_к - p'_с = \frac{\mu}{k}\int_0^l w\,ds = \frac{Q\mu}{2\pi kh}\ln\frac{R_к}{r'_с}. \qquad (V.6.12)$$

Возвращаясь теперь к двучленному закону фильтрации и формуле (V.6.5), истинную депрессию $\Delta p = p_к - p_с$ можно представить так:

$$p_к - p_с = \frac{Q\mu}{2\pi kh}\ln\frac{R_к}{r'_с} + b\varrho\int_0^l w^2\,ds. \qquad (V.6.13)$$

Таким образом, нелинейность индикаторной кривой $Q = Q(\Delta p)$ естественно отнести за счет второго члена формулы (V. 6. 13).

К сожалению, чтобы вычислить второй интеграл непосредственно, нельзя использовать результаты, базирующиеся на законе Дарси. Мы избежали прямого вычисления первого интеграла в формуле (V. 6. 9), который был определен при помощи формул для притока к скважине при линейном законе фильтрации.

Здесь этот прием применить нельзя, потому что квадраты скоростей будут особенно большими именно вблизи отверстия и, не зная распределения скоростей вблизи отверстия, второй интеграл в формуле (V. 6. 9) вычислить невозможно.

Постараемся, не слишком осложняя дело, выяснить, какой вид может иметь распределение скоростей в непосредственной близости от отверстия.

Рассмотрим три случая: 1) необсаженная скважина; 2) скважина с круглой перфорацией; 3) скважина со щелевым фильтром.

1. Необсаженная скважина

В непосредственной близости от стенки скважины в зоне наибольших скоростей распределение скоростей вдоль радиуса приближается к плоско-радиальному.

Проведем вокруг скважин цилиндрическую поверхность некоторого радиуса r_0 порядка $r_0/r_c = 2 \div 3$ и будем считать, что в непосредственной близости к стенке скважины существует плоскорадиальное распределение скоростей, т. е. скорость обратно пропорциональна радиусу:

$$w = \frac{w_c r_c}{r}, \quad r_c < r < r_0, \tag{V.6.14}$$

где w_c — скорость на стенке скважины.

Вычислять интеграл в (V.6.13) будем в пределах между r_c и r_0, так как за пределами r_0 квадратами скоростей можно пренебречь.

Таким образом,

$$\int_0^l w^2 ds \approx \int_{r_c}^{r_0} \left(\frac{w_c r_c}{r}\right)^2 dr = w_c^2 r_c^2 \left(\frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_0}\right).$$

Полагая $\frac{1}{r_0} \ll \frac{1}{r_c}$, получаем некоторый расчетный запас.

Тогда приближенно получим

$$\int_0^l w^2 ds \approx \frac{w_c^2 r_c^2}{r_c} = \left(\frac{Q}{f}\right)^2 r_c, \tag{V.6.15}$$

где Q — дебит; f — площадь вскрытой части забоя.

Таким образом, индикаторную кривую для необсаженной скважины можно приближенно рассчитывать по следующему уравнению:

$$p_к - p_c = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_к}{r_c'} + b\varrho\left(\frac{Q}{f}\right)^2 r_c, \tag{V.6.16}$$

т. е. перепад давления выражается двучленной формулой вида (V.6.6), где

$$A = \frac{\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_к}{r_c'}, \quad B = \frac{b\varrho r_c}{f^2}. \tag{V.6.17}$$

Если выразить b из формулы Е. М. Минского (V.6.8), то после пересчета в смешанной системе единиц, когда проницаемость k берется в дарси, вязкость μ в сантипуазах, дебит Q в $см^3/сек$, площадь

в $см^2$, длина в сантиметрах, давление в $кГ/см^2$, объемный вес γ в $г/см^3$, формула (V. 6. 16) принимает следующий вид:

$$\Delta p = p_к - p_с = \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_к}{r'_с} + \frac{120}{m} \left(\frac{d_{эфф}}{\sqrt{k}}\right)^2 \frac{r_с}{\sqrt{k}} \left(\frac{Q}{f}\right)^2 \gamma, \quad \text{(V. 6. 18)}$$

где $d_{эфф}$ — эффективный диаметр песчинок.

2. Скважина с круглой перфорацией

Совершенно аналогично можно рассмотреть скважину с круглыми перфорационными отверстиями.

Обозначим диаметр перфорационного отверстия D.

В непосредственной близости от отверстия распределение скоростей будет иметь радиально-сферический характер.

Скорости будут направлены к центру, слегка заглубленному внутрь отверстия.

Радиально-сферический характер скоростей можно приближенно представить следующей формулой:

$$w = \frac{w_с}{\left(\frac{r - r_с}{\delta} + 1\right)^2}, \quad \text{(V. 6. 19)}$$

где δ — заглубление.

Этой формулой можно пользоваться в случае непосредственной близости от отверстия и в интервале $r_с < r < r_с + nD$, где $n = 2 \div 4$.

По данным, основанным на результатах В. И. Щурова на электролитических моделях, получилось $\delta \approx 0{,}4\,D$ [43].

Интеграл в (V. 6. 13) заменяем таким:

$$\int_0^l w^2 ds \approx \int_{r_с}^{r_с + nD} \frac{(w_с)^2\, dr}{\left(\frac{r - r_с}{\delta} + 1\right)^4} = \frac{w_с^2\,\delta}{3} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{nD}{\delta} + 1\right)^3}\right].$$

Второй член в квадратных скобках мал по сравнению с единицей. Отсюда

$$\int_0^l w^2 ds \approx \frac{w_с^2\,\delta}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{Q}{f}\right)^2 \delta, \quad \text{(V. 6. 20)}$$

где f — суммарная площадь отверстий.

Подставляя это выражение в формулу (V. 6. 13), получаем $\Delta p = AQ + BQ^2$.

После использования формулы Минского (V. 6. 8) и пересчета в указанной выше смешанной системе единиц — атмосферы — дарси — сантипуазы — сантиметры — получаем

$$A = \frac{\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_к}{r'_с}, \qquad (V.6.21)$$

$$B = \frac{40\varepsilon}{m} \left(\frac{d_{эфф}}{\sqrt{k}}\right)^2 \frac{D}{\sqrt{k}} \frac{\gamma}{f^2}.$$

Безразмерный коэффициент ε лежит, с учетом погружения пуль в породу, в вероятных пределах $0{,}15 < \varepsilon < 0{,}40$. Значение $\varepsilon \approx 0{,}4$ соответствует нулевому внедрению пуль.

3. Скважины со щелевым фильтром

Таким же образом можно для щелевых фильтров задаться вблизи щели плоско-радиальным распределением скоростей вида

$$w = \frac{w_с}{\frac{r - r_с}{\delta} + 1}, \qquad (V.6.22)$$

где δ — линейный размер, связанный с шириной щели t вероятным соотношением $\delta \approx \varepsilon t$, где $0{,}25 < \varepsilon < 0{,}50$.

После вычислений, подобных предыдущим, для A и B получим также в смешанной системе

$$A = \frac{\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_к}{r'_с}, \qquad (V.6.23)$$

$$B = \frac{120\varepsilon}{m} \left(\frac{d_{эфф}}{\sqrt{k}}\right)^2 \frac{t}{\sqrt{k}} \frac{\gamma}{f^2},$$

где f — суммарная площадь щелей.

Аналогично, пользуясь функцией Лейбензона $P = \int \gamma(p)\, dp = \frac{\gamma_{ат}}{2p_{ат}} p^2$, можно получить формулы для установившегося притока газа к скважинам с двойным видом несовершенства. При этом также будет

$$\Delta P = AG + BG^2, \qquad (V.6.24)$$

где G — весовой дебит.

Коэффициенты A и B для скважин с заданным видом несовершенства определяются указанным выше образом и по структуре совпадают с формулами (V. 6. 18), (V. 6. 21), (V. 6. 23), отличаясь от них численным коэффициентом, зависящим от выбора системы единиц.

Заметим в заключение, что опытные индикаторные кривые, т. е. фактически полученные точки Δp, Q, рекомендуется обрабатывать по формуле (V. 6. 6) для нахождения параметров A и B для

данной скважины. Эти параметры обычно определяются по способу наименьших квадратов. Весьма удобен также способ Е. М. Минского [Лт. I. 20; 44]; уравнение (V. 6. 6) можно представить в виде

$$\frac{\Delta p}{Q} = A + BQ. \qquad \text{(V. 6. 25)}$$

Нанося на график опытные точки в координатах $\frac{\Delta p}{Q}$, Q, согласно (V. 6. 25) мы должны получить прямую линию (рис. V. 16). В действительности будет получаться некоторый разброс точек, но прямолинейный характер зависимости $\frac{\Delta p}{Q}$, Q выявится. По построенной прямой легко находятся параметры A и B. То же относится и к случаю газовых скважин.

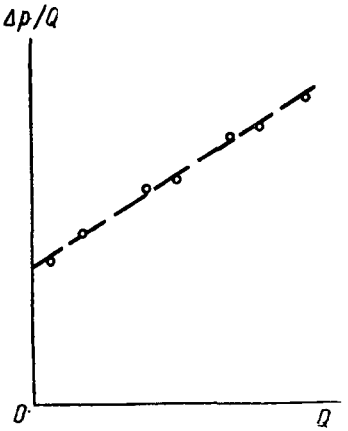


Рис. V. 16.

Индикаторные кривые газовых скважин следует обрабатывать вполне аналогично по формуле

$$\frac{\Delta p^2}{Q_{\text{прив}}} = A_1 + B_1 Q_{\text{прив}}, \qquad \text{(V. 6. 26)}$$

где $\Delta p^2 = p_к^2 - p_с^2$, $p_к$, $p_с$ — абсолютные давления.

Так как двучленная формула (V. 6. 6) гораздо ближе соответствует физической природе фильтрации, нежели одночленные степенные формулы вида (V. 6. 4), то и экстраполяцию индикаторной кривой за пределы опытных точек для больших значений дебита гораздо обоснованнее производить по двучленной формуле, нежели по степенной.

Определив коэффициент B в формуле (V. 6. 6) для индикаторной кривой указанным выше оценочным аналитическим расчетом или прямым испытанием скважины путем пробных откачек при установившемся режиме, можно использовать метод эквивалентных фильтрационных сопротивлений для исследования интерференции скважин при двучленном законе фильтрации. Для этого уравнение индикаторной кривой следует представить в виде

$$\Delta p = AQ + \varrho'' Q, \qquad \text{(V. 6. 27)}$$

где

$$\varrho'' = BQ = \varrho''(Q) \qquad \text{(V. 6. 28)}$$

можно рассматривать как нелинейное сопротивление, добавляемое к внутреннему сопротивлению ϱ', определяемому конечным расстоянием между скважинами в батарее (§ 5, гл. IV) из формулы (IV. 5. 11).

Например, в схеме фильтрационных сопротивлений, показанной на рис. IV. 12 для условий линейного закона фильтрации, внутренние сопротивления ϱ' следует заменить суммой $\varrho' + \varrho''(Q)$, где $\varrho''(Q) = BQ$ для каждой скважины. Дальнейший расчет ведется, как и ранее, при помощи законов Ома и Кирхгофа, но система уравнений получается уже не линейной, а содержащей квадратные уравнения, что при большом числе батарей связано с усложнением вычислений. В этом случае могут оказаться весьма полезными современные быстродействующие вычислительные машины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сегал Б. И., Семендяев К. А. Пятизначные математические таблицы. Изд. АН СССР, 1948.

2. Powell E. O. A table of the generalized Riemann zeta function in a particular case. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics (Oxford), vol. 5, No. 1, 1952, pp. 116—123.

3. Стклянин Ю. И., Телков А. П. Расчет предельных безводных дебитов в анизотропных пластах с осевой симметрией. Сиб. отд. АН СССР, Прикл. матем. и техн. физ., № 5, 1961.

4. Стклянин Ю. И. Некоторые задачи движения одно,- двух - и трехкомпонентных жидкостей в пористой среде. Диссертация. МИНХ и ГП. 1962—1963.

5. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. Гостехиздат, 1956.

6. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.

7. Временная инструкция по исследованиям и установлению технологического режима эксплуатации нефтяных скважин. Гостоптехиздат, 1954.

8. Perrine R. L. Well Productivity increase from Drain Holes as measured by Model Studies. Petroleum Transactions AIME, vol. 204, 1955.

9. Landrum R. L., Crawford P. B. Effect of Drain Holle Drilling on Production Capasity. J. Petroleum Technology, Febr., 1955.

10. Глоговский М. М. Дебит скважин, несовершенных по степени вскрытия пласта. Труды МНИ им. Губкина, вып. 11, 1951.

11. Гиринский Н. К. Определение коэффициента фильтрации. Госгеолиздат, 1950.

12. Смайт В. Электростатика и электродинамика. Пер. с англ. ИЛ, 1954.

13. Заборовский А. И. Электроразведка. Гостоптехиздат, 1943.

14. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, 1948.

15. Сегал Б. И. Некоторые пространственные задачи теории потенциала и их приложения. Изв. АН СССР, сер. матем., № 10, 1946.

16. Сегал Б. И. Пространственные задачи теории потенциала. Изв. АН СССР, сер. матем., № 16, 1952.

17. Шестаков В. М. Методические указания по фильтрационным расчетам водопонизительных установок. Госэнергоиздат, 1961.

18. Павловская Л. Н. Экспериментальное исследование дополнительного фильтрационного сопротивления, обусловленного несовершенством скважины по степени вскрытия пласта в случае прямолинейной цепочки безнапорных скважин. Изв. ВНИИГ, т. 62, 1959.

19. Кочина И. Н. Приток к несовершенной галерее. Труды МНИ им. Губкина, 1957.

20. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.

21. Ширинов К. Ф. Приближенные методы решения некоторых пространственных задач теории фильтрации. Диссертация. Механ.-матем. ф-т МГУ им. Ломоносова, 1955.

22. Чарный И. А. Приток грунтовых вод к скважинам и иглофильтрам. Инж. сб. АН СССР, т. XVII, 1953.

23. Чарный И. А. Безнапорный приток жидкости к гидродинамически несовершенным скважинам и иглофильтрам. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1953.

24. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1951.

25. Алихашкин Я. И. Методы приближенного решения одной пространственной задачи теории фильтрации. Диссертация. Ин-т точной механики и вычислительной техники АН СССР, 1955.

26. Пирвердян А. М. К гидравлической теории несовершенных скважин. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1957.

27. Пирвердян А. М. О фильтрации жидкости к заиленной скважине. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1958.

28. Салехов Г. С., Данилов В. Л., Иванов Н. Ф., Хованский А. Н. К вопросу обводнения нефтяных скважин в пластах с подошвенной водой. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, № 5, 1954.

29. Абасов М. Т., Джалилов К. Н. Вопросы подземной гидродинамики и разработки нефтяных и газовых месторождений. Азнефтеиздат, Баку, 1960.

30. Чарный И. А. Об одном графоаналитическом методе в теории фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, № 17, 1950.

31. Белаш П. М. Экстремальные принципы при расчете дебитов несовершенных скважин. Труды МНИ им. И. М. Губкина, вып. 12, 1953.

32. Кривоносов И. В., Чарный И. А. Расчет дебитов скважин с трещиноватой призабойной зоной. Нефт. хоз., № 9, 1955.

33. Пирвердян А. М. Нефтяная подземная гидравлика. Азнефтеиздат, Баку, 1956.

34. Чарный И. А. О притоке к несовершенным скважинам при одновременном существовании различных законов фильтрации в пласте. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1950.

35. Минский Е. М. О конструкции высокодебитных газовых скважин. Сб. «Вопросы разработки и эксплуатации газовых месторождений». Труды ВНИИгаза. Гостоптехиздат, 1953.

36. Минский Е. М. О притоке газа к забою несовершенной скважины при нелинейном законе сопротивления. Сб. «Добыча транспорт и переработка природных газов». Труды ВНИИнефтегаза. Гостоптехиздат, 1954.

37. Чарный И. А. О предельных дебитах и депрессиях в водоплавающих и подгазовых нефтяных месторождениях. Труды совещания по развитию научно-исследовательских работ в области вторичных методов добычи нефти. Изд. АН Азерб. ССР, Баку, 1953.

38. Краев А. П. Основы геоэлектрики, т. 1. Гостехиздат, 1951.

39. Щелкачев В. Н., Донцов К. М. Сопоставление исследований скважин различными методами. Нефт. хоз., № 2—3, 1945.

40. Бан А. Некоторые вопросы разработки залежей нефти в трещиноватых породах. Диссертация. МИНХ и ГП, 1961.

41. Бондарев Э. А., Николаевский В. Н. Оценка влияния отклонений от закона Дарси на форму индикаторных кривых. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1962.

42. Бан А., Басниев К. С., Николаевский В. Н. Об основных уравнениях фильтрации в сжимаемых пористых средах. Сиб. отд. АН СССР, Прикл. матем. и техн. физ., № 3, 1961.

43. Чарный И. А. Совместный приток нефти и подошвенной воды к несовершенной скважине. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1955.

44. Брискман А. А., Иванов А. К., Козлов А. Л., Минский Е. М., Палта Р. С., Раабен В. Н., Ходанович И. Е., Шахназаров М. Х. Добыча и транспорт газа. Гостоптехиздат, 1955.

45. Николаевский В. Н. О расчете дополнительного фильтрационного сопротивления скважин, несовершенных по степени вскрытия. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1957.

ГЛАВА VI

БЕЗНАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. Особенности безнапорного движения. Предпосылки гидравлической теории безнапорного движения

Безнапорное движение — это такое движение, в котором пьезометрическая поверхность совпадает со свободной поверхностью самой жидкости, над которой имеет место постоянное давление.

При фильтрации через плотины, водопонижении и т. д. гидротехникам приходится часто сталкиваться с безнапорным движением грунтового потока.

Нефтяникам же приходится иметь дело с огромными глубинами и соответствующими напорами. Безнапорное движение при атмосферном давлении над свободной поверхностью в нефтяных задачах встречается сравнительно редко, например, при шахтном способе эксплуатации.

Значительно чаще встречаются фильтрационные потоки, иногда называемые полунапорными, когда на одних участках движение напорное, на других безнапорное.

Рассмотрим, к примеру, газовую шапку в водоносном пласте — весьма типичный случай газового месторождения. Если газовое месторождение не разрабатывается и пластовая подошвенная вода неподвижна, то, очевидно, граница раздела газ — вода будет горизонтальной плоскостью. Иногда пластовая вода под газовым месторождением движется в заданном направлении под действием существующего согласно местным гидрогеологическим условиям градиента давления. Тогда, если считать давление в газе постоянным, в зоне контакта газ — вода движение воды безнапорное, вне этой зоны движение напорное. Газовая залежь при этом смещается и граница раздела газ — вода перестает быть горизонтальной и плоской.

Аналогичная картина наблюдается и в случае не разрабатываемого или слабо эксплуатируемого нефтяного месторождения,

когда нефть можно считать практически неподвижной, а подошвенную воду движущейся.

Задачи безнапорной фильтрации представляют большой теоретический интерес. Они значительно труднее, чем аналогичные задачи напорного движения.

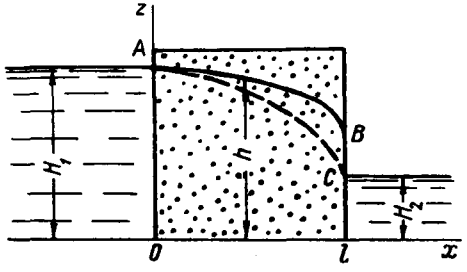


Рис. VI. 1. Схема безнапорного течения через проницаемую перемычку при горизонтальном непроницаемом основании.

Примером безнапорного движения может служить фильтрация через прямоугольную перемычку (плотину), показанную на рис. VI.1.

Перемычка обычно выполняется из материала, который в той или иной степени является фильтрующим. Напомним некоторые определения.

Уровень H_1 называется верхним бьефом, уровень H_2 — нижним бьефом.

Свободная поверхность жидкости, фильтрующейся через тело плотины, называется депрессионной поверхностью (кривая ABC). Свободная поверхность выходит на правую грань всегда выше нижнего бьефа.

Величина BC называется промежутком высачивания. На этом промежутке жидкость будет сочиться в атмосферу и стекать вдоль BC в нижний бьеф.

То же происходит при безнапорном притоке к скважине или колодцу. Схема притока к колодцу показана на рис. VI. 2.

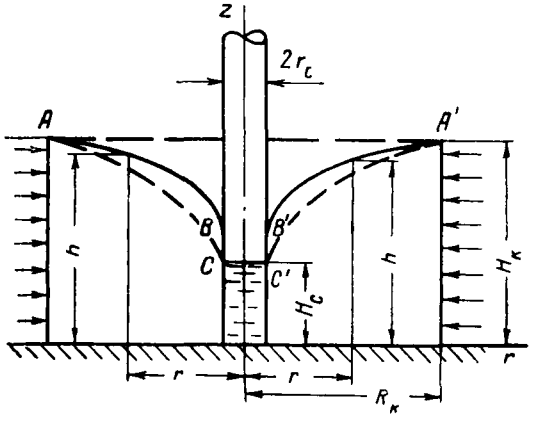


Рис. VI. 2. Схема безнапорного притока к совершенной скважине-колодцу.

Пунктиром показан статический уровень грунтовых вод. Если этот уровень нужно понизить, бурят скважину или колодец, спускают насосные трубы и откачивают воду.

Поверхность депрессии имеет вид поверхности вращения $ABCC'B'A'$, причем $R_к$ — радиус области питания, r_c — радиус скважины.

Если на контуре питания уровень $H_к$, на контуре скважины $H_с$, то при выходе на стенку скважины также будут происходить разрыв уровней и образование промежутка высачивания.

Для инженерных расчетов пользовались и теперь часто пользуются *приближенной теорией — гидравлической теорией* безнапорного движения, предпосылки которой изложены ниже.

Дебиты и расходы, рассчитанные по гидравлической теории, очень хорошо совпадают с экспериментальными данными.

Что касается очертания свободной поверхности, то здесь приближенная теория дает заметную ошибку, особенно вблизи выхода к нижнему бьефу. Приближенная теория не учитывает существования промежутка высачивания.

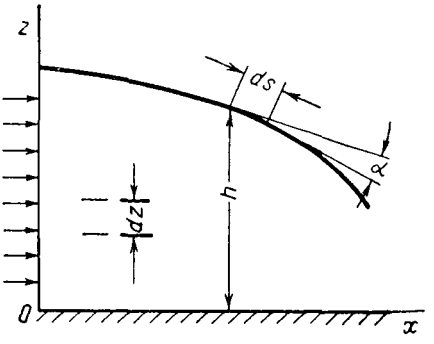


Рис. VI. 3.

Главная трудность точного решения задачи безнапорной фильтрации заключается в том, что неизвестна форма области, занятая грунтовым потоком. В задачах напорной фильтрации форма области известна, потому что кровля и подошва фиксированы.

В книге П. Я. Кочиной [Лт. II. 2] приведены некоторые точные решения задачи о движении через прямоугольную перемычку, а также подробная библиография по этому вопросу.

Задача о радиальном безнапорном притоке к колодцу до сих пор не имеет полного теоретически строгого решения.

Перейдем к рассмотрению приближенной теории — гидравлической теории безнапорного движения. Проведем произвольное вертикальное сечение в некотором безнапорном потоке.

Пусть ордината свободной поверхности h, уклон свободной поверхности i, $i = \sin\alpha$ (рис. VI. 3). Гидравлическая теория безнапорного движения исходит из следующих основных допущений:

1) горизонтальные компоненты скорости распределены равномерно;

2) давление вдоль вертикали распределено по гидростатическому закону, т. е. напор $H = z + \frac{p}{\gamma} = H(x, y)$. Напор, таким образом, предполагается постоянным вдоль каждой вертикали При переходе от одной вертикали к другой напор, конечно, будет меняться.

Можно показать [1], что эти предпосылки допустимы в тех областях, где $i^2 \ll 1$, т. е. вдали от промежутка высачивания, где $i = 1$.

Допущения гидравлической теории безнапорного движения имеют много общего с предпосылками теории медленно изменяющегося движения жидкости, которая широко применяется в гидравлике.

Можно отметить следующее обстоятельство: предположение о гидростатическом распределении давления вдоль вертикали эквивалентно условию, что вертикальная составляющая проницаемости грунта равна бесконечности. Это было указано Г. К. Михайловым [2].

Очевидно, если в фильтрационном потоке с фиксированными напорами на границах увеличивать какую-либо составляющую проницаемости, то это может привести только к увеличению дебита.

Напротив, если в тот же фильтрационный поток ввести какие-либо непроницаемые перегородки, то это может привести только к уменьшению дебита. Следовательно, принимая в одном случае некоторые сечения эквипотенциалями, можно оценить верхнюю границу дебита.

Заменяя же истинную картину линий тока (вообще говоря, неизвестную) какой-либо другой, проведенной по нашему усмотрению и, может быть, заведомо не соответствующей действительности, мы как бы вводим в поток искусственные перегородки и тем самым уменьшаем дебит.

Таким образом, могут быть установлены пределы, между которыми находится истинная величина фильтрационного расхода.

Найдем сначала поверхностную скорость фильтрации. Согласно закону Дарси поверхностная скорость равняется

$$w_{\text{пов}} = -c\frac{dh}{ds}, \qquad \text{(VI. 1. 1)}$$

где c — коэффициент фильтрации; ds — элемент длины поверхностной струйки.

При этом для напора имеем формулу

$$H = z + \frac{p}{\gamma}. \qquad \text{(VI. 1. 2)}$$

Над свободной поверхностью жидкости будем считать давление p постоянным, например, равным атмосферному, т. е. избыточное давление равным нулю. Подразумевая под p избыточное давление, получаем, что напор H равен глубине потока h:

$$H = h, \qquad \text{(VI. 1. 3)}$$

откуда и следует формула (VI. 1. 1).

Согласно формуле (VI. 1. 2) на свободной поверхности напор, а следовательно, и потенциал $\Phi = cH$, поскольку там давление p постоянно, являются линейными функциями координаты свободной поверхности z. Линейная зависимость потенциала или напора на свободной поверхности от вертикальной координаты z ее точек является отличительным признаком безнапорного движения.

Горизонтальная компонента скорости фильтрации

$$u = -c\frac{dh}{dx} \qquad \text{(VI. 1. 4)}$$

предполагается постоянной вдоль вертикали, а вертикальная компонента скорости равной нулю. Отсюда находим расход на единицу ширины потока, т. е. расход q через прямоугольник высотой h и шириной в единицу

$$q = uh \cdot 1 = -ch\frac{dh}{dx}. \qquad \text{(VI. 1. 5)}$$

§ 2. Гидравлическая теория безнапорного движения через прямоугольную перемычку на горизонтальном непроницаемом основании

Будем рассматривать установившееся движение грунтовых вод, когда глубина потока и расход не зависят от времени t.

Найдем из формулы (VI. 1. 5) уравнение свободной поверхности. Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$qdx = -chdh,$$

$$qx = -\frac{ch^2}{2} + \text{const}. \qquad \text{(VI. 2. 1)}$$

Постоянная (const) в уравнении (VI. 2. 1) находится обычным путем из граничных условий.

Граничные условия для случая земляной перемычки или плотины имеют следующий вид (см. рис. VI. 1):

$$x = 0, \quad h = H_1, \quad x = l, \quad h = H_2.$$

Подставляя значение $x = 0$ в уравнение (VI. 2. 1), получаем

$$\text{const} = \frac{cH_1^2}{2},$$

откуда

$$qx = \frac{c(H_1^2 - h^2)}{2}. \qquad \text{(VI. 2. 2)}$$

Из формулы (VI. 2. 2) легко найти глубину потока в любом сечении. Найдем сначала расход. Для этого нужно знать напор

в каком-либо другом сечении, например в нижнем бьефе на расстоянии l. Он определяется уровнем H_2 в нижнем бьефе. Из формулы (VI. 2. 2) получаем

$$ql = \frac{c}{2}(H_1^2 - H_2^2) \qquad \text{(VI. 2. 3)}$$

или

$$q = \frac{c}{2l}(H_1^2 - H_2^2). \qquad \text{(VI. 2. 4)}$$

Далее из формулы (VI. 2. 2) находим

$$h = \sqrt{H_1^2 - \frac{2qx}{c}}. \qquad \text{(VI. 2. 5)}$$

Если вместо q подставить значение расхода из формулы (VI. 2. 4), то получится

$$h = \sqrt{H_1^2 - \frac{H_1^2 - H_2^2}{l} x}. \qquad \text{(VI. 2. 6)}$$

Таким образом, согласно гидравлической теории безнапорного движения поверхность депрессии является параболой, показанной пунктиром на рис. VI. 1 (кривая AC).

Формулы (VI. 2. 5) и (VI. 2. 6), т. е. уравнения для поверхности депрессии, которые даются гидравлической теорией, вообще говоря, несправедливы.

Это ясно из следующих соображений. Из (VI. 2. 6) при $H_2 = 0$ у выхода в нижний бьеф ($x = l$) получаем $h = 0$ и, следовательно, бесконечную скорость фильтрации q/h, что физически невозможно. Таким образом, в действительности должно быть $h_{x=l} \geqslant H_2$, т. е. должен существовать промежуток высачивания.

Формула же для дебита (VI. 2. 4), хотя и выведена на основании приближенных допущений, тем не менее является точной, как будет показано ниже.

§ 3. Гидравлическая теория безнапорного притока к совершенной скважине

Рассмотрим теперь схему установившегося безнапорного притока к совершенной скважине или колодцу при горизонтальном водоупоре (см. рис. VI. 2).

Пусть на расстоянии $R_к$ уровень грунтовых вод равен $H_к$. В самой скважине устанавливается уровень $H_с$.

Проведем цилиндрическую поверхность радиусом r, высотой h. Скорость фильтрации будет направлена к оси скважины в сторону убывания r, и согласно формуле (VI. 1. 4) мы должны были бы записать ее следующим образом:

$$w_r = -c\frac{dh}{dr}.$$

Найдем расход жидкости через боковую поверхность цилиндра. Расход будем считать положительным, когда скважина является скважиной-стоком:

$$Q = |w_r| 2\pi rh = c \frac{dh}{dr} 2\pi rh. \qquad \text{(VI. 3. 1)}$$

Знак минус здесь не нужен, так как мы условились считать скважину стоком и $h = h(r)$ — возрастающей функцией расстояния.

Движение, как и раньше, считаем установившимся. В каждом поперечном сечении Q, $h(r)$ от времени не зависят.

В уравнении (VI. 3. 1) разделим переменные:

$$Q \frac{dr}{r} = 2\pi chdh.$$

Интегрируя, получаем

$$Q \ln r = \pi ch^2 + \text{const}. \qquad \text{(VI. 3. 2)}$$

Постоянная (const) находится из условий на контуре питания $R_к$:

$$Q \ln R_к = \pi cH_к^2 + \text{const},$$

откуда

$$Q \ln \frac{R_к}{r} = \pi c (H_к^2 - h^2). \qquad \text{(VI. 3. 3)}$$

Если это уравнение разрешить относительно h, то получится уравнение кривой депрессии (пунктирная кривая $ACC'A'$). Для дебита жидкости получаем

$$Q = \frac{\pi c (H_к^2 - H_с^2)}{\ln \frac{R_к}{r_с}}. \qquad \text{(VI. 3. 4)}$$

Формулы (VI. 2. 4) и (VI. 3. 4) называются формулами Дюпюи. В дальнейшем мы увидим (§ 7, гл. VI), что теория безнапорного движения грунтовых вод имеет аналогию с совершенно другой задачей подземной гидравлики — задачей фильтрации газов в пористой среде. Эта аналогия была установлена Л. С. Лейбензоном.

§ 4. Строгое доказательство формул Дюпюи для безнапорного движения через перемычку и притока к скважине

Как уже упоминалось, формулы (VI. 2. 4) и (VI. 3. 4) для дебитов очень близко совпадают с результатами опытов [Лт. I. 11].

Уравнения же кривых депрессий (VI. 3. 3) и (VI. 2. 5) вдали от скважины и от выхода в нижний бьеф удовлетворительно совпадают с опытами и точной теорией. Расхождение наблюдается в непосредственной близости к скважине или к выходу в нижний бьеф.

Формулы для дебитов (VI. 2. 4) и (VI. 3. 4) тем не менее являются совершенно строгими и точными. Это было установлено автором в 1951 г. [3].

Рассмотрим грунтовой поток при горизонтальном водоупоре. Напишем точную формулу для расхода жидкости через сечение глубиной h, шириной в единицу. Возьмем на высоте z полоску dz (рис. VI. 4). Элементарный расход через элемент dz равняется

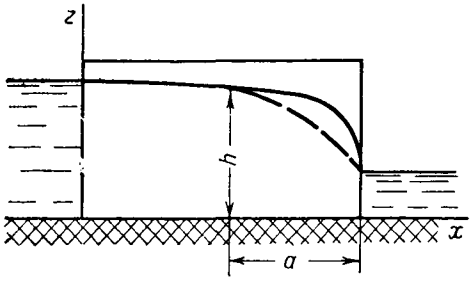


Рис. VI. 4. Кривые депрессии при действительном течении (сплошная) и течении по гидравлической теории безнапорной фильтрации (пунктир).

$$dq = udz. \quad \text{(VI. 4. 1)}$$

Полный расход через все сечение получится интегрированием элементарных расходов. Пределы интегрирования будут от нуля до h:

$$q = \int_0^h udz. \quad \text{(VI. 4. 2)}$$

Далее по закону Дарси горизонтальная составляющая скорости равна

$$u = -c\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \text{(VI. 4. 3)}$$

где $H = z + \frac{p}{\gamma}$.

Следовательно,

$$q = -\int_0^h c\frac{\partial H}{\partial x}\,dz = -c\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)dz. \quad \text{(VI. 4. 4)}$$

Коэффициент фильтрации считается постоянным и его можно вынести за знак интеграла. При этом не делается никаких гипотез о характере распределения давления по вертикали; оно может быть гидростатическим и не гидростатическим.

Далее воспользуемся известной формулой дифференцирования определенного интеграла по параметру [Лт. III. 7]:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} f(z, \alpha)\,dz = \int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} \frac{\partial f(z, \alpha)}{\partial \alpha}\,dz + f(\varphi_2, \alpha)\frac{d\varphi_2}{d\alpha} - f(\varphi_1, \alpha)\frac{d\varphi_1}{d\alpha},$$

из которой получаем

$$\int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} \frac{\partial f(z,\ \alpha)}{\partial \alpha}\, dz = \frac{d}{d\alpha}\int_{\varphi_1(\alpha)}^{\varphi_2(\alpha)} f(z,\ \alpha)\, dz - f(\varphi_2,\ \alpha)\frac{d\varphi_2}{d\alpha} + f(\varphi_1,\ \alpha)\frac{d\varphi_1}{d\alpha}. \qquad \text{(VI. 4. 5)}$$

Сравним формулу (VI. 4. 4) с формулой (VI. 4. 5). Учитывая, что $h = h(x)$ и что в (VI. 4. 4) x можно рассматривать как параметр, а в (VI. 4. 5) положить $x = \alpha$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = h(x)$, $f(z,\ \alpha) = \frac{p}{\gamma} + z$, (VI. 4. 4) можно записать в виде

$$q = -c\left[\frac{d}{dx}\int_0^{h(x)}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)dz - \left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{z=h}\frac{dh}{dx}\right]. \qquad \text{(VI.4.6)}$$

Но под p подразумевается избыточное давление, равное нулю на свободной поверхности, т. е. $p_{z=h} = 0$.

Отсюда, раскрывая в формуле (VI. 4. 6) скобки, имеем

$$q = -c\left[\frac{d}{dx}\int_0^{h(x)} \frac{p}{\gamma}dz + \frac{d}{dx}\int_0^{h(x)} z\, dz - h\,\frac{dh}{dx}\right] = -\frac{c}{\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^{h(x)} p dz. \qquad \text{(VI. 4. 7)}$$

Последний интеграл есть результирующая сила избыточного гидродинамического давления, действующая на все сечение грунтового потока шириной в единицу. Обозначим ее P:

$$P = \int_0^{h(x)} p\, dz. \qquad \text{(VI. 4. 8)}$$

Окончательно имеем

$$q = -\frac{c}{\gamma}\frac{dP}{dx}. \qquad \text{(VI. 4. 9)}$$

Заметим, что формулу (VI. 4. 9) можно получить короче. Обратимся к формуле (VI. 4. 4). Так как z от x не зависит, то

$$q = -\frac{c}{\gamma}\int_0^{h(x)} \frac{\partial p}{\partial x}\, dz.$$

Из формулы (VI. 4. 6), учитывая, что $(p)_{z=h} = 0$, получаем

$$q = -\frac{c}{\gamma}\left[\frac{d}{dx}\int_0^{h(x)} p dz - (p)_{z=h}\frac{dh}{dx}\right] = -\frac{c}{\gamma}\frac{d}{dx}\int_0^{h(x)} p dz = -\frac{c}{\gamma}\frac{dP}{dx},$$

что совпадает с (VI. 4. 9).

Таким образом, расход безнапорного потока с горизонтальным водоупором определяется исключительно результирующей силой P (VI. 4. 8) вдоль вертикали в сечении.

Легко видеть, что этот вывод справедлив и для напорного движения в горизонтальном пласте постоянной мощности.

Рассмотрим установившееся движение, когда q от x не зависит. Разделяя переменные в уравнении (VI. 4. 9), получаем

$$q\,dx = -\frac{c}{\gamma}\,dP,$$

$$qx = -\frac{cP}{\gamma} + \text{const}. \qquad \text{(VI. 4. 10)}$$

Пусть $P = P_1$ при $x = 0$. Тогда

$$\text{const} = \frac{c}{\gamma}\,P_1.$$

Для дебита получается

$$q = \frac{c\,(P_1 - P)}{\gamma\,x}. \qquad \text{(VI. 4. 11)}$$

Если нам известна сила P_2 на границе бассейна $x = l$, то

$$q = \frac{c\,(P_1 - P_2)}{\gamma\,l}. \qquad \text{(VI. 4. 12)}$$

Но на границе бассейна результирующие силы нам известны, потому что давление там распределено по закону гидростатики:

$$P_1 = \frac{\gamma H_1}{2} H_1 \cdot 1 = \frac{\gamma H_1^2}{2},$$

$$P_2 = \frac{\gamma H_2}{2} H_2 \cdot 1 = \frac{\gamma H_2^2}{2}. \qquad \text{(VI. 4. 13)}$$

Подставляя эти значения сил P_1 и P_2 в формулу (VI. 4. 12)

$$q = \frac{c}{\gamma}\,\frac{\gamma\,(H_1^2 - H_2^2)}{2l} = \frac{c}{2l}\,(H_1^2 - H_2^2),$$

получаем формулу Дюпюи (VI. 2. 4), которую мы раньше вывели из неточных, вообще говоря, предпосылок.

При радиальном безнапорном притоке к скважине получается точно таким же образом формула (VI. 3. 4), только нужно все рассуждения произвести не для прямолинейного, а для радиального движения.

Действительно, дебит скважины-стока равняется, с учетом направления скорости:

$$Q = c \int_0^h 2\pi r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) dz, \qquad \text{(VI. 4. 14)}$$

где r — произвольный радиус боковой цилиндрической поверхности, концентричной со скважиной: $r_с < r < R_к$ (см. рис. VI. 2).

Замечая, что z не зависит от r и что на свободной поверхности $(p)_{z=h} = 0$, формулу (VI. 4. 14) можно представить так:

$$Q = \frac{2\pi c}{\gamma} \int_0^h \frac{\partial p}{\partial \ln r}\, dz$$

или, учитывая формулу (VI. 4. 5),

$$Q = \frac{2\pi c}{\gamma}\left[\frac{d}{d\ln r}\int_0^h p\, dz - (p)_{z=h}\frac{dh}{d\ln r}\right] = \frac{2\pi c}{\gamma}\frac{dP}{d\ln r}, \quad \text{(VI. 4. 15)}$$

где P определено формулой (VI. 4. 8).

Разделяя переменные и интегрируя от $r_с$ до $R_к$, из (VI. 4. 15) имеем

$$Q\, d\ln r = \frac{2\pi c}{\gamma} dP, \quad Q \ln\frac{R_к}{r_с} = \frac{2\pi c}{\gamma}(P_к - P_с),$$

откуда

$$Q = \frac{2\pi c}{\gamma}\frac{P_к - P_с}{\ln\dfrac{R_к}{r_с}}. \quad \text{(VI. 4. 16)}$$

Если скважина совершенная и давления на контурах $R_к$ и $r_с$ распределены гидростатически, то

$$P_к = \frac{\gamma H_к}{2} H_к = \frac{\gamma}{2} H_к^2,$$

$$P_с = \frac{\gamma H_с}{2} H_с = \frac{\gamma}{2} H_с^2.$$

Подставляя в (VI. 4. 16), получаем формулу Дюпюи (VI. 3. 4):

$$Q = \frac{2\pi c}{\gamma}\frac{\gamma}{2}\frac{H_к^2 - H_с^2}{\ln\dfrac{R_к}{r_с}} = \pi c \frac{H_к^2 - H_с^2}{\ln\dfrac{R_к}{r_с}}.$$

При переменной вдоль вертикали проницаемости из соображений, аналогичных изложенным выше, можно также получить формулу, связывающую дебит с граничными напорами [4, 5].

Расчет величины промежутка высачивания гораздо сложнее расчета дебитов. Для радиального безнапорного течения точного расчета промежутка высачивания еще не имеется. Точные решения известны лишь для движения через перемычку. Приближенные, но достаточно точные для практических целей методы определения промежутков высачивания, полученные при некоторых упрощающих допущениях и путем электромоделирования, приведены в работах [6, 7, 8].

Для сухого нижнего бьефа промежуток высачивания $h_в$ связан с расходом соотношением, установленным П. Я. Кочиной [Лт. II. 2]:

$$\frac{q}{ch_в} = 1{,}35, \qquad \text{(VI. 4. 17)}$$

Если отделить область шириной a, где $a = h$ (рис. VI. 4), то оказывается, что левее a кривая депрессии хорошо согласуется с гидравлической теорией согласно формулам (VI. 2. 2) и (VI. 3. 3). Вблизи же выхода в нижний бьеф или на скважину гидравлическая теория для расчетов кривой депрессии не пригодна и здесь следует обращаться к точным решениям или экспериментальным данным [Лт. I. 11; Лт. II. 2, 7]. Приближенный расчет промежутка высачивания при радиальном движении приведен в [6, 8, 9].

§ 5. Сведение безнапорного движения к равнодебитному напорному

Рассмотрим напорное движение несжимаемой жидкости в пласте постоянной мощности h (рис. VI. 5, *а*). Расход в направлении оси x, параллельной пласту, вдоль любой вертикали равен

$$q_x = -\int_0^h \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial x}\, dz, \qquad \text{(VI. 5. 1)}$$

где потенциал Φ определен равенствами (I. 2. 17). При этом не делается никаких гипотез о характере распределения потенциала $\Phi(x, y, z)$ вдоль вертикали.

Так как пределы интегрирования в (VI. 5. 1) постоянны, то из формулы (VI. 4. 5) получаем

$$q_x = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h \Phi(x, y, z)\, dz. \qquad \text{(VI. 5. 2)}$$

Обозначим

$$\int_0^h \Phi(x, y, z)\, dz = \overline{\Phi}(x, y)\, h, \qquad \text{(VI. 5. 3)}$$

где $\overline{\Phi} = \overline{\Phi}(x, y)$ — среднее значение потенциала вдоль вертикали, не зависящее, очевидно, от z (рис. VI. 5, *б*). Тогда

$$q_x = -h\frac{\partial \overline{\Phi}(x, y)}{\partial x}. \qquad \text{(VI. 5. 4)}$$

Средняя вдоль вертикали скорость в направлении оси x равна

$$\overline{u} = \frac{q_x}{h} = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x}, \qquad \text{(VI. 5. 5)}$$

Аналогично в направлении оси y

$$\overline{v} = \frac{q_y}{h} = -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial y}, \qquad \text{(VI. 5. 6)}$$

Из формул (VI. 5. 5) и (VI. 5. 6) следует, что пространственное движение в пласте постоянной мощности может быть заменено равнодебитным плоским движением, причем вдоль вертикалей должны браться средние значения потенциала Ф. В частности, дебит любой несовершенной скважины можно определить из формулы Дюпюи, но вместо $\Phi_к$ и $\Phi_с$ подставить соответственно $\overline{\Phi}_к$ и $\overline{\Phi}_с$, являющиеся средними значениями потенциалов на цилиндрической поверхности $r = R_к$ и на цилиндрической поверхности $r = r_с$ (см. рис. VI. 2):

$$Q = \frac{2\pi h (\overline{\Phi}_к - \overline{\Phi}_с)}{\ln \frac{R_к}{r_с}}, \qquad \text{(VI. 5. 7)}$$

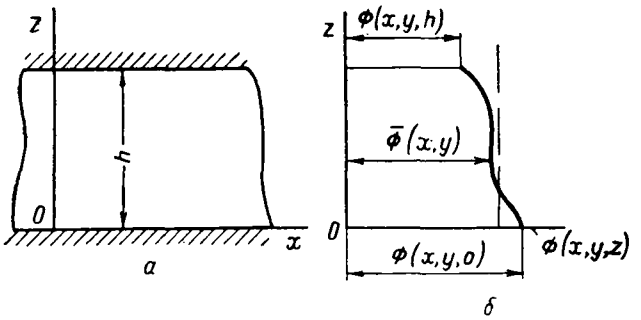


Рис. VI. 5.

Можно принять потенциал на поверхности питания постоянным: $\Phi_к = \text{const}$. Потенциал же $\overline{\Phi}_с$ непосредственно неизвестен. Известен лишь забойный потенциал $\Phi_с$ только вдоль вскрытой части стенки скважины, который в формулах главы V предполагался постоянным.

Можно полагать, что и при переменном потенциале $\Phi_с$ вдоль вскрытой части стенки скважины вариации $\Phi_с$ при сохранении неизменным среднего значения вдоль вскрытой части стенки скважины будут мало отражаться на дебите скважины. Тогда можно пользоваться формулами главы V для фильтрационных сопротивлений C, обусловленных несовершенством скважины, но под $\Phi_с$ подразумевать среднее значение потенциала вдоль вскрытой части забоя, которое для отличия будем обозначать $\Phi'_с$.

Тогда для дебита несовершенной скважины получим

$$Q = \frac{2\pi h (\Phi_к - \Phi'_с)}{\ln \frac{R_к}{r_с} + C}, \qquad \text{(VI. 5. 8)}$$

где C — фильтрационное сопротивление, обусловленное несовершенством забоя.

Из (VI. 5. 7) и (VI. 5. 8) находим

$$\frac{\overline{\Phi}_к - \Phi'_с}{\ln \frac{R_к}{r_с} + C} = \frac{\overline{\Phi}_к - \overline{\Phi}_с}{\ln \frac{R_к}{r_с}},$$

откуда

$$\bar{\Phi}_c = \frac{\Phi_к C + \Phi_c' \ln \frac{R_к}{r_c}}{\ln \frac{R_к}{r_c} + C}. \qquad \text{(VI. 5. 9)}$$

После этих замечаний рассмотрим какое-нибудь поперечное сечение безнапорного потока глубиной h при горизонтальном для простоты водоупоре. Проведем выше h плоскость $z = h_0$ (рис. VI. 6, *а*), где h_0 — произвольно,

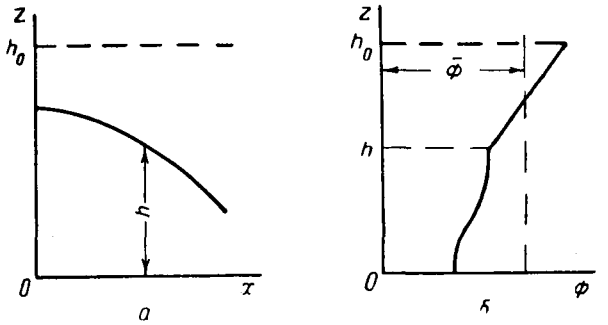


Рис. VI. 6.

и рассмотрим напорный поток в пласте мощностью h_0, но со следующим распределением потенциала вдоль вертикали: в интервале $0 < z < h$ сохраняется потенциал нашего безнапорного течения

$$\Phi = c\left(\frac{p}{\gamma} + z\right),$$

в интервале $h < z < h_0$

$$p = 0, \quad \Phi = cz.$$

График распределения потенциала в воображаемом напорном потоке мощностью h_0 показан на рис. VI. 6, *б*.

Такая линейная экстраполяция потенциала за пределы свободной поверхности ранее предлагалась Маскетом [Лт. I. 11], который, однако, полагал, что при этом расход будет несколько изменяться. В действительности же расход вдоль вертикали напорного и безнапорного потоков будет одинаков, так как сила P вдоль вертикали у обоих потоков одинакова и добавление потенциала $\Phi = cz$ на участке $h < z < h_0$, где действительного течения нет и где давление равно нулю, не изменяет величины результирующей силы P.

Найдя средний потенциал $\bar{\Phi}$ вдоль вертикали в напорном пласте h_0, можно рассчитывать дебиты и средние вдоль вертикалей горизонтальные скорости действительного безнапорного потока по формулам фиктивного плоского напорного движения в пласте мощностью h_0.

Для иллюстрации рассмотрим безнапорное течение к несовершенной скважине радиусом r_c в пласте, где на расстоянии $R_к$ уровень воды $h_к$ (рис. VI. 7, *а*). Скважина вскрыла пласт на глубину b, и в ней установлен уровень h_c. Расстояние дна скважины до водоупора $h_1 = h_к - b$. На рис. VI. 7, *б* показано распределение потенциала вдоль вскрытой стенки скважины: на участке $h_1 < z < h_c$ находится жидкость при гидростатическом распределении давления. Следовательно, на этом участке напор постоянный и потенциал равен ch_c (прямая *1—2*).

Выше уровня в скважине добавляем линейное распределение потенциала $\Phi = cz$ до $z = h_к$ (прямая 2—3). Таким образом, $\Phi_к = ch_к$, $h_0 = h_к$.

Средний потенциал Φ_c' определится, как сторона прямоугольника, равновеликого площади фигуры $h_1 - 1 - 2 - 3 - h_к$:

$$\Phi_c' (h_к - h_1) = ch_c (h_c - h_1) + \frac{1}{2} c (h_c + h_к)(h_к - h_c),$$

откуда

$$\Phi_c' = c \frac{h_c (h_c - h_1) + 0{,}5 (h_к^2 - h_c^2)}{h_к - h_1}. \qquad \text{(VI. 5. 10)}$$

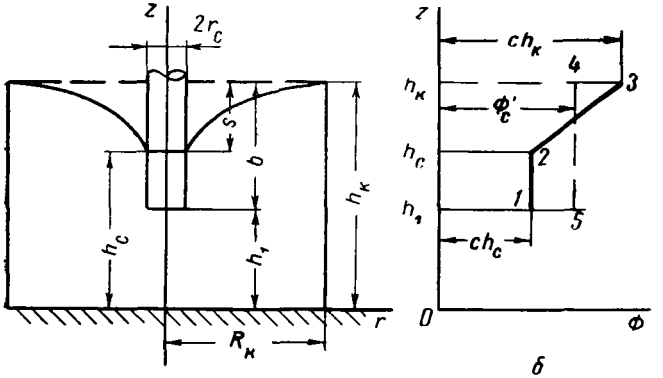


Рис. VI. 7. Схема безнапорного притока к несовершенной скважине.

Находим разность $\Phi_к - \Phi_c'$:

$$\Phi_к - \Phi_c' = ch_к - c \frac{h_c (h_c - h_1) + 0{,}5 (h_к^2 - h_c^2)}{h_к - h_1} =$$

$$= c \frac{0{,}5 (h_к^2 - h_c^2) - (h_к - h_c) h_1}{h_к - h_1}. \qquad \text{(VI. 5. 11)}$$

Подставляя в (VI. 5. 8), получим для дебита Q формулу

$$Q = 2\pi c \frac{0{,}5 (h_к^2 - h_c^2) - (h_к - h_c) h_1}{\left(\ln \frac{R_к}{r_c} + C\right)(h_к - h_1)} h_к. \qquad \text{(VI. 5. 12)}$$

Легко видеть, что при $h_1 = 0$ (совершенная скважина) и $C = 0$ (VI. 5. 12) обращается в формулу Дюпюи.

Заметим, что этим же способом могут решаться задачи об интерференции скважин при безнапорном потоке.

Для совершенных скважин сохраняются формулы теории плоской напорной интерференции скважин. Для несовершенных скважин, расстояние между которыми больше глубины грунтового потока в месте их заложения, можно пользоваться формулами главы V для расчета фильтрационного сопротивления

C, обусловленного несовершенством, так как C от расстояния между скважинами не зависит.

При близком расположении скважин следует обратиться к формулам для C, учитывающим радиус области питания $R_к$ [Лт. V. 17, 18, 19]. За $R_к$ в этом случае можно принять половину расстояния между скважинами.

§ 6. Интегральные соотношения между фильтрационным расходом и граничными потенциалами при плоском и осесимметричном движении в пласте переменной мощности

Рассмотрим сначала плоское движение. Пусть распределение потенциала $\Phi = \Phi(x, z)$ в сечениях x_1 и x_2 (рис. VI. 8) и вдоль кровли и подошвы пласта известно. Тогда в соответствии с формулой дифференцирования определенного интеграла по параметру получим для расхода на единицу ширины пласта

$$q = -\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x}\, dz = -\frac{d}{dx}\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \Phi(x, z)\, dz + \Phi[h_2(x), x]\frac{dh_2}{dx} - \Phi[h_1(x), x]\frac{dh_1}{dx}. \qquad \text{(VI. 6. 1)}$$

Умножая (VI. 6. 1) на dx и интегрируя от x_1 до x_2, будем иметь

$$q(x_2 - x_1) = -\int_{h_1(x_2)}^{h_2(x_2)} \Phi(x_2, z)\, dz + \int_{h_1(x_1)}^{h_2(x_1)} \Phi(x_1 z)\, dz + \int_{h_2(x_1)}^{h_2(x_2)} \Phi[h_2(x), x]\, dh_2 - \int_{h_1(x_1)}^{h_1(x_2)} \Phi[h_1(x), x]\, dh_1 = -J_1 + J_2 + J_3 - J_4. \qquad \text{(VI. 6. 2)}$$

Каждый из интегралов в (VI. 6. 2) можно интерпретировать геометрически следующим образом:

J_1 — площадь эпюры потенциала в сечении x_2	J_2 — площадь эпюры потенциала в сечении x_1	J_3 — площадь эпюры потенциала вдоль кровли $h_2(x)$	J_4 — площадь эпюры потенциала вдоль подошвы $h_1(x)$

Так как распределение потенциала вдоль границ по предложению известно, то правая часть формулы (VI. 6. 2) может быть легко вычислена.

Очевидно, что $q(x_2 - x_1)$ равно заштрихованной на рис. VI. 9 площади и формула (VI. 6. 2) допускает, таким образом, простую геометрическую интерпретацию.

В случае осесимметричного течения (скважина в пласте переменной мощности) задача решается аналогично. Действительно, в этом случае расход, т. е. дебит скважины, равен (рис. VI. 10)

$$Q = \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r}\, 2\pi r\, dz, \qquad \text{(VI. 6. 3)}$$

а так как

$$r\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \ln r},$$

то

$$\frac{Q}{2\pi} = \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} \frac{\partial \Phi}{\partial \ln r}\, dz, \qquad \text{(VI. 6. 4)}$$

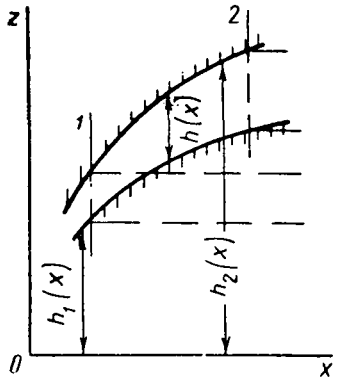


Рис. VI. 8.

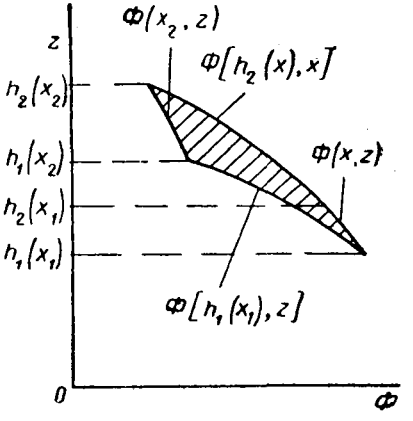


Рис. VI. 9.

что по виду совпадает с (VI. 6. 1). Очевидно, что правила построения эпюры сохраняются с заменой x на $\ln r$, а расхода q — величиной $\frac{Q}{2\pi}$. В качестве примера обратимся к рассмотренным выше задачам безнапорной фильтрации.

Сложность задач о безнапорном течении заключается в том, что положение свободной поверхности неизвестно и подлежит определению. Таким образом, нужно решить уравнение Лапласа в области, одна из границ которой, а именно свободная поверхность, неизвестна. Вдоль этой границы заданы условия $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ и $p = \text{const}$.

Приведенные выше интегральные соотношения позволяют найти расход без предварительного определения формы свободной поверхности и потенциала во всей области течения: действительно, при безнапорном движении в пласте с горизонтальным водоупором, когда $h_1(x) = 0$, $h_2 = h$, можно положить $I_4 = 0$, а I_3 легко вычисляется, учитывая, что $\Phi[h_2(x), x]$ есть линейная функция глубины $h_2 = h$.

Так как $\Phi = c\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)$, то на свободной поверхности $z = h$, понимая под p

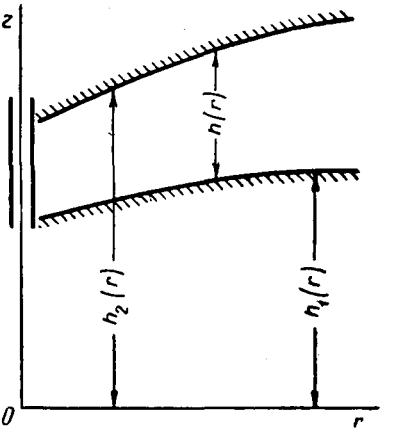


Рис. VI. 10. Схема притока к скважине при переменной мощности пласта.

избыточное давление, имеем $\Phi = ch$. В сечениях $x=0$, $x=l$ напор задан: $x=0$, $\Phi = cH_1$; $x=l$, $\Phi = cH_2$.

Строя эпюру распределения потенциала на границах или производя вычисления непосредственно по формуле (VI. 6. 2), получаем

$$q = \frac{c}{2}\,\frac{H_1^2 - H_2^2}{l},$$

что совпадает с (VI. 2. 4). Аналогичным путем доказывается справедливость формулы Дюпюи для безнапорного притока к грунтовому колодцу (VI. 3. 4).

§ 7. Дифференциальные уравнения гидравлической теории нестационарной безнапорной фильтрации. Аналогия с неустановившейся фильтрацией идеального газа

Рассмотрим нестационарный безнапорный грунтовый поток при горизонтальном для простоты водоупоре. Согласно гидравлической теории безнапорного движения, изложенной в § 2, 3, считая напор $H = H(x, y, z, t)$ вдоль каждой вертикали постоянным, для горизонтальных проекций скорости u, v, также равномерно распределенных вдоль каждой вертикали, получим при $H = h$ (глубине потока)

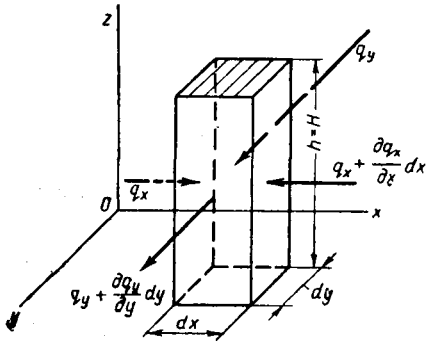


Рис. VI. 11.

$$u = -c\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad v = -c\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{VI. 7. 1}$$

где c — коэффициент фильтрации.

Соответственно расходы грунтового потока на единицу ширины в направлениях x, y равны

$$q_x = uH\cdot 1 = -cH\frac{\partial H}{\partial x} = -c\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}H^2\right),$$

$$q_y = vH\cdot 1 = -cH\frac{\partial H}{\partial y} = -c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}H^2\right). \tag{VI. 7. 2}$$

Составим уравнение неразрывности или сплошности нашего нестационарного грунтового потока. Для этого выделим вертикальный параллелепипед высотой H, равной глубине потока, с основанием $dxdy$ (рис. VI. 11) и вычислим баланс поступающей и вытекающей жидкости. Жидкость считается несжимаемой.

За время dt в наш параллелепипед поступает объем жидкости (учитывая, что q_x и q_y — расходы на единицу ширины вдоль направлений x и y)

$$(q_x\,dy + q_y\,dx)\,dt.$$

Вытекает за то же время

$$\left[\left(q_x+\frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx\right)dy+\left(q_y+\frac{\partial q_y}{\partial y}\,dy\right)dx\right]dt.$$

Таким образом, за время dt в параллелепипеде накапливается объем dV жидкости, равный разности между поступившим и вытекшим объемами:

$$dV=-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)dx\,dy\,dt. \qquad \text{(VI. 7. 3)}$$

Накопленный объем dV пойдет на увеличение высоты H нашего параллелепипеда, изменение которой за время dt равно $\frac{\partial H}{\partial t}dt$. Учитывая пористость, получаем

$$dV=\frac{\partial H}{\partial t}\,dtm\,dx\,dy. \qquad \text{(VI. 7.4)}$$

Приравнивая правые части уравнений (VI. 7. 3) и (VI. 7. 4), получаем уравнение неразрывности или сплошности грунтового потока

$$m\frac{\partial H}{\partial t}=-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\right). \qquad \text{(VI. 7. 5)}$$

Подставляя в уравнение (VI. 7. 5) значения q_x и q_y из уравнений (VI. 7. 2), получаем окончательно дифференциальное уравнение гидравлической теории нестационарного безнапорного грунтового потока, называемое иногда уравнением Буссинеска (по имени впервые получившего его французского ученого):

$$m\frac{\partial H}{\partial t}=c\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}H^2\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{2}H^2\right)\right]$$

или

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{c}{m}\nabla^2\left(\frac{1}{2}H^2\right). \qquad \text{(VI. 7. 6)}$$

Обратимся к общему дифференциальному уравнению неустановившегося движения сжимаемой жидкости (II. 2. 19). Для изотермического течения идеального газа, вводя функцию Лейбензона $P=\int\gamma(p)\,dp=\frac{1}{2}\frac{\gamma_{ат}}{p_{ат}}p^2$, получаем из (II. 2. 19)

$$\frac{\partial(m\gamma)}{\partial t}=m\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\frac{k}{\mu}\nabla^2P. \qquad \text{(VI. 7. 7)}$$

В формуле (VI. 7. 7) пористость m можно принять постоянной, так как изменение пористости ничтожно мало по сравнению с изменением объемного веса газа вследствие его значительной сжимаемости.

Тогда уравнение (VI. 7. 7) можно записать так:

$$m\frac{\gamma_{ат}}{p_{ат}}\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{k}{\mu}\nabla^2 P. \qquad \text{(VI. 7. 8)}$$

Последнее уравнение можно представить еще в таком виде:

$$m\frac{\gamma_{ат}}{p_{ат}}\frac{dp}{dP}\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{k}{\mu}\nabla^2 P. \qquad \text{(VI. 7. 9)}$$

Но

$$dP=\gamma\, dp,$$

$$\frac{dp}{dP}=\frac{1}{\gamma}=\frac{p_{ат}}{\gamma_{ат}\,p}.$$

Подставляя в уравнение (VI. 7. 9), получаем

$$\frac{m\gamma_{ат}}{p_{ат}}\frac{p_{ат}}{\gamma_{ат}\,p}\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{k}{\mu}\nabla^2 P$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{kp}{m\mu}\nabla^2 P. \qquad \text{(VI. 7. 10)}$$

В последнем уравнении p можно выразить через P согласно уравнению $P=\frac{\gamma_{ат}}{2p_{ат}}p^2$. Тогда получим

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{k}{m\mu}\sqrt{\frac{2p_{ат}}{\gamma_{ат}}P}\,\nabla^2 P. \qquad \text{(VI. 7. 11)}$$

Уравнение (VI. 7. 11) представляет собой окончательный вид уравнения Лейбензона для нестационарного изотермического движения газа в пористой среде.

Выражая P через давление, уравнение (VI. 7. 11) можно записать еще так:

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\gamma_{ат}}{p_{ат}}p\frac{\partial p}{\partial t},\quad \nabla^2 P=\frac{\gamma_{ат}}{p_{ат}}\nabla^2\left(\frac{1}{2}p^2\right),$$

$$\frac{\gamma_{ат}}{p_{ат}}p\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{kp}{m\mu}\frac{\gamma_{ат}}{p_{ат}}\nabla^2\left(\frac{1}{2}p^2\right)$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{k}{m\mu}\nabla^2\left(\frac{1}{2}p^2\right). \qquad \text{(VI. 7. 12)}$$

Уравнение (VI. 7. 12), как отметил Л. С. Лейбензон, имеет замечательное сходство с уравнением гидравлической теории нестационарного безнапорного движения жидкости. Действительно, уравнения (VI. 7. 12) и (VI. 7. 6) совпадают.

Таким образом, между безнапорным грунтовым потоком и фильтрацией газа существует следующая аналогия: давлению газа p соответствует глубина или напор H грунтового потока, коэффициенту $\frac{k}{\mu}$ для газа — коэффициент фильтрации c для грунтового потока. При помощи этой аналогии все задачи, решенные для фильтрации газа, могут быть распространены на соответствующие случаи безнапорного грунтового потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Расчет понижения свободной поверхности в теле плотины при изменении уровней верхнего и нижнего бьефов. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1953.

2. Михайлов Г. К. Применение модели предельно анизотропных грунтов для оценки решений некоторых краевых задач о движении потока грунтовых вод по водоупору. Инж. сб. АН СССР, т. XV, 1953.

3. Чарный И. А. Строгое доказательство формулы Дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания. Докл. АН СССР, т. 79, № 6, 1951.

4. Чарный И. А. Безнапорная фильтрация в среде с переменной вдоль вертикали проницаемостью. Докл. АН СССР, т. 88, № 5, 1953.

5. Чарный И. А. Об одном интегральном соотношении теории фильтрации и его некоторых приложениях. Материалы межвузовского совещания по вопросам новой техники в нефтяной промышленности. Гостоптехиздат, 1958.

6. Чарный И. А. О величине промежутка высачивания при безнапорной фильтрации. Докл. АН СССР, т. 88, № 5, 1953.

7. Аравин В. И., Нумеров С. Н. Фильтрационные расчеты гидротехнических сооружений. Госстройиздат, 1948.

8. Шестаков В. М. Определение участка высачивания фильтрационного потока у стенки скважины. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 1, 1959.

9. Чарный И. А. Приток грунтовых вод к скважинам и иглофильтрам. Инж. сб. АН СССР, т. XVII, 1953.

10. Чарный И. А. Безнапорный приток к гидродинамически несовершенным скважинам и иглофильтрам. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1953.

ГЛАВА VII

ДВИЖЕНИЕ И РАВНОВЕСИЕ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. Введение

Задача о движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде является в точной постановке одной из наиболее сложных в теории фильтрации.

Первые исследования ее, возникшие в связи с вопросом о стягивании контура нефтеносности при водонапорном режиме течения, принадлежат Л. С. Лейбензону [Лт. I. 6, 7]. Дальнейшее развитие эта задача получила в работах М. Маскета, В. Н. Щелкачева, П. Я. Полубариновой-Кочиной и других.

Задача о движении в пористой среде границы раздела двух жидкостей с различными физическими свойствами — вязкостью и плотностью — встречается не только в вопросах эксплуатации нефтяных месторождений, но и в случае водонапорного режима газовых месторождений, когда газ притекает к скважинам под напором краевой воды, ряда технологических процессов, где одна жидкость замещает другую в пористой среде, и т. д.

В общем случае строгое гидродинамическое решение, пригодное для практических расчетов, отсутствует. Исследованы лишь отдельные, частные случаи, а также разработан ряд приближенных методов, некоторые из которых изложены ниже.

Без принципиальных затруднений получается решение задачи о движении жидкой частицы вдоль линии тока при установившемся течении, т. е. для одножидкостной системы при постоянных значениях контурных потенциалов.

На границе раздела двух сред происходит своеобразное преломление линий тока. Пусть (рис. VII. 1) кривая PQ является границей раздела двух жидкостей с вязкостями μ_1, μ_2 и пусть, например, $\mu_2 > \mu_1$.

Рассмотрим произвольную точку M границы PQ и проведем через нее касательную $\vec{\tau}$ к PQ и нормаль $\vec{n}$. Найдем проекции скоростей

фильтрации частиц первой и второй жидкостей, находящихся в этот момент в точке M, на $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$. Согласно неразрывности течения элементарные расходы обеих жидкостей через произвольный элемент границы раздела должны быть равны. Отсюда следует, что и нормальные проекции обеих скоростей равны, т. е. $w_{1n} = w_{2n}$. Давление в пласте в точке M также должно быть одинаково для обеих жидкостей, так как при малых дозвуковых скоростях разрыва давления в сплошном потоке быть не может. Касательные же компоненты скоростей обеих жидкостей согласно закону Дарси будут, опуская для простоты массовые силы,

$$w_{1\tau} = -\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial \tau},$$

$$w_{2\tau} = -\frac{k}{\mu_2}\frac{\partial p}{\partial \tau}.$$

Проницаемость k считаем постоянной. Но μ_1, μ_2 различны, следовательно, $w_{1\tau} \neq w_{2\tau}$, и если $\mu_2 > \mu_1$, то $w_{1\tau} > w_{2\tau}$. Отсюда следует, что и результирующие векторы скоростей $\vec{w}_1$ и $\vec{w}_2$ точки M для частиц каждой жидкости будут различны и, следовательно, линии тока AM и BM, проходящие через точку M в каждой из жидкостей, будут иметь излом в точке M. Заметим, что в общем случае граница раздела не является в процессе течения эквипотенциалью, хотя в начальный момент и может быть таковой.

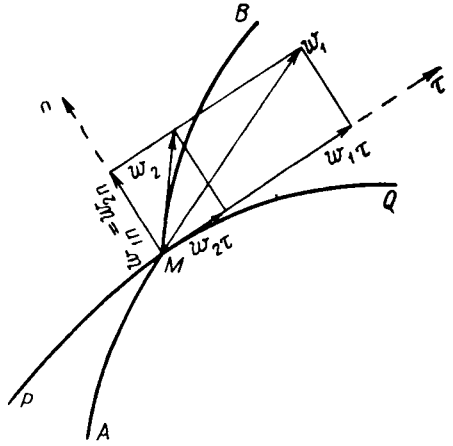


Рис. VII. 1. График скоростей жидких частиц на границе раздела двух жидкостей, совместно движущихся в пористой среде.

Точное решение задачи о продвижении границы раздела, когда $\mu_1 \neq \mu_2$, — в общем случае нерадиального и непрямолинейного течения — наталкивается на чрезвычайные математические затруднения. Поэтому вместо точных решений приходится искать приближенные.

Следует сделать еще одно существенное замечание о самой физической природе вытеснения одной жидкости другой из пористой среды и о математической постановке такого рода задач.

Как было указано выше (§ 4, гл. I), вследствие неравномерного распределения размеров поровых каналов действительные скорости частиц жидкости распределены неравномерно. Поэтому в большинстве рассматриваемых ниже задач определяются расчетные средние действительные скорости частиц в сечениях элементарных трубок тока, связанные со скоростью фильтрации $\vec{w}$ соотношением $\vec{v} = \frac{\vec{w}}{m}$,

где m — пористость. По этим скоростям и будет производиться в дальнейшем расчет движения отмеченных частиц, границы раздела двух жидкостей и т. д. При этом будут получаться принципиально правильные результаты для интегральных характеристик — расходов и средних скоростей. Истинные же скорости частиц могут отличаться от этих средних.

В рассматриваемых ниже задачах этой главы жидкости предполагаются несмешивающимися, взаимно нерастворимыми и химически не реагирующими одна с другой и с пористой средой. Вытеснение одной жидкости предполагается происходящим полностью — так называемое «поршневое» вытеснение. Это также является идеализацией, так как в действительности полного вытеснения не происходит. Задачи, в которых учитывается неполнота вытеснения, рассмотрены в главе IX.

§ 2. Уравнения движения отмеченных частиц в потоке однородной жидкости

Рассмотрим уравнения движения отмеченных частиц в потоке однородной жидкости.

Пусть дана однородная жидкость, потенциал движения которой $\Phi(x, y, z, t)$ известен.

Истинная скорость движения частицы $\frac{ds}{dt}$, скорость фильтрации $w = m\frac{ds}{dt}$, где ds — элемент траектории.

Тогда уравнения движения в координатной форме могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} m\frac{dx}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = f_1(x, y, z, t), \\ m\frac{dy}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = f_2(x, y, z, t), \\ m\frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = f_3(x, y, z, t). \end{aligned} \qquad \text{(VII. 2. 1)}$$

Функции f_1, f_2, f_3 известны, поскольку потенциал $\Phi(x, y, z, t)$ считается заданным.

Интегрируя систему (VII. 2. 1), получаем закон движения или траекторию жидкой частицы в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Интегрирование производится особенно просто, если скорость есть известная функция одной величины s:

$$m\frac{ds}{dt} = w(s).$$

Можно поставить более широкую задачу о движении жидкой линии или жидкой поверхности.

Пусть надо найти уравнение жидкой поверхности $F(x, y, z, t) = 0$ при начальном условии

$$F(x, y, z, 0) = f(x, y, z), \qquad \text{(VII. 2. 2)}$$

где $f(x, y, z)$ — известная функция.

Проекции перемещения жидкой частицы за время δt будут $\frac{u}{m}\delta t$, $\frac{v}{m}\delta t$, $\frac{w}{m}\delta t$, где u, v, w — проекции скорости фильтрации на оси x, y, z.

Требуя, чтобы эти частицы остались на жидкой поверхности, имеем

$$F\left(x + \frac{u}{m}\delta t,\ y + \frac{v}{m}\delta t,\ z + \frac{w}{m}\delta t,\ t + \delta t\right) = 0.$$

Развертывая это соотношение в ряд Тейлора и удерживая члены с первой степенью δt, получаем

$$F(x, y, z, t) + \frac{u}{m}\delta t\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{v}{m}\delta t\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{w}{m}\delta t\frac{\partial F}{\partial z} + \delta t\frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

откуда, так как $F(x, y, z, t) = 0$ по условию, устремляя δt к нулю, получаем

$$u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} + m\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad \text{(VII. 2. 3)}$$

или, заменяя скорости через производные потенциала,

$$m\frac{\partial F}{\partial t} - \operatorname{grad}\Phi \operatorname{grad} F = 0. \qquad \text{(VII. 2. 4)}$$

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (VII.2.3) представляет собой соотношение Кельвина, удовлетворяющееся на всякой поверхности $F(x, y, z, t) = 0$, движущейся вместе с жидкостью, т. е. на любой жидкой поверхности.

Требование найти решение уравнения (VII. 2. 3), удовлетворяющее условию (VII. 2. 2), представляет собой задачу Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению (VII. 2. 3), имеет вид [1]:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = \frac{dt}{m}, \qquad \text{(VII. 2. 5)}$$

причем u, v, w — известные функции координат и времени, так как потенциал скорости Φ задан. Ряд частных случаев рассмотрен Маскетом [Лт. I. 11), а также в ряде других работ (Лт. I. 8, 12, 19; Лт. II. 2; 2, 24, 39, 40].

§ 3. Расчет скорости вытеснения одной жидкости другой из трубок тока, предполагаемых неизменными

Мы уже видели, что в общем случае — непрямолинейного и нерадиального течений — линии тока на границе раздела двух жидкостей испытывают преломление. Можно мысленно построить систему

трубок тока в областях, занятых движущимися жидкостями. На границе раздела каждая трубка тока будет иметь излом, перемещающийся вместе с этой границей по мере вытеснения одной жидкости другой. Таким образом, весь процесс течения можно рассматривать как вытеснение одной жидкости другой из системы деформируемых трубок тока, сечения которых изменяются в зависимости от времени.

Заменим теперь эту истинную картину течения другой, физически заведомо неверной картиной. Предположим, что за все время движения остается неизменной картина линий тока, существовавшая в начальный момент $t = 0$.

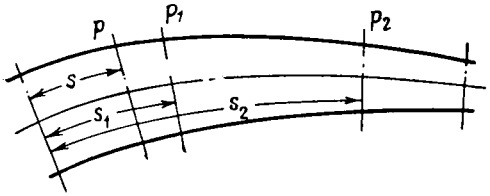


Рис. VII. 2.

Тогда задача сводится к расчету времени вытеснения одной жидкости другой из системы трубок переменного по длине сечения, когда все эти трубки являются уже жесткими, недеформируемыми.

Рассмотрим какую-либо трубку тока переменного сечения (рис. VII. 2). Пусть площадь ее поперечного сечения есть функция длины s, отсчитываемой вдоль оси. Будем считать, что скорости фильтрации во всех точках сечения $f = f(s)$ одинаковы.

Массовыми силами для простоты будем пренебрегать. Заметим попутно, что учет гравитационного эффекта, т. е. различия плотностей, не вносит никаких принципиальных затруднений, и, как правило, дает небольшую поправку. Из закона Дарси для расхода q, считая жидкости несжимаемыми, имеем

$$q = -\frac{k}{\mu}\frac{dp}{ds}f. \qquad \text{(VII. 3. 1)}$$

Предположим, что известны давления p_1 и p_2 в сечениях $s = s_1$ и $s = s_2$. Выразим q через p_1 и p_2. Для этого из (VII. 3. 1) найдем

$$dp = -\frac{q\mu}{k}\frac{ds}{f},$$

откуда, интегрируя и замечая, что q не зависит от s, получаем

$$p_1 - p_2 = \frac{q\mu}{k}\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{f},$$

$$q = \frac{k}{\mu}\frac{p_1 - p_2}{\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{f}}. \qquad \text{(VII. 3. 2)}$$

Если проницаемость k переменна, то вместо (VII. 3. 2) будем иметь

$$q = \frac{1}{\mu} \frac{p_1 - p_2}{\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{kf}}. \qquad \text{(VII. 3. 3)}$$

Формулы (VII. 3. 2) и (VII. 3. 3) выражают закон Дарси для трубки переменного сечения с равномерным распределением скоростей в поперечных сечениях.

Рассмотрим теперь жесткую трубку переменного сечения длиной l, в которой одна жидкость вытесняет другую. Обозначим вытесняющую жидкость индексом 1, а вытесняемую — индексом 2. Этими же

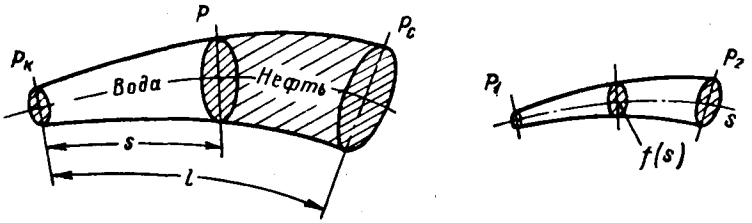


Рис. VII. 3.

индексами будем обозначать в дальнейшем величины, связанные с вытесняющей или вытесняемой жидкостью. Пусть в одном сечении трубки, занятом вытесняющей жидкостью, давление равно $p_к$ (контур питания), а в другом, отстоящем от первого на расстоянии $s = l$, занятом вытесняемой жидкостью, равно p_c (скважины).

Предположим, что закон изменения площади f поперечного сечения трубки по длине известен:

$$f = f(s). \qquad \text{(VII. 3. 4)}$$

Пусть первая жидкость занимает в данный момент длину трубки s, а вторая $l - s$ (рис. VII. 3). Найдем в этом положении скорость перемещения границы раздела. Обозначая давление в граничном сечении через p_{1-2} и считая проницаемость k постоянной, согласно (VII. 3. 2) получаем

$$q = fw_{1-2} = fm\frac{ds}{dt} = \frac{k}{\mu_1} \frac{p_к - p_{1-2}}{\int_0^s \frac{ds}{f}} = \frac{k}{\mu_2} \frac{p_{1-2} - p_c}{\int_s^l \frac{ds}{f}}. \qquad \text{(VII. 3. 5)}$$

Рассмотрим теперь течение, которое будет в той же трубке, когда она вся будет заполнена только одной жидкостью, например второй вытесняемой, при тех же контурных давлениях $p_к$ и $p_с$. Давление в этом же сечении s обозначим через p_{2-2}, скорость w_{2-2}. Тогда

$$fw_{2-2} = \frac{k}{\mu_2} \frac{p_к - p_{2-2}}{\int\limits_0^s \frac{ds}{f}} = \frac{k}{\mu_2} \frac{p_{2-2} - p_с}{\int\limits_s^l \frac{ds}{f}} . \qquad \text{(VII. 3. 6)}$$

Подынтегральные функции в (VII. 3. 5) и (VII. 3. 6) одинаковы, так как мы условились считать трубку недеформируемой. Тогда, разделив (VII. 3. 5) на (VII. 3. 6), найдем

$$\frac{w_{1-2}}{w_{2-2}} = \frac{p_к - p_{1-2}}{\frac{\mu_1}{\mu_2}(p_к - p_{2-2})} = \frac{p_{1-2} - p_с}{p_{2-2} - p_с}$$

или

$$\frac{w_{1-2}}{w_{2-2}} = \frac{p_к - p_с}{\mu_0 (p_к - p_{2-2}) + (p_{2-2} - p_с)} , \qquad \text{(VII. 3. 7)}$$

где

$$\mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2} . \qquad \text{(VII. 3. 8)}$$

Формула (VII. 3. 8) является искомой. Она позволяет связать скорость w_{1-2} для двухжидкостной системы со скоростью w_{2-2} однажидкостной.

Таким образом, если одножидкостный поток известен, по формуле (VII. 3. 7) можно найти скорости в любой точке. Отметим, что этот вывод применим и к пространственным потокам. Очевидно, формула (VII. 3. 7) будет строго верна для прямолинейного и радиального течений, когда деформаций трубок тока вследствие преломления на границе не происходит. Вообще же говоря, формула (VII. 3. 7) неверна, ибо, как указывалось выше, траектории частиц в одножидкостной и двухжидкостной системах могут быть различными.

В тех случаях, когда существуют траектории, общие для обеих жидкостей, например, прямая, из геометрических соображений можно судить, в какую сторону мы делаем ошибку, пользуясь формулой (VII. 3. 7).

Пусть, например, вытесняемая жидкость под напором вытесняющей поступает к линейной батарее скважин (рис. VII. 4); T — контур питания, MN — граница раздела в данный момент, AS — прямолинейная осевая линия тока, проходящая через какую-либо скважину S. Рассмотрим примерный вид линии тока в обеих областях, проведенной через точку A', весьма близкую к A. Давления на контурах питания и скважин будем считать неизменными во всех рассматриваемых ниже случаях.

Предположим сначала, что вязкости обеих жидкостей равны, т. е. система одножидкостная. Тогда на границе раздела не будет преломления линий тока и линия тока, проходящая через A', будет изображаться плавной кривой $A'B'S$. Пусть теперь $\mu_1 \neq \mu_2$; тогда линия тока, проходящая через A', будет иметь излом на границе раздела. Если $\mu_1 < \mu_2$, то из закона преломления следует, что линия тока будет иметь вид ломаной $A'CS$, т. е. приблизится к прямой AS. Формула (VII. 3. 7) соответствует условию, что линия $A'B'S$ остается неизменной, чего, как мы видим, в действительности не происходит. Таким образом, во второй зоне при $\mu_1 < \mu_2$ в окрестности прямой

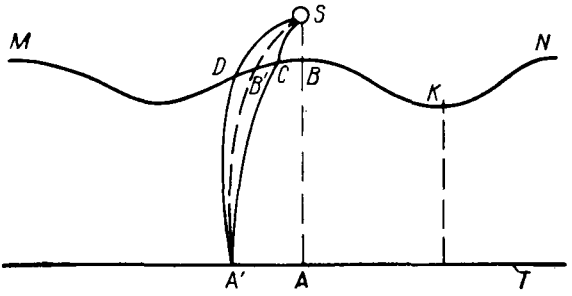


Рис. VII. 4. Схема линии тока при прорыве к скважине при различном соотношении вязкостей вытесняемой и вытесняющей жидкостей.

AS происходит сгущение линий тока по сравнению с картиной линий тока при $\mu_1 = \mu_2$. Заставляя теперь точку A' стремиться к A, приходим к выводу, что скорость точки B границы раздела, лежащей на прямолинейной траектории AS, в действительности будет несколько больше той величины, которая получится по формуле (VII. 3. 7), так как сгущение линий тока соответствует увеличению скоростей. Следовательно, эта формула для движения по прямой AS дает при $\mu_1 < \mu_2$ несколько заниженное значение скорости против действительной.

Рассуждая совершенно аналогичным образом, мы придем к заключению, что при $\mu_1 > \mu_2$ линия тока будет иметь вид $A'DS$ и в этом случае для точки B по формуле (VII. 3. 7) получится значение скорости, большее действительного. Таким же образом можно показать, что для точки K формула (VII. 3. 7) будет давать обратные результаты, нежели для точки B, т. е. преувеличенные значения скорости при $\mu_1 < \mu_2$ и преуменьшенные при $\mu_1 > \mu_2$.

Из этих соображений оказывается возможным установить, в какую сторону мы ошибаемся, пользуясь формулой (VII. 3. 7).

Схемы одномерного вытеснения одной жидкости другой в трубке тока переменного сечения широко используются в расчетах раз-

работки нефтяных и газовых месторождений. При помощи этих схем можно рассмотреть, в частности, задачи о наивыгоднейшей расстановке батарей скважин (Лт. I. 16; Лт. II. 9; Лт. IV. 2].

§ 4. Замечания о задачах фильтрации с подвижными граничными условиями. Сведение задачи о движении границы раздела к решению интегро-дифференциального уравнения специального типа

Задачи с теми или иными краевыми условиями на подвижных границах, форма и закон движения которых неизвестны и подлежат определению, в большинстве случаев еще не имеют точных эффективных решений. К ним относятся, в частности, задачи точной теории волн на границе раздела жидкостей, теории образования и движения неодномерных ударных волн и т. д.

Помимо указанного выше приближенного метода жестких трубок тока, к решению задач движения границы раздела жидкостей в пористых средах применяются другие приближенные методы, основанные на той или иной линеаризации условий на подвижной границе.

Иногда применяются и чисто вычислительные методы, в том числе с использованием цифровых или моделирующих устройств, для решения уравнения Лапласа при заданных граничных условиях и известных областях. При помощи этих устройств задача движения границы раздела решается следующим образом: в начальный момент $t = 0$ граница раздела известна и, решая совместно уравнения Лапласа $\nabla^2\Phi_2=0$, $\nabla^2\Phi_1 = 0$ в областях, занятых движущимися жидкостями *1* и *2* при граничных условиях для $t = 0$, можно вычислить нормальные компоненты скорости $w_{1n} = w_{2n} = \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \dfrac{\partial\Phi_2}{\partial n}$ для точек границы раздела в момент $t = 0$.

Выбирая затем достаточно малый интервал времени $\triangle t_1$, можно построить новое положение границы раздела по элементарным перемещениям вдоль нормали $\triangle n \approx w_n \triangle t_1$ (см. рис. VII. 1). Затем вновь решаются уравнения Лапласа уже для новой конфигурации границы раздела к моменту $t = \triangle t_1$, определяются нормальные компоненты скорости и находится перемещение границы раздела к следующему моменту: $t = \triangle t_1 + \triangle t_2$. Процесс повторяется вплоть до желаемого момента $t = \triangle t_1 + \triangle t_2 + \ldots + \triangle t_n$. Обычно выбираются равные интервалы $\triangle t_1 = \triangle t_2 = \ldots = \triangle t$. Контролем служит степень совпадения расчетов при шаге $\triangle t$ и $\frac{1}{2}\triangle t$, как это обычно делается при конечно-разностных схемах, а также проверка баланса объемов, пройденных жидкостями *1* и *2*. Существенным недостатком этого метода, как, впрочем, и многих других конечно-разностных схем, является отсутствие доказательства сходимости процесса к точному решению при стремлении шага $\triangle t$ к нулю.

Для плоской задачи стягивания контура нефтеносности при нулевой вязкости вытесняющей воды $\mu_1 = 0$ (задача Лейбензона), методы точного решения предложены в работах П. Я. Кочиной, Л. А. Галина, П. П. Куфарева и Ю. П. Виноградова [Лт. II. 2; 3, 4, 5, 6]. В основе этих методов лежит некоторая функция комплексного переменного, реализующая конформное отображение неизвестной области течения на круг вспомогательной плоскости. Задавая эту функцию в виде ряда, коэффициенты которого зависят от времени, из условий на подвижной границе для коэффициентов можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений, для расчетов, впрочем, очень сложную. Следует отметить, что при неодномерном стягивании контура нефтеносности к скважине получается согласно этим решениям физически нереальный результат в виде точки возврата задолго до прорыва воды к скважине (рис. VII. 5). Возможная причина лежит в неучете инерционных сил и капиллярных эффектов.

Другой метод решения задачи при $\mu_1 \neq \mu_2$ был предложен В. Л. Даниловым [7, 8]. Пользуясь методами теории потенциала, В. Л. Данилов построил некоторое интегро-дифференциальное уравнение для подвижной границы раздела, которое затем было решено для нескольких примеров на быстродействующих вычислительных машинах. Решение В. Л. Данилова приводится ниже.

Плоские и пространственные задачи о перемещении границы раздела двух несжимаемых жидкостей с различными вязкостями и удельными весами в недеформируемых пластах могут быть исследованы в точной постановке (для приведенной выше схемы процесса поршневого вытеснения) методами теории потенциала. С математической точки зрения они сводятся к задачам Коши для интегро-дифференциальных уравнений специального типа [7, 8, 9].

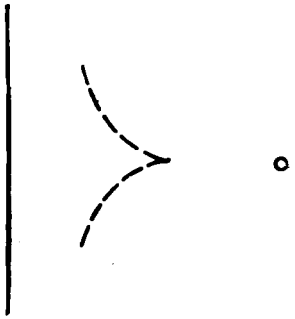


Рис. VII. 5. Схема образования точки возврата до прорыва в скважину.

Покажем применение этого метода на примере плоской задачи о движении замкнутого контура нефтеносности Г при работе системы скважин в неограниченном пласте с постоянными мощностью h, пористостью m и проницаемостью k (рис. VII. 6). Вязкость нефти внутри контура Г (область G_1) обозначим μ_1, вязкость воды вне контура Г (область G_2) μ_2. Влиянием различия удельных весов в пласте будем пренебрегать.

Пусть скважины (в плоской задаче это вертикальные линейные источники и стоки с постоянной интенсивностью) имеют координаты x_i, y_i и объемные дебиты $Q_i(t)$, причем значениям индекса $i = 1, 2, \ldots, j$ соответствуют эксплуатационные скважины в G_1, а значениям $i = j+1, j+2, \ldots, j+l$ — нагнетательные скважины в G_2.

При указанных выше условиях течение является плоским, а давление $p(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 p = 0 \qquad \text{(VII. 4. 1)}$$

всюду, за исключением особых точек-скважин и в общем случае бесконечно удаленной точки плоскости, а также особой линии — границы раздела жидкостей. На границе раздела — контуре Г — как в начальный момент, так и во все последующее время движения выполняются следующие условия:

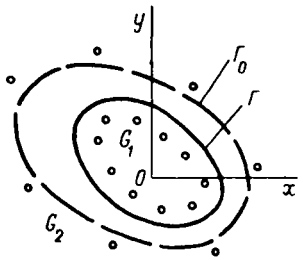


Рис. VII. 6.

1) давление при переходе через контур Г изменяется непрерывно; обозначая индексом «+» предельное значение p при подходе к Г изнутри и индексом «—» предельное значение при подходе к Г снаружи, имеем

$$p^+ = p^-; \qquad \text{(VII. 4. 2)}$$

2) нормальная составляющая скорости фильтрации вследствие неразрывности течения непрерывна при переходе через Г. Учитывая закон Дарси

$$\vec{w} = -c_i \operatorname{grad} p, \quad i = 1,2, \qquad \text{(VII. 4. 3)}$$

из условия $w_n^+ = w_n^-$ находим

$$c_1 \frac{\partial p^+}{\partial n} = c_2 \frac{\partial p^-}{\partial n}, \qquad \text{(VII. 4. 4)}$$

где $c_1=\frac{k}{\mu_1}$ — коэффициент текучести в нефтяной зоне; $c_2=\frac{k}{\mu_2}$ — то же в водной зоне; n — внутренняя (для определенности) нормаль к контуру Γ [1].

Введем уравнение неизвестной границы раздела Γ в неявной форме:

$$F(x, y, t)=0. \tag{VII. 4. 5}$$

Начальное положение ее Γ_0 известно:

$$F(x\ y, 0)=F_0(x, y)=0. \tag{VII. 4. 6}$$

Беря полную производную от уравнения (VII. 4. 5) по времени, имеем

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dx}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial n}v_n=0, \tag{VII. 4. 7}$$

v_n — скорость перемещения контура Γ по нормали n к нему.

Из (VII. 4. 3) и (VII. 4. 4) следует

$$v_n=\frac{1}{m}w_n=-\frac{c_1}{m}\frac{\partial p^+}{\partial n}=-\frac{c_2}{m}\frac{\partial p^-}{\partial n}. \tag{VII. 4. 8}$$

Тогда из (VII. 4. 7) и (VII. 4. 8) вытекают две эквивалентные формы уравнения движения:

$$\frac{\partial p^+}{\partial n}=\frac{m}{c_1}\frac{\partial F}{\partial t}\Big/\frac{\partial F}{\partial n}, \tag{VII. 4. 9а}$$

$$\frac{\partial p^-}{\partial n}=\frac{m}{c_2}\frac{\partial F}{\partial t}\Big/\frac{\partial F}{\partial n}. \tag{VII. 4. 9б}$$

Задача состоит в отыскании функции $F(x, y, t)=0$, удовлетворяющей уравнению движения (VII. 4. 9а) либо (VII. 4. 9б) и начальному условию (VII. 4. 6), причем функция p должна удовлетворять уравнению (VII. 4. 1), условиям (VII. 4. 3), (VII. 4. 5) и иметь заданные особенности в точках скважин.

Перейдем к выводу уравнения движения границы Γ. Введем гармоническую функцию, представляющую сумму полей давлений от отдельных скважин:

$$\varphi(x, y, t)=\frac{1}{2\pi hc_1}\sum_{i=1}^{j}Q_i(t)\ln\frac{1}{R_i}+\frac{1}{2\pi hc_2}\sum_{i=j+1}^{j+l}Q_i(t)\ln\frac{1}{R_i}, \tag{VII. 4. 10}$$

$$R_i^2=(x-x_i)^2+(y-y_i)^2.$$

Распределение давления в пласте будем искать в виде

$$p(x, y, t)=\varphi(x, y, t)+\int_\Gamma \varrho(\xi, \eta, t)\ln\frac{1}{R}\,d\sigma, \tag{VII. 4. 11}$$

где $R^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$; σ — дуговая абсцисса точки контура Γ с декартовыми координатами ξ, η; ϱ — плотность логарифмического потенциала простого слоя в точке ξ, η, непрерывно распределенная по Γ [2].

---

[1] Все дальнейшие рассуждения сохраняют силу при проницаемости k_1 в области G_1, отличной от проницаемости k_2 в области G_2.

[2] Потенциал простого слоя, нанесенного на границу, был использован при решении обратной задачи Г. Г. Тумашевым [11].

Функция p (VII. 4. 11) удовлетворяет уравнению (VII. 4. 1), условию (VII. 4. 2) и по построению имеет заданные особенности в точках скважин x_i, y_i.

Согласно известным свойствам потенциала простого слоя из (VII. 4. 11) следует [10]

$$\frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n} = -2\pi\varrho. \qquad \text{(VII. 4. 12)}$$

Используя (VII. 4. 9а) и (VII. 4. 9б), из (VII. 4. 12) имеем соотношение, впервые полученное Г. Г. Тумашевым [11]:

$$\varrho = -\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)\frac{m}{2\pi}\frac{\partial F}{\partial t}\Big/\frac{\partial F}{\partial n}. \qquad \text{(VII. 4. 13)}$$

Остается удовлетворить условию (VII. 4. 5) и уравнению (VII. 4. 9а), или (VII. 4. 9б). Вместо (VII. 4. 5) удовлетворим следующему условию, вытекающему из (VII. 4. 12) и (VII. 4. 13):

$$\frac{\partial p^+}{\partial n} - \frac{\partial p^-}{\partial n} = \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) m \frac{\partial F}{\partial n}\Big/\frac{\partial F}{\partial n}. \qquad \text{(VII. 4. 14)}$$

Из (VII. 4. 14) и (VII. 4. 9а) вытекает условие (VII. 4. 5).

Предельное значение производной давления по n при стремлении к Г изнутри равно

$$\frac{\partial p^+}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \pi\varrho + \int_\Gamma \varrho \frac{\partial}{\partial n} \ln\frac{1}{R}\, d\sigma. \qquad \text{(VII. 4. 15)}$$

Подставляя в (VII. 4. 9а) значения $\frac{\partial p^+}{\partial n}$ из (VII. 4. 15), ϱ из (VII. 4. 13) и вводя обозначение

$$\lambda = \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}, \qquad \text{(VII. 4. 16)}$$

получаем уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t}\Big/\frac{dF}{dn} - \frac{\lambda}{\pi}\int_\Gamma \left(\frac{\partial F}{\partial t}\Big/\frac{\partial F}{\partial n}\right)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{R}\, d\sigma = \frac{2}{m}\frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}\frac{\partial \varphi}{\partial n}. \qquad \text{(VII. 4. 17)}$$

Таким образом, задача отыскания функции $F(x, y, t) = 0$ (VII. 4. 5) сведена к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения (VII. 4. 17) с начальным условием (VII. 4. 6).

Для избавления от интегрирования по искомому контуру Г перейдем[1] к полярной системе координат r, θ, в которой уравнение контура имеет вид:

$$F(r, \theta, t) = r - f(\theta, t) = 0; \qquad \text{(VII. 4. 18)}$$

в начальный момент $t = 0$

$$F(r, \theta, 0) = f_0(\theta) - f(\theta, 0) = 0 \quad \text{или} \quad f(\theta, 0) = f_0(\theta), \qquad \text{(VII. 4. 19)}$$

где $f_0(\theta)$ — известная функция. Переходя к новой системе по формулам

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad x_i = \varrho_i \cos\alpha_i, \quad y_i = \varrho_i \sin\alpha_i,$$

$$\xi = \bar{\varrho}\cos\nu, \quad \eta = \bar{\varrho}\sin\nu,$$

[1] При этом полагаем, что искомый контур Г звездообразен, т. е. любой радиус, исходящий из выбранного полюса, пересекает его лишь один раз.

после преобразований получаем интегро-дифференциальное уравнение с постоянным интервалом интегрирования

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\nu, t) f_t(\nu, t) K(\theta, \nu, t)\, d\nu = \frac{1}{2\pi mh} \sum_{i=1}^{j+l} Q_i(t) K_i(\theta, t), \qquad \text{(VII. 4. 20)}$$

где

$$K(\theta, \nu, t) = \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) - f_\theta(\theta, t) f(\nu, t) \sin(\theta - \nu)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(\nu, t) \cos(\theta - \nu) + f^2(\nu, t)};$$

$$K_i(\theta, t) = \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) \varrho_i \cos(\theta - \alpha_i) - f_\theta(\theta, t) \varrho_i \sin(\theta - \alpha_i)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) \varrho_i \cos(\theta - \alpha_i) + \varrho_i^2};$$

$$f_t(\theta, t) = \frac{\partial f(\theta, t)}{\partial t}; \quad f_\theta(\theta, t) = \frac{\partial f(\theta, t)}{\partial \theta}; \quad \bar{Q}_i(t) = \begin{cases} (1-\lambda) Q_i(t), & i = 1, 2, \ldots, j; \\ (1+\lambda) Q_i(t), & i = j+1, \ldots, j+l. \end{cases} \qquad \text{(VII. 4. 21)}$$

Если имеется одна нефтяная скважина дебита $Q(t)$ в начале координат, то уравнение (VII. 4. 20) переходит в следующее:

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\nu, t) f_t(\nu, t) K(\theta, \nu, t)\, d\nu = \frac{1-\lambda}{2\pi mh} Q(t). \qquad \text{(VII. 4. 22)}$$

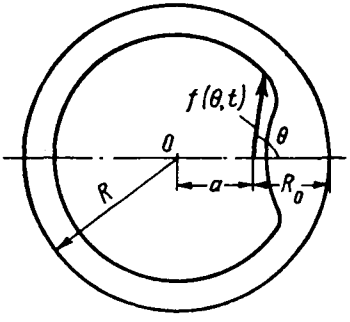


Рис. VII. 7. Стягивание контура нефтеносности при притоке нефти к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте.

Точное решение уравнения (VII. 4. 20), а также (VII. 4. 22) при начальном условии (VII. 4. 19) удается найти лишь в простейших частных случаях расположения скважин и начальной границы раздела (VII. 4. 19). В общем случае для численного решения можно использовать метод конечных разностей. Приведем для иллюстрации основные этапы расчета перемещения первоначально кругового контура к эксцентрично расположенной скважине (рис. VII. 7) [7].

Введем безразмерные переменные, предполагая $Q = \text{const}$:

$$\bar{f} = \frac{f}{R_0}, \quad \bar{t} = \frac{t}{T_0}, \qquad \text{(VII. 4. 23)}$$

где R_0 — кратчайшее расстояние от начального контура до скважины; $T_0 = -\dfrac{Q}{\pi mhR_0^2}$ — время «обводнения» скважины при $\mu_1 = \mu_2$, т. е. при $\lambda = 0$. При этом дебит источника считается положительным.

Уравнение начального контура имеет вид:

$$f(\theta, 0) = \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\theta} - \varepsilon \cos\theta\right), \qquad \text{(VII. 4. 24)}$$

где $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$ — эксцентриситет скважины.

Уравнение движения (VII. 4. 22) в безразмерных величинах будет

$$\bar{f}(\theta,\bar{t})\,\bar{f}_{\bar{t}}(\theta,\bar{t})-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\bar{f}(\nu,\bar{t})\,\bar{f}_{\bar{t}}(\nu,\bar{t})\,\bar{K}(\theta,\nu,\bar{t})\,d\nu=\frac{1-\lambda}{2}. \qquad \text{(VII. 4. 25)}$$

Его можно переписать также в виде

$$\frac{\partial\bar{f}^2(\theta,\bar{t})}{\partial\bar{t}}=(1-\lambda)+\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\bar{f}^2(\nu,\bar{t})}{\partial\bar{t}}\,\bar{K}(\theta,\nu,\bar{t})\,d\nu. \qquad \text{(VII. 4. 26)}$$

Простейший разностный аналог его имеет вид:

$$\frac{\bar{f}^2_{p,\,q+1}-\bar{f}^2_{p,\,q}}{\Delta\bar{t}}=(1-\lambda)+\frac{\lambda}{\pi}\frac{\Delta\theta}{\Delta\bar{t}}\sum_{r=0}^{M-1}(\bar{f}^2_{r,\,q}-\bar{f}^2_{r,\,q-1})\,\bar{K}_{p,\,r,\,q}. \qquad \text{(VII. 4. 27)}$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta\theta=\Delta\nu=\frac{2\pi}{M},\quad \Delta\bar{t}=\frac{\bar{T}}{N},$$

где M и N — целые положительные числа; $\bar{T}=\dfrac{T}{T_0}$ — рассматриваемый интервал времени движения (безразмерная величина);

$$f_{p,\,q}=f(p\,\Delta\theta,\,q\,\Delta t);\quad f_{r,\,q}=f(r\,\Delta\nu,\,q\,\Delta t);$$

$p, r=0, 1, 2, \ldots, M-1$; $q=0, 1, 2, \ldots, N$ (p — индекс суммирования);

$$\bar{K}_{p,\,r,\,q}=\frac{\bar{f}^2_{p,\,q}-\bar{f}_{p,\,q}\bar{f}_{r,\,q}\cos(p-r)\,\Delta\theta-\bar{f}_{\theta,\,p,\,q}\bar{f}_{r,\,q}\sin(p-r)\,\Delta\theta}{\bar{f}^2_{p,\,q}-2\bar{f}_{p,\,q}\bar{f}_{r,\,q}\cos(p-r)\,\Delta\theta+\bar{f}^2_{r,\,q}};$$

$$\bar{f}_{\theta,\,p,\,q}=\frac{1}{\Delta\theta}\left[\frac{2}{3}(\bar{f}_{p+1,\,q}-\bar{f}_{p-1,\,q})-\frac{1}{12}(\bar{f}_{p+2,\,q}-\bar{f}_{p-2,\,q})\right]$$

по формуле численного дифференцирования с опорой на пять точек для центральных производных.

Из (VII. 4. 27) можно определить значения $\bar{f}_{p,\,q+1}$ на $(q+1)$ временном слое по известным значениям функции на временном слое q.

Для начала процесса значение $\dfrac{\partial f^2(\theta,\,0)}{\partial t}$ определяется из интегрального уравнения Фредгольма второго рода (VII. 4. 26) после подстановки в него известной функции $\bar{f}(\theta,\,0)=\bar{f}_0(\theta)$ и ее производной $\bar{f}_\theta(\theta,\,0)$.

Для нашего случая нетрудно найти

$$\frac{\partial\bar{f}^2(\theta,0)}{\partial\bar{t}}=-\left(1-\frac{\lambda\varepsilon\cos\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}\right).$$

Результаты расчета на электронной цифровой машине «Стрела» для $\varepsilon=0{,}5$ и различных значений λ приведены на рис. VII. 8, где по оси абсцисс отложено $\bar{t}$, по оси ординат $\bar{f}(0,\,\bar{t})$.

Было проведено сопоставление законов перемещения границы по главному направлению $\theta=0$, полученных применением трех методов: 1) интегрированием уравнения движения (VII. 4. 22); 2) расчетом по схеме «разноцветных»

жидкостей ($\lambda = 0$); 3) по схеме жестких трубок тока, причем спектр трубок тока был взят соответствующим начальному моменту движения $\bar{t} = 0$. Во всех случаях были приняты одинаковые перепады давлений между контуром питания радиусом $\bar{R}_к$ и забоем скважины радиусом $\bar{r}_с$, а также $\lambda = -0{,}5$, $\bar{R}_к = 10^3$, $\frac{\bar{R}_к}{\bar{r}_с} = 10^7$.

Результаты расчета приведены на рис. VII. 9. Кривая *1* получена интегрированием на электронной вычислительной машине уравнения движения, кривая *2* — по схеме «разноцветных» жидкостей и кривая *3* — по схеме жестких трубок тока. Видно, что в данной задаче метод жестких трубок тока несколько преуменьшает влияние различия вязкостей.

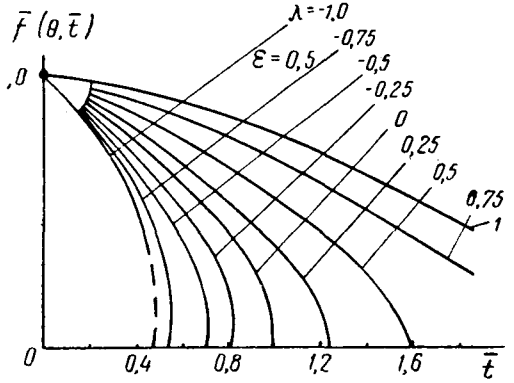


Рис. VII. 8. Графики для расчета времени прорыва воды в скважину, эксцентрично расположенную в круговом пласте, при различных соотношениях вязкостей.

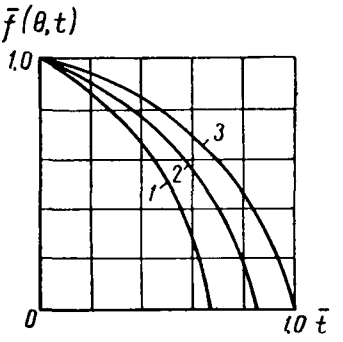


Рис. VII. 9. Сопоставление различных методов расчета времени прорыва.

Время прорыва к скважине по методу жестких трубок тока оказывается для приведенного выше примера согласно рис. VII. 9 на 25—30% больше действительного, что дает представление о точности этого метода. При других соотношениях вязкостей и различном эксцентрицитете, как было исследовано А. М. Власовым [12], расчеты на ЭВМ и по методу жестких трубок тока для времени прорыва к скважине дают расхождение как существенно меньше, так и больше — в пределах $0 \pm 56\%$. А. М. Власов [12] предложил формулу для поправочного коэффициента, позволяющего уменьшить это расхождение до 5—7%.

Следует отметить попутно, что иногда расчеты на ЭВМ с методом жестких трубок тока сопоставляются в предположении, что вся область течения от контура питания до скважин заполнена только одной жидкостью — водой или нефтью [13].

По самой же идее метода жестких трубок тока, изложенной в [Лт. II. 9], следует брать за исходную систему трубок тока, существовавшую в момент $t = 0$.

Конфигурация этой системы, в дальнейшем считаемая неизменной, должна быть определена с учетом того, что в начальный момент существует не одна жидкость, а две. При расчетах же по формуле (VII. 3. 7) следует предположить, что эта начальная система трубок тока заполнена только одной жидкостью, и уже после этого определять сначала скорости w_{2-2} и давления p_{2-2} для одножидкост-

ной системы, а затем из формулы (VII. 3. 7) скорость границы раздела w_{1-2} для двухжидкостной.

Следует отметить также, что везде выше рассматривалось так называемое «поршневое» вытеснение. В действительности, о чем более подробно будет сказано в главе IX, одна жидкость вытесняется обычно не поршневым образом, а с образованием переходной зоны, т. е. зоны смеси, так как полное вытеснение по ряду причин не реализуется. К таким причинам в первую очередь следует отнести капиллярные эффекты, согласно которым вытеснение происходит не одинаково в поровых каналах различных размеров. При образовании же переходной зоны, т. е. при реально существующей неполноте вытеснения, картина линий тока, как показывают эксперименты [14], остается во времени практически неизменной.

§ 5. Вытеснение нефти водой из трубки тока переменного сечения

С задачей о вытеснении нефти водой приходится встречаться при проектировании разработки нефтяных месторождений, когда нужно учесть стягивание контура нефтеносности, а также при расчетах деформации водо-нефтяного контакта. Аналогичные вопросы возникают и при эксплуатации газовых месторождений с краевой или подошвенной водой.

Чтобы охватить по возможности все многообразие частных случаев, рассмотрим следующую задачу. Трубка переменного сечения заполнена пористой средой, в которой одна жидкость вытесняет другую, например вода вытесняет нефть (см. рис. VII. 3). Пусть в одном сечении трубки, рассматриваемом как контур питания в водяной части, известно давление $p_к$; в другом сечении трубки — в нефтяной части, рассматриваемом как скважины, известно давление $p_с$. Требуется рассчитать продвижение границы раздела, предполагая, что эта граница является некоторой поверхностью.

В действительности граница раздела вследствие капиллярности и других причин будет размыта, но мы будем предполагать, что она четко очерчена и вытеснение одной жидкости другой происходит «поршневым» образом.

Заметим, что если во втором сечении (в скважинах) будет задан отбор жидкости, то движение границы раздела определяется из простых геометрических соображений, так как объем, образованный движением границы раздела, будет равен объему отобранной жидкости.

Прежде чем рассматривать двухжидкостную систему, напомним, как решалась задача о движении однородной жидкости в трубке переменного сечения (§ 3, гл. I) $f = f(s)$.

Рассмотрим трубку переменного сечения, где в одном сечении давление p_1, а в другом p_2 (рис. VII. 10). Для упрощения задачи будем пренебрегать эффектом силы тяжести. Плотности обеих жидкостей считаются одинаковыми.

Решение задачи получается непосредственно из закона Дарси. Скорость фильтрации w равна

$$w = -\frac{k}{\mu}\frac{dp}{ds}.$$

Объемный расход соответственно равен

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{\mu \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{kf(s)}}. \qquad \text{(VII. 5. 1)}$$

Знаменатель последней формулы можно назвать фильтрационным сопротивлением и обозначить его через R:

$$\mu \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{kf(s)} = R. \qquad \text{(VII. 5. 2)}$$

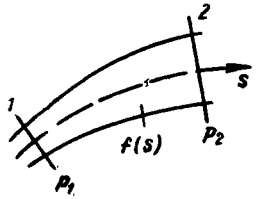


Рис. VII. 10. Схема движения в трубке тока переменного сечения.

В таком случае формула (VII. 5. 1) будет записана в виде, аналогичном закону Ома:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{R}. \qquad \text{(VII. 5. 3)}$$

Этой формулой воспользуемся для решения нашей задачи, когда движется не одна жидкость, а две, причем одна вытесняет другую.

Очевидно, формулу (VII. 5. 2) можно применить в отдельности к каждой из областей, занятых водой и нефтью, но для этого надо знать давление p на границе раздела.

Это давление, вообще говоря, переменная величина.

Расход каждой жидкости, воды или нефти, можно записать так:

$$Q = \frac{p_к - p}{\mu_в \int\limits_0^s \frac{ds}{kf(s)}} = \frac{p - p_с}{\mu_н \int\limits_s^l \frac{ds}{kf(s)}}, \qquad \text{(VII. 5. 4)}$$

где $\mu_в$, $\mu_н$ — соответственно вязкость воды и нефти; l — вся длина трубки.

Чтобы избавиться от неизвестного промежуточного давления p, сложим числитель и знаменатель по правилу производных пропорций. Тогда p сократится, и мы получим

$$Q = \frac{p_к - p_с}{\mu_в \int\limits_0^s \frac{ds}{kf(s)} + \mu_н \int\limits_s^l \frac{ds}{kf(s)}}. \qquad \text{(VII. 5. 5)}$$

Последняя формула представляет собой не что иное, как закон Ома для последовательного соединения двух проводников. В этом случае сопротивления складываются, что здесь и получилось.

Рассмотрим более подробно знаменатель этого выражения. Он является переменной величиной, так как зависит от s. Для краткости обозначим

$$R(s) = \mu_в \int_0^s \frac{ds}{kf(s)} + \mu_н \int_s^l \frac{ds}{kf(s)}. \qquad \text{(VII. 5. 6)}$$

Тогда

$$Q = \frac{p_к - p_с}{R(s)}. \qquad \text{(VII. 5. 7)}$$

Теперь можно перейти непосредственно к изучению движения границы раздела.

Пусть за время dt граница раздела перейдет длину ds. Тогда из объема $f(s)ds$ уйдет количество нефти, равное объему пор в этом элементе; ушедшее количество нефти заместится равным количеством воды: $m f(s) ds = Q dt$, откуда, учитывая формулу (VII. 5. 7), получаем

$$mf(s)\,ds = \frac{p_к - p_с}{R(s)}\,dt. \qquad \text{(VII. 5. 8)}$$

Для простоты будем считать депрессию постоянной. Разделив переменные, получим

$$dt = \frac{mf(s)\,R(s)}{p_к - p_с}\,ds,$$

$$t - t_0 = \frac{1}{p_к - p_с} \int_{s_0}^{s} mf(s)\,R(s)\,ds, \qquad \text{(VII. 5. 9)}$$

где s_0 — положение границы раздела в момент времени t_0. Уравнение (VII. 5. 8) можно интегрировать также и при других граничных условиях, когда депрессия переменна. В некоторых случаях точное интегрирование оказывается невыполнимым. Тогда применяют методы численного интегрирования.

Рассмотрим частные случаи, когда пористость и проницаемость постоянны. Эти частные случаи будут соответствовать тому или другому виду зависимости $R(s)$.

§ 6. Прямолинейное и плоско-радиальное движение границы раздела в пласте с постоянными мощностью, пористостью и проницаемостью

На рис. VII. 11 показан план месторождения; прямая $КП$ — контур питания, на котором поддерживается давление $p_к$. В нефтяной части расположена прямолинейная батарея скважин. Перед батареей скважин изобары почти прямолинейны. Давление на одной из близких изобар обозначим через $p_с$. Рассмотрим движение между

контуром питания и изобарой p_c. Решение получится из формул (VII. 5. 6) и (VII. 5. 9), где полагаем

$$f(s) = f = \text{const}, \quad k = \text{const}.$$

Тогда

$$R(s) = \frac{1}{kf}[\mu_в s + \mu_н (l - s)]. \qquad \text{(VII. 6. 1)}$$

Для нахождения закона движения подставим найденное выражение $R(s)$ в формулу (VII. 5. 9). Тогда получим (полагая $t_0 = 0$)

$$t = \frac{m}{p_к - p_c} \int_{s_0}^{s} \frac{f}{kf} [\mu_в s + \mu_н (l - s)]\, ds =$$

$$= \frac{m}{k(p_к - p_c)} [\mu_н l (s - s_0) -$$

$$- \frac{1}{2} (\mu_н - \mu_в)(s^2 - s_0^2)]. \qquad \text{(VII. 6. 2)}$$

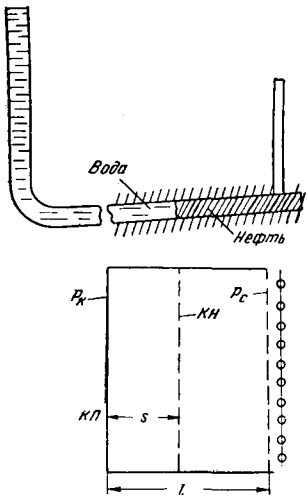


Рис. VII. 11. Схема прямолинейного движения водонефтяного контакта.

Таким образом, задаваясь положением границы раздела, из (VII. 6. 2) можно найти соответствующее время.

В частности, чтобы найти время полного вытеснения нефти, нужно положить $s = l$.

Для контроля всегда полезно рассмотреть предельные, наиболее простые случаи, которые получаются элементарным путем.

Рассмотрим случай одножидкостной системы. Для одножидкостной системы

$$\mu_н = \mu_в = \mu.$$

Из (VII. 6. 2) получим

$$t = \frac{m \mu l (s - s_0)}{k(p_к - p_c)}. \qquad \text{(VII. 6. 3)}$$

Та же задача для одножидкостной системы решается элементарно. Скорость фильтрации w будет постоянна; согласно закону Дарси

$$w = \frac{k}{\mu} \frac{p_к - p_c}{l}.$$

Скорость самих жидких частиц — действительная скорость движения — получится, если скорость фильтрации разделить на пористость:

$$v = \frac{w}{m} = \frac{k}{m\mu} \frac{p_к - p_c}{l}.$$

Так как $v = \text{const}$, то путь $s - s_0$ будет пройден за время t:

$$t = \frac{s - s_0}{v} = \frac{m \mu l (s - s_0)}{k (p_к - p_с)},$$

что совпадает с (VII. 6. 3).

Рассмотрим радиальное движение водо-нефтяного контакта в пласте постоянной мощности (рис. VII. 12).

Пусть жидкость притекает к действительной или воображаемой скважине радиусом $r_с$, на забое которой поддерживается давление $p_с$ (рис. VII. 12, *а*). В данном случае под «скважиной» подразумевается любая изобара круговой формы.

Контур питания будем считать окружностью радиусом $R_к$ с контурным давлением $p_к$.

Условимся относительно обозначений. В схеме на рис. VII. 12, *б* s — расстояние, пройденное вытесняющей жидкостью, отсчитываемое от контура питания. В дальнейшем мы от переменной s перейдем к переменной r, где r — радиус перемещающегося контура нефтеносности в данный момент.

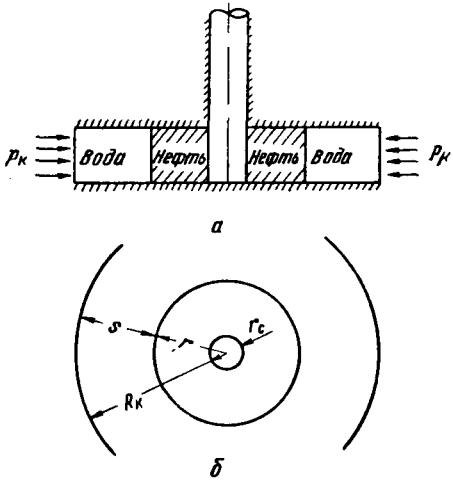


Рис. VII. 12. Схема плоско-радиального движения водо-нефтяного контакта.

Для этой задачи, так же как и для предыдущих, можно воспользоваться формулой (VII. 5. 9).

Найдем зависимости $f(s)$ и $R(s)$ для нашего случая. В отличие от прошлой задачи $f(s)$ будет величиной переменной и, как легко видеть, $f(s) = 2\pi rh$, где h — мощность пласта.

Перейдем от переменной s к переменной r.

Из рис. VII. 12, *б* видно, что $s = R_к - r$. В таком случае $R(s)$ — фильтрационное сопротивление — согласно формуле (VII. 5. 6) можно представить в таком виде:

$$s = R_к - r, \quad ds = -dr,$$

$$R(s) = \frac{1}{k}\left[\mu_в \int_{R_к}^{r} \frac{-dr}{2\pi rh} + \mu_н \int_{r}^{r_с} \frac{-dr}{2\pi rh}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi kh}\left(\mu_в \ln \frac{R_к}{r} + \mu_н \ln \frac{r}{r_с}\right). \qquad \text{(VII. 6. 4)}$$

Это значение фильтрационного сопротивления подставим в общую формулу (VII. 5. 9) для времени t. Полагая $t = 0$, получаем

$$t = \frac{m}{2\pi kh\,(p_к - p_с)} \int_{r_1}^{r_2} 2\pi rh \left(\mu_в \ln \frac{R_к}{r} + \mu_н \ln \frac{r}{r_с}\right)(-dr) =$$

$$= \frac{m}{k\,(p_к - p_с)} \int_{r_2}^{r_1} r \left(\mu_в \ln \frac{R_к}{r} + \mu_н \ln \frac{r}{r_с}\right) dr, \qquad \text{(VII. 6. 5)}$$

где r_1 и r_2 — радиусы начального и конечного положений водонефтяного контакта.

Из формулы (VII. 6. 5) получаем

$$t = \frac{m}{k\,(p_к - p_с)} \left\{(\mu_в \ln R_к - \mu_н \ln r_с)\frac{r_1^2 - r_2^2}{2} + \right.$$

$$\left. + (\mu_н - \mu_в)\left[\left(\frac{r_1^2}{2}\ln r_1 - \frac{r_1^2}{4}\right) - \left(\frac{r_2^2}{2}\ln r_2 - \frac{r_2^2}{4}\right)\right]\right\}. \qquad \text{(VII. 6. 6)}$$

Из этой формулы можно найти время радиального перемещения водо-нефтяного контакта от начального положения $r = r_1$ до заданного $r = r_2$. Время прорыва в скважину получим, полагая $r = r_с$.

§ 7. Характер движения водо-нефтяного контакта. Схемы предельно анизотропных пластов. Устойчивость движения границы раздела

В реальных условиях задача о движении границы раздела выглядит, конечно, значительно сложнее, чем по указанным выше схемам, так как водо-нефтяной контакт совершает сложное пространственное движение.

В реальных условиях пласты наклонны. Граница раздела сначала горизонтальна и затем начинает деформироваться.

Рассмотрим наклонный пласт, где первоначальная граница раздела воды и нефти была горизонтальной. Пласт вскрывается группой скважин (рис. VII. 13).

Будем считать, что скважины находятся в нефтяной части пласта. При отборе нефти граница раздела вода — нефть будет перемещаться, занимая последовательно положения A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2,...

Если площадь водо-нефтяного контакта мала, то можно принять схему поршневого вытеснения, считая контакт вертикальным. Если

же площадь контакта велика, то это предположение становится слишком грубым. Точного решения задачи о пространственном движении границы раздела не имеется.

Как указывалось выше, основная трудность точного решения задачи заключается в том, что при движении границы раздела двух жидкостей в пористой среде в общем случае происходит преломление линий тока.

Рассмотрим движение в однородно-анизотропном пласте, когда составляющие проницаемости k_x и k_y в двух взаимно-перпендикулярных направлениях по напластованию и перпендикулярно напластованию различны.

Очевидно, схема послойного движения соответствует движению в однородно-анизотропном пласте, у которого проницаемость k_y в направлении, перпендикулярном напластованию, равна нулю. Можно рассмотреть другой крайний случай, считая эту составляющую проницаемости k_y равной бесконечности. Таким образом, могут быть установлены пределы, между которыми заключено истинное движение водо-нефтяного контакта [15].

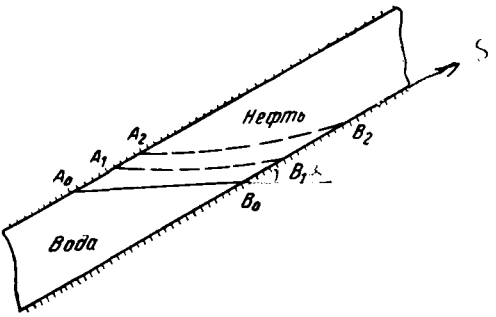


Рис. VII. 13.

Предположение $k_y = \infty$, очевидно, эквивалентно предпосылке гидравлической теории безнапорного движения о гидростатическом распределении давления в каждом поперечном сечении фильтрационного потока.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости движения границы раздела (рис. VII. 13). Скорости фильтрации каждой жидкости согласно закону Дарси определяются в общем случае формулами

$$w_1 = -\frac{k_1}{\mu_1}\left(\frac{\partial p}{\partial s} + \gamma_1 \frac{dz}{ds}\right), \quad w_2 = -\frac{k_2}{\mu_2}\left(\frac{\partial p}{\partial s} + \gamma_2 \frac{dz}{ds}\right). \quad \text{(VII. 7. 1)}$$

Вследствие неизбежных неровностей на границе раздела частицы первой — вытесняющей — жидкости (воды) попадают в область, занятую второй — вытесняемой — жидкостью (нефтью), причем их дальнейшее движение может ускориться или, наоборот, замедлиться. В первом случае движение границы раздела будет неустойчиво, во втором устойчиво. Критерии устойчивости можно установить следующим образом. Обозначим $(w_1)_2$ скорость частицы первой жидкости, попавшей в поток второй жидкости с градиентом давления $\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_2$; $(k_1)_2$ — проницаемость для первой жидкости в зоне движения второй.

Согласно закону Дарси для $(w_1)_2$ имеем

$$(w_1)_2 = -\frac{(k_1)_2}{\mu_1}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_2 + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial s}\right]. \qquad \text{(VII. 7. 2)}$$

Скорость же w_2 основных частиц второй жидкости, соприкасающихся с проникшими туда частицами первой жидкости, согласно второму уравнению (VII. 7. 1) равна

$$w_2 = -\frac{k_2}{\mu_2}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_2 + \gamma_2 \frac{\partial z}{\partial s}\right]. \qquad \text{(VII. 7. 3)}$$

Из (VII. 7. 2) и (VII. 7. 3) получаем связь между $(w_1)_2$ и w_2:

$$\frac{\mu_1}{(k_1)_2}(w_1)_2 + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\mu_2}{k_2} w_2 + \gamma_2 \frac{\partial z}{\partial s} = -\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_2, \qquad \text{(VII. 7. 4)}$$

откуда

$$(w_1)_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{(k_1)_2}{k_2} w_2 - \frac{(k_1)_2}{\mu_1}(\gamma_1 - \gamma_2)\frac{\partial z}{\partial s}. \qquad \text{(VII. 7. 5)}$$

Об устойчивости движения можно судить по разности $\Delta w = (w_1)_2 - w_2$:

$$\Delta w = (w_1)_2 - w_2 = \left[\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{(k_1)_2}{k_2} - 1\right] w_2 - \frac{(k_1)_2}{\mu_1}(\gamma_1 - \gamma_2)\frac{\partial z}{\partial s}. \qquad \text{(VII. 7. 6)}$$

При $\Delta w \leqslant 0$ движение устойчиво, при $\Delta w \geqslant 0$ движение неустойчиво.

Проникновение первой жидкости в зону движения второй будет происходить, смотря по обстоятельствам, вдоль подошвы или вдоль кровли пласта. В этом случае $\partial z/\partial s$, очевидно, есть синус угла α наклона пласта к горизонту: $\partial z/\partial s = \sin\alpha$.

Величина w_2 может быть определена по заданному дебиту отбираемой второй жидкости.

Таким образом, условие устойчивости (VII. 7. 6) можно представить в таком виде:

$$\Delta w = \left[\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{(k_1)_2}{k_2} - 1\right] w_2 - \frac{(k_1)_2}{\mu_1}(\gamma_1 - \gamma_2)\sin\alpha. \qquad \text{(VII. 7. 7)}$$

Величина $(k_1)_2$ близка к проницаемости так называемой переходной зоны — зоны, оставленной второй жидкостью и занятой первой. Обычно $(k_1)_2$ значительно меньше k_2. В первом приближении можно считать $(k_1)_2 \approx k_2 = k$.

Из уравнения (VII. 7. 7) следует, что при очень малых скоростях w_2 и при $\gamma_1 > \gamma_2$, $\alpha > 0$ движение устойчиво, так как $\Delta w < 0$, даже если $\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{(k_1)_2}{k_2}$ велико. Поэтому, например, когда водо-нефтяной контакт далек от эксплуатационных скважин и скорость w_2 мала, граница раздела движется устойчиво. С приближением водо-нефтяного

контакта и с увеличением w_2 согласно (VII. 7. 7) Δw увеличивается. Когда $\Delta w > 0$, движение неустойчиво и язык подошвенной воды будет двигаться гораздо быстрее.

Можно показать, что неустойчивое движение будет происходить по расчетной схеме $k_y = \infty$, изложенной в работах [15, 16].

Рассмотрим для этого движение граничных точек A и B (рис. VII. 13) вдоль кровли и подошвы наклонного пласта. Последовательные положения этих точек обозначены A_0, A_1, ..., B_0, B_1, ... Для простоты проницаемость и мощность пласта k, h полагаем постоянными, а движение прямолинейно-поступательным с расходом q на единицу ширины. Поперечное сечение пласта в точке A проходит только через водоносную часть пласта, причем скорости частиц воды в этом сечении A можно считать равномерно распределенными. Аналогично в сечении B в нефтеносной части пласта скорости частиц нефти также будем считать равномерно распределенными.

Тогда из уравнения (VII. 7. 4), в котором полагаем $(k_1)_2 = k_2 = k$, $\gamma_1 = \gamma_в$, $\gamma_2 = \gamma_н$ ($\gamma_в$, $\gamma_н$ — объемный вес соответственно воды и нефти), $\frac{\partial z}{\partial s} = \sin\alpha$, считая жидкости несжимаемыми, получим следующее.

Для точки A

$$(w_1)_2 = \frac{q}{h}, \quad w_2 = (w_A)_н,$$

$$\frac{\mu_в}{k}\frac{q}{h} + \gamma_в \sin\alpha = \frac{\mu_н}{k}(w_A)_н + \gamma_н \sin\alpha,$$

откуда

$$(w_A)_н = \frac{q}{\mu_0 h} + \frac{k}{\mu_н}(\gamma_в - \gamma_н)\sin\alpha, \qquad \text{(VII. 7. 8)}$$

где $\mu_0 = \mu_н/\mu_в$ — отношение вязкости нефти $\mu_н$ к вязкости воды $\mu_в$.

Для точки B

$$(w_1)_2 = (w_B)_в, \quad w_2 = \frac{q}{h},$$

$$\frac{\mu_в}{k}(w_B)_в + \gamma_в \sin\alpha = \frac{\mu_н}{k}\frac{q}{h} + \gamma_н \sin\alpha,$$

откуда

$$(w_B)_в = \mu_0 \frac{q}{h} - \frac{k}{\mu_в}(\gamma_в - \gamma_н)\sin\alpha. \qquad \text{(VII. 7. 9)}$$

При $\gamma_в = \gamma_н$ уравнения (VII. 7. 8) и (VII. 7. 9) совпадают с уравнениями, полученными другим путем А. М. Пирвердяном [16]. Расчетная схема А. М. Пирвердяна соответствует условию $k_y = \infty$ [16].

Для радиального движения аналогичный результат был получен в [15, 16].

Таким образом, согласно (VII. 7. 8) и (VII. 7. 9) при неустойчивом движении границы раздела скорости граничных точек A и B (рис. VII. 13) вдоль кровли и подошвы пласта не совпадают со средней скоростью движения q/mh, где m — пористость. Точка A вдоль кровли при $\gamma_в = \gamma_н$ движется в μ_0 раз медленнее, точка же B вдоль подошвы в μ_0 раз быстрее.

При неустойчивом движении, когда темп вытеснения достаточен, различие объемных весов $\Delta\gamma = \gamma_в - \gamma_н \neq 0$ мало сказывается на этом результате. Более существенным фактором оказывается неполнота вытеснения, обусловленная фазовыми проницаемостями вытесняющей и вытесняемой жидкостей. Этот вопрос рассмотрен в работах [15, 17, 18].

Другие исследования этой задачи, основанные на методах, применяемых в теории гидродинамической устойчивости, приведены в работах [19, 20].

Устойчивое движение с достаточной точностью можно рассчитывать по схеме послойного движения частиц параллельно кровле и подошве пласта или по схеме жестких трубок тока.

§ 8. Конус подошвенной воды. Условия равновесия и прорыва подошвенной воды или верхнего газа в скважину

В тех случаях, когда площадь водо-нефтяного контакта очень велика, с самого начала эксплуатации скважины оказываются в нефтяном пласте с подошвенной водой (рис. VII. 14). Это имеет место в пологопадающих пластах с очень малым углом наклона к горизонту.

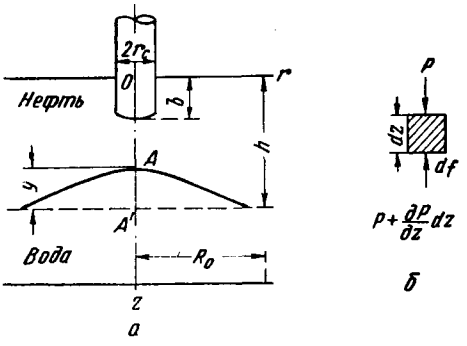


Рис. VII. 14.

При отборе нефти поверхность водо-нефтяного контакта деформируется и принимает вид холма. Такой водяной холм называется конусом подошвенной воды.

Если повысить депрессию и отбор нефти, то вода прорвется в скважину и скважина будет давать нефть вместе с водой.

Точной теории водяного конуса до сего времени не имеется ввиду чрезвычайной сложности задачи.

Приближенная теория, позволяющая рассчитать предельный безводный дебит и форму конуса, была предложена Маскетом [Лт. I. 11], а также автором [21, 22].

Ниже кратко изложены физическая сторона явления и метод расчета, позволяющий определить пределы, между которыми заключен максимально возможный безводный дебит нефтяной скважины.

Расчеты показывают, что безводный дебит в однородных маломощных пластах очень мал. Тем не менее даже в этих маломощных пластах скважины

дают иногда довольно большой нефтяной дебит без воды, хотя известно, что под ними имеется подошвенная вода. Это обстоятельство объясняется наличием непроницаемых или малопроницаемых пропластков, которые затрудняют вертикальное движение воды.

Рассмотрим сначала задачу о притоке нефти к несовершенной скважине при устойчивом неподвижном конусе подошвенной воды.

Пласт будем считать изотропным. Будем считать кровлю, подошву и первоначальный водораздел горизонтальными. Предположим, что водяной конус неподвижен и устойчив и к скважине притекает чистая нефть.

Направим оси координат так, как показано на рис. VII. 14.

Обозначим нефтеносную мощность через h, глубину вскрытия — b, радиус скважины — r_c.

В точной постановке требуется решить уравнение Лапласа для потенциала $\nabla^2\Phi = 0$ при следующих граничных условиях: кровля пласта непроницаема; поверхность водо-нефтяного контакта, форма которой неизвестна и сама подлежит определению, также непроницаема для нефти. Основная сложность такой задачи заключается в том, что форма границы раздела воды и нефти, т. е. форма конуса, неизвестна. Таким образом, помимо трудностей, связанных с решением уравнения Лапласа, неизвестна область, в которой это решение должно быть найдено.

Предварительно выясним условия, при которых частицы воды на вершине конуса будут неподвижны.

Предположим, что распределение давления в любой точке пласта известно, т. е. известна функция $p = p(r, z)$.

Это давление в разных точках будет разное. Самое меньшее давление будет на стенке скважины.

Выделим на вершине конуса, т. е. в точке, лежащей на оси скважины, $r = 0$, элементарный вертикальный цилиндрик пористой среды площадью df, высотой dz, заполненный водой, и рассмотрим силы, которые на него действуют (рис. VII. 14, *б*), предполагая, что этот цилиндрик попал в нефтяную часть.

Пусть давление на верхнюю грань будет $p(0, z) = p$, давление на нижнюю грань p'. Очевидно,

$$p' = p(0, z + dz) = p + \frac{\partial p}{\partial z}\, dz.$$

Составим уравнение равновесия нашей частицы воды. Сила, которая влечет эту частицу вверх, равняется

$$m(p' - p)\, df = m \frac{\partial p}{\partial z}\, dz df,$$

где m — пористость. При этом нужно учесть, что жидкость занимает не всю площадь df, а только ее часть $m df$. Вниз частицу воды влечет ее собственный вес, равный $\gamma_в\, m df dz$, где $\gamma_в$ — объемный вес воды.

Вопрос, будет ли частица воды увлечена вверх или не будет, решается сопоставлением этих двух сил.

Условие устойчивости частицы воды, таким образом, имеет вид:

$$\gamma_в m df dz \geqslant m \frac{\partial p}{\partial z}\, dz df$$

или

$$\gamma_в \geqslant \frac{\partial p}{\partial z}. \qquad \text{(VII. 8.1)}$$

Условие (VII. 8. 1) можно выразить, перейдя от давления к потенциалу Ф:

$$\Phi = \frac{k}{\mu}(p \pm \gamma_н z),$$

причем знак плюс относится к случаю, когда ось z направлена вертикально вверх, а минус, когда она направлена вертикально вниз.

Для наших условий, когда ось z направлена вниз:

$$\Phi = \frac{k}{\mu}(p - \gamma_н z), \tag{VII.8.2}$$

где k — проницаемость; μ — вязкость нефти; $\gamma_н$ — удельный вес нефти.

Из формулы (VII.8.2) находим

$$p = \frac{\mu}{k}\Phi + \gamma_н z, \tag{VII.8.3}$$

после чего условие устойчивости конуса (VII.8.1) принимает вид:

$$\gamma_в \geqslant \frac{\mu}{k}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \gamma_н$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \leqslant \frac{k\Delta\gamma}{\mu}, \tag{VII.8.4}$$

где

$$\Delta\gamma = \gamma_в - \gamma_н. \tag{VII.8.5}$$

разность объемных весов воды и нефти.

Используем теперь условие, что вода неподвижна, и, следовательно, давление в ней распределено гидростатически по закону Паскаля. Обозначим высоту конуса y, тогда $y = h - z$.

Рассмотрим две точки (рис. VII. 14, *а*): вершину конуса (точка A) с давлением p и точку пересечения оси скважины с первоначально невозмущенной поверхностью раздела (точка A'). Давление в точке A' согласно закону Паскаля равно

$$p_{A'} = p + \gamma_в y. \tag{VII.8.6}$$

Пусть на некотором расстоянии от скважины R_0 мощность нефтяного пласта равна h и известно давление p_0 на границе раздела. Тогда, так как вода неподвижна

$$p_{A'} = p_0,$$

$$p = p_{A'} - \gamma_в y = p_0 - \gamma_в (h - z). \tag{VII.8.7}$$

Выражая давление через потенциал Φ нефтяной части пласта согласно формуле (VII.8.3), получаем

$$p_0 = \frac{\mu}{k}\Phi_0 + \gamma_н h, \tag{VII.8.8}$$

где Φ_0 — потенциал точки с давлением p_0.

Тогда уравнение (VII.8.7) можно представить так, учитывая (VII.8.3):

$$\frac{\mu}{k}\Phi + \gamma_н z = \frac{\mu}{k}\Phi_0 + \gamma_н h - \gamma_в (h - z)$$

или согласно формуле (VII.8.5) и рис. VII.14

$$\frac{\mu}{k}\Phi = \frac{\mu}{k}\Phi_0 - \Delta\gamma (h - z) = \frac{\mu}{k}\Phi_0 - \Delta\gamma\, y. \tag{VII.8.9}$$

Из формулы (VII. 8. 9) получаем

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{k\Delta\gamma}{\mu} y, \qquad \text{(VII. 8. 10)}$$

т. е. вдоль границы раздела текущей нефти и неподвижной воды потенциал изменяется линейно в зависимости от высоты.

На рис. VII. 15 приведены кривые распределения потенциала вдоль оси скважины и вдоль цилиндрической поверхности R_0. Величина потенциала отложена вправо, как показано на рис. VII. 15. Вдоль поверхности R_0 потенциал будем считать постоянным: $\Phi = \Phi_0$ (прямая KN).

Уравнение (VII. 8. 10) изображается прямой линией KL, наклоненной к вертикали под углом β, с угловым коэффициентом, равным $\operatorname{tg}\beta = k\Delta\gamma/\mu$. Где-то на этой прямой лежит потенциал вершины конуса. Если бы была известна высота подъема конуса, то сразу можно было бы найти этот потенциал.

Теперь посмотрим, какой вид будет иметь распределение потенциала в нефтяной части пласта.

Наименьшее давление, а следовательно, и наименьший потенциал будут на стенках скважины, причем вдоль стенок скважины потенциал считается распределенным равномерно, так как на стенке скважины давление можно считать гидростатическим. Обозначим потенциал на стенке скважины Φ_c. Ниже донышка скважины потенциал будет возрастать.

Нетрудно показать, что потенциал вдоль оси будет возрастать так, как показано на рис. VII. 15, т. е. выпуклостью вправо.

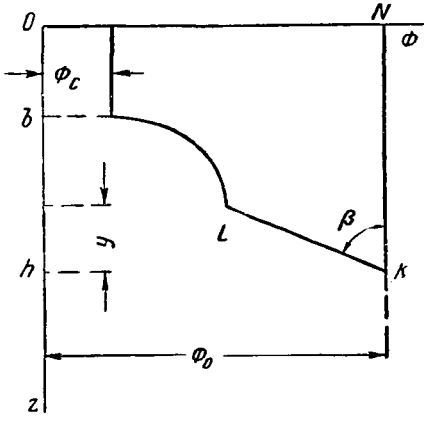


Рис. VII. 15. Распределение потенциала вдоль стенки скважины, ее продолжении и поверхности водяного конуса.

Действительно, вертикальная составляющая скорости фильтрации определяется формулой $w_z = -\partial\Phi/\partial z$.

Вершина конуса по условию неподвижна. Следовательно, скорость нефти на этой вершине обращается в нуль, откуда вытекает, что касательная в этой точке должна быть вертикальной.

К оси скважины подтекают струйки. Поэтому скорость вдоль оси скважины монотонно возрастает от нуля до какого-то максимума на донышке. Таким образом, $|\partial\Phi/\partial z|$ вдоль оси z скважины монотонно возрастает и кривая распределения потенциала $\Phi = \Phi(0, z)$ должна быть обращена выпуклостью вправо, как показано на рис. VII. 18.

Очевидно, высота конуса определяется положением точки пересечения прямой KL и кривой $\Phi = \Phi(0, z)$.

Точный вид распределения потенциала при наличии конуса обводнения неизвестен. Поэтому нужно исходить из каких-то других предпосылок, которые позволят оценить хотя бы приближенно величину подъема конуса и наиболее интересную для практики величину — предельного безводного дебита.

Заметим попутно, что эта задача имеет много общего с некоторыми задачами безнапорной фильтрации, о частности с задачей о гравитационном притоке жидкостей к несовершенной скважине (рис. VII. 16).

Предположим, что водоносный пласт с открытой поверхностью эксплуатируется при помощи скважин, которые перфорированы в нижней части.

Прямая AB изображает статический уровень грунтовых вод.

Если скважина совершенная и вскрыла пласт полностью, — мы имеем задачу о безнапорном притоке к колодцу (см. гл. VI), когда дебит выражается формулой Дюпюи. Если же скважина перфорирована в нижней части, то поверхность депрессии — поверхность грунтового потока — будет иметь вид кривой $ACC'B$, т. е. над фильтром будет, как говорят гидротехники, некоторая величина нависания y.

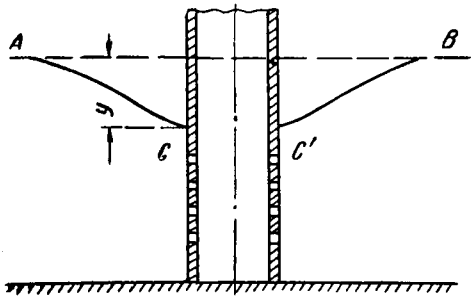


Рис. VII. 16. Схема газового конуса.

При слишком большом дебите поверхность депрессии понизится до верхнего отверстия и туда прорвется почвенный воздух.

Эта задача и задача о конусе подошвенной воды в нефтяной скважине совершенно эквивалентны. Роль подошвенной воды здесь играет почвенный воздух.

Рассмотрим приток жидкости с образованием неподвижного устойчивого конуса подошвенной воды и проведем две цилиндрические поверхности, соосные со скважиной: первую некоторым радиусом r_0 (в частности, это может быть радиус скважины); вторую радиусом R_0 (рис. VII. 17, *а*). Направим ось z вниз и на произвольном расстоянии r ($r_0 < r < R_0$) опишем цилиндрическую поверхность вокруг скважины; найдем расход нефти через эту цилиндрическую поверхность.

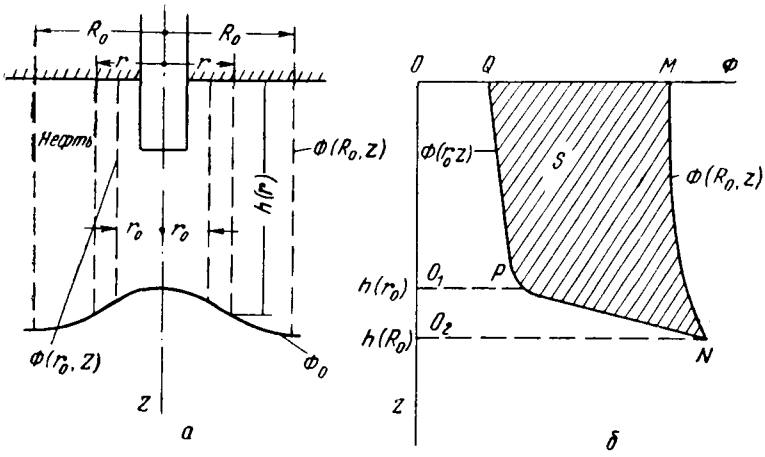


Рис. VII. 17.

Обозначим высоту этой цилиндрической поверхности h. Она будет переменной величиной: $h = h(r)$. Напомним вывод одного из интегральных соотношений для расхода (§ 6, гл. VI) применительно к нашей задаче.

Дебит жидкости (нефти), протекающей через нашу цилиндрическую поверхность, можно определить следующим образом. Выделим бесконечно малый элемент поверхности — цилиндр — высотой dz и радиусом r и найдем элементарный расход через боковую поверхность этого цилиндра.

Расход находится путем умножения радиальной составляющей скорости фильтрации w_r на площадь боковой поверхности $2\pi r dz$ и интегрирования произведения по z в пределах от нуля до h:

$$Q = \int_0^h |w_r| 2\pi r dz. \qquad \text{(VII. 8. 11)}$$

Радиальная составляющая скорости фильтрации w_r в нашем случае будет направлена в сторону уменьшения r и, следовательно, отрицательна, причем $w_r = -\partial \Phi/\partial r$. Нам для вычисления расхода нужно абсолютное значение скорости.

Так как потенциал возрастает с увеличением r (скважина является стоком), то, учитывая направление скорости, можно записать $|w_r| = \partial \Phi/\partial r$; формула (VII. 8. 11) для скважины-стока примет следующий вид:

$$Q = \int_0^{h(r)} \frac{\partial \Phi}{\partial r} 2\pi r dz = 2\pi \int_0^{h(r)} \frac{\partial \Phi}{\partial \ln r} dz, \qquad \text{(VII. 8. 12)}$$

так как

$$\frac{dr}{r} = d \ln r.$$

При помощи формулы дифференцирования определенного интеграла по параметру получим следующее выражение для дебита:

$$Q = 2\pi \left[\frac{d}{d \ln r} \int_0^{h(r)} \Phi(r, z) dz - \Phi(h, r) \frac{dh}{d \ln r} \right]. \qquad \text{(VII. 8. 13)}$$

Разделим переменные в последнем уравнении

$$\frac{Q}{2\pi} d \ln r = d \int_0^{h(r)} \Phi(r, z) dz - \Phi(h, r) dh \qquad \text{(VII. 8. 14)}$$

и проинтегрируем полученное выражение (VII. 8. 14) в пределах от $r = r_0$ до $r = R_0$. Учитывая, что первый член правой части после интегрирования в этих пределах обратится в разность интегралов, получаем

$$\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{R_0}{r_0} = \int_0^{h(R_0)} \Phi(R_0, z) dz - \int_0^{h(r_0)} \Phi(r_0, z) dz - \int_{h(r_0)}^{h(R_0)} \Phi(h, r) dh. \qquad \text{(VII. 8. 15)}$$

Последнюю формулу можно интерпретировать графически следующим образом.

Возьмем оси координат Φ и z, как показано на рис. VII. 17, *б*, и построим графики функций $\Phi(r_0, z)$, $\Phi(R_0, z)$ распределения потенциала вдоль боковых поверхностей r_0 и R_0 (кривые QP и MN).

Выясним, какой геометрический смысл имеет первый интеграл в уравнении (VII. 8. 15). Очевидно, он равен площади $OMNO_2O$.

Второй интеграл, как легко видеть, равен площади $OQPO_1O$, третий интеграл — площади $O_1PNO_2O_1$, причем согласно формуле (VII. 8. 10) $\Phi(h, r)$ изображается прямой NP.

Таким образом, правая часть уравнения (VII. 8. 15) равна, как видно из рис. VII. 17, *б*, заштрихованной площади S.

Сопоставим теперь с движением при наличии конуса напорное равнодебитное движение нефти в пласте постоянной мощности $h\,(R_0) = h_0$, когда подошва пласта горизонтальна и непроницаема и на боковой поверхности R_0 поддерживается прежнее распределение потенциала. Это второе движение будем называть невозмущенным, а первое при наличии конуса — возмущенным. Невозмущенное движение происходит в расширенной по сравнению с возмущенным области, так как стеснение потока, вызываемое конусом, отсутствует. Отсюда следует, что при одинаковых дебитах и одинаковых распределениях потенциала на внешней боковой поверхности потенциал любой точки пласта при возмущенном движении будет меньше, чем потенциал той же точки при невозмущенном. Следовательно, распределение потенциала вдоль поверхности r_c при невозмущенном движении будет характеризоваться пунктирной кривой $A'B'C'D'$, лежащей правее кривой ABC (рис. VII. 18), соответствующей возмущенному движению. Согласно формуле (VII. 8. 15) S равно площади $ABCDEA$.

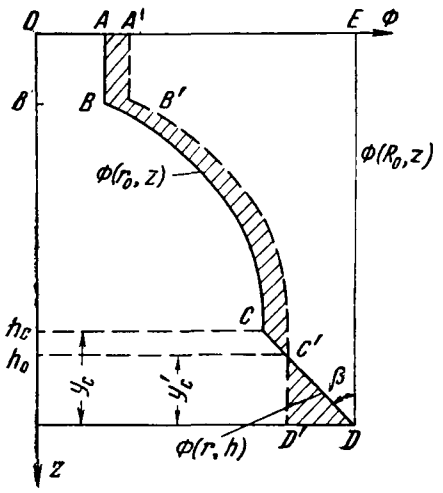


Рис. VII. 18.

Невозмущенное движение представляет собой напорный приток к несовершенной скважине при горизонтальных и непроницаемых кровле и подошве, т. е. сравнительно хорошо изученную задачу.

Из рис. VII. 18 следует, что точка C' пересечения прямой DC с кривой $A'B'C'D'$ лежит ниже точки C, соответствующей ординате точки, практически совпадающей с вершиной конуса. Кроме того, так как возмущенное и невозмущенное движения равнодебитны, площади $ABCDEA$ и $A'B'C'D'DEA'$ равны согласно формуле (VII. 8. 15), откуда следует, что площадь ленточки $ABCC'B'A'A$ равна площади треугольника $DC'D'D$.

Предположим теперь, что при сохранении потенциала $\Phi\,(R_0,\ z)$ дебит скважины начал увеличиваться. Это достигается соответствующим уменьшением забойного потенциала на стенке скважины, т. е. уменьшением $\Phi_c\ (r_c z)$. Условие устойчивости водяного конуса согласно формуле (VII. 8. 4) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{r=0} \leqslant \frac{k\,\Delta\gamma}{\mu}. \qquad \text{(VII. 8. 16)}$$

Ввиду малости радиуса скважины по сравнению с h и R_0 можно считать предыдущее условие эквивалентным неравенству

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{r=r_c} \leqslant \frac{k\,\Delta\gamma}{\mu} = \operatorname{tg}\beta.$$

Угол β показан на рис. VII. 18.

Отсюда следует, что перед началом прорыва воды распределение потенциала в нефтяной части $\Phi\,(0,\ z)$ ниже дна скважины будет изображаться кривой CB (рис. VII. 18), касательная к которой в вершине конуса составит с вер-

тикалью угол $\beta = \operatorname{arctg}\frac{k\,\Delta\gamma}{\mu}$. Граница раздела воды и нефти при этом будет заканчиваться острием (точкой возврата), что указывалось ранее Д. А. Эфросом [23] (рис. VII, 19, *а*).

Распределение потенциала вдоль оси скважины при равнодебитном невозмущенном движении с тем же потенциалом $\Phi(R_0, z)$ согласно предыдущему будет происходить при бо́льших потенциалах и графически изображаться пунктирной кривой $B'B''C'D'$, лежащей правее кривой BC. Существенно отметить, что так как площадь треугольника $DC'D'D$ должна быть равна площади ленты $B'B''C'CB$ (верхняя часть ленты не показана) то, во всяком случае, площадь треугольника $DC'D'D$ будет больше площади сегмента $B''C'CB''$.

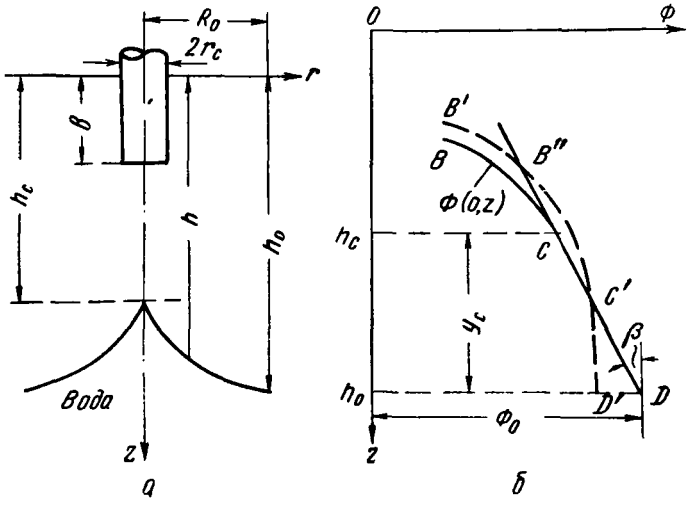


Рис. VII. 19.

Рассмотрим теперь невозмущенное движение в пласте мощностью h_0 при том же распределении потенциала $\Phi(R_0, z)$. Предположим, что дебит при невозмущенном движении начал увеличиваться и дошел до такого значения Q_1, когда кривая распределения потенциала $\Phi_{невозм}(0, z)$ (кривая $A'B'C'D'$, рис. VII. 20) касается прямой DB'', соответствующей потенциалу границы раздела воды и нефти при возмущенном движении, в точке C'.

Маскет [Лт. I. 11] принимает Q_1 за предельно возможный нефтяной безводный дебит. Докажем, что Q_1 будет заведомо больше предельного дебита возмущенного движения $Q_{пред}$, при котором начинается прорыв воды в скважину. Для этого обратимся к рис. VII. 18, VII. 19, VII. 20.

Если бы было возможно устойчивое возмущенное движение с дебитом Q_1, то высота подъема вершины конуса должна была бы быть больше $y_{C'}$ ($y_C > y_{C'}$), как это следует из рис. VII. 18. Как указывалось выше, потенциалы возмущенного движения должны быть меньше потенциалов тех же точек при невозмущенном, т. е. $\Phi_{невозм}(0, z) > \Phi_{возм}(0, z)$, причем потенциал вершины конуса должен при всех обстоятельствах лежать на прямой DB''.

Из рис. VII. 20 видно, что одновременное выполнение этих условий невозможно, откуда следует, что равновесие воды нарушится при предельно возможном дебите $Q_{пред}$ возмущенного движения, меньшем Q_1. Таким образом, $Q_1 > Q_{пред}$.

Чтобы найти дебит, заведомо меньший предельного, рассмотрим теперь невозмущенное движение с дебитом Q_2, когда распределение потенциала вдоль оси скважины характеризуется кривой $A''B''C''D''$, причем площадь сегмента $B''C''C'B''$ равна площади треугольника $DC''D''D$. Выше (см. рис. VII. 19) указывалось, что перед прорывом воды в скважину равнодебитное невозмущенное движение таково, что площадь треугольника $DC'D'D$ больше площади сегмента $B''C'CB''$. Чтобы эти площади сравнялись, кривая распределения потенциала $B'B''C'D'$ должна быть сдвинута вправо, что соответствует уменьшению дебита. Таким образом, устанавливается неравенство

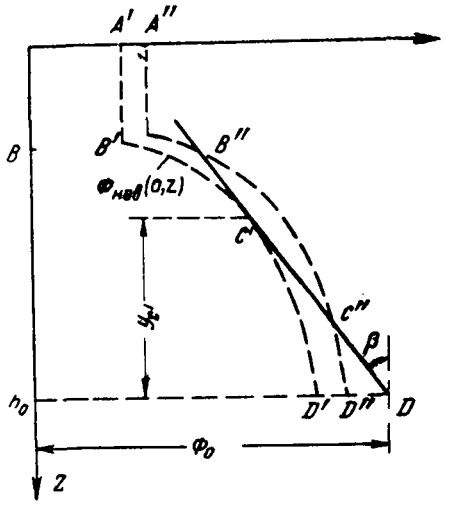


Рис. VII. 20.

$$Q_2 < Q_{\text{пред}} < Q_1. \qquad \text{(VII. 8. 17)}$$

Количественный расчет дебитов Q_1 и Q_2 может быть выполнен из известного решения задачи о напорном притоке к несовершенной скважине. Расчеты показывают, что Q_1 и Q_2 отличаются на 25—30%.

Все сказанное выше, очевидно, полностью распространяется на случай прорыва верхнего газа при наличии газовой шапки (см. рис. VII. 16). Под $\Delta\gamma$ при этом следует подразумевать разность объемных весов нефти и газа.

Опуская детали вычислений, относящихся к притоку к скважинам в месторождениях с подошвенной водой, приведем только графики для расчета предельного безводного дебита и высоты подъема конуса перед прорывом воды в скважину в однородно-анизотропном пласте с горизонтальной проницаемостью k вдоль пласта и вертикальной проницаемостью k_z перпендикулярно к пласту.

Для удобства расчетов на рис. VII. 21 показаны кривые безразмерного дебита $q(\bar{h})$ для разных значений параметра $\varrho = \dfrac{R_0}{\varkappa h}$ [Q_1 — верхнее значение дебита в неравенстве (VII. 8. 17)], причем

$$\varkappa^2 = \frac{k}{k_z}, \quad q(\bar{h}) = \frac{Q_1}{Q_0}, \quad Q_0 = \frac{2\pi k h_0}{\mu}\Delta\gamma\, h_0, \quad \bar{h} = \frac{b}{h}. \qquad \text{(VII. 8. 18)}$$

На рис. VII. 21 показаны также значения $\eta_{\max}$, соответствующие Q_1, причем

$$\eta_{\max} = \frac{y_{\max}}{h_0 - b}, \qquad \text{(VII. 8. 19)}$$

где $y_{\max}$ — предельная высота подъема конуса перед прорывом.

Для значений параметра $\varrho = R_0/\varkappa h$, не указанных на рис. VII. 21, $q(\bar{h})$ можно определить графической интерполяцией, имея в виду, что $q(\bar{h}) \to 0$ при $\varrho \to \infty$, а $q(\bar{h}) \to \infty$ при $\varrho \to 0$. В первом случае следует строить кривую зависимости $q(\bar{h})$ от аргумента $\dfrac{1}{\varrho}$, во втором — кривую зависимости $\dfrac{1}{q(\bar{h})}$ от

аргумента ϱ. Обе кривые пройдут через начало координат и легко могут быть построены по трем-четырем точкам для любого значения $\bar{h}$ при помощи рис. VII. 21. При прорыве верхнего газа, как указывалось, под $\Delta\gamma$ следует подразумевать разность объемных весов нефти и газа в пластовых условиях. Графики рис. VII. 21 построены В. А. Евдокимовой на основании решения Маскета (V. 1. 7) (§ 1, гл. V) о распределении потенциала при притоке к несовершенной скважине с донным притоком.

На рис. VII. 22 — VII. 25 представлены графики для более широкого диапазона изменения параметров ϱ, $\bar{h}$, построенные Ю. И. Стклянным и А. П. Телковым на основании решения Ю. И. Стклянина (V. 1. 10) для той же задачи [24]. Из этих графиков видно, что при малых ϱ, соответствующих большим значениям параметра анизотропии $\varkappa^2 = \frac{k}{k_z}$, предельный дебит резко возрастает, что подтверждается высокими безводными дебитами нефтяных скважин в пластах с подошвенной водой с малой вертикальной проницаемостью k_z [25].

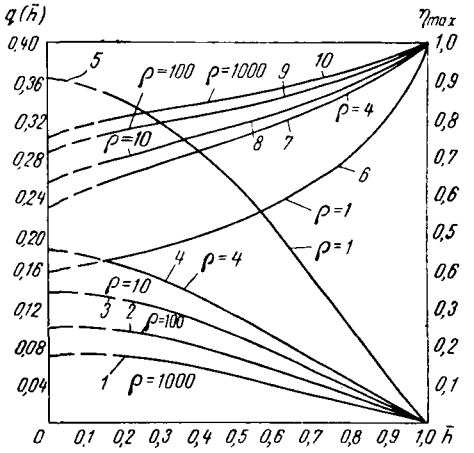


Рис. VII. 21. Графики для расчета предельных дебитов и высоты конуса.
1—5 для $q(\bar{h})$; *6—10* для η_{max}.

Отметим, что величина предельного дебита Q_1 практически не зависит от конструкции скважины. Предельная депрессия же, естественно, существенно зависит от конструкции скважины и характера вскрытия пласта. Расчет

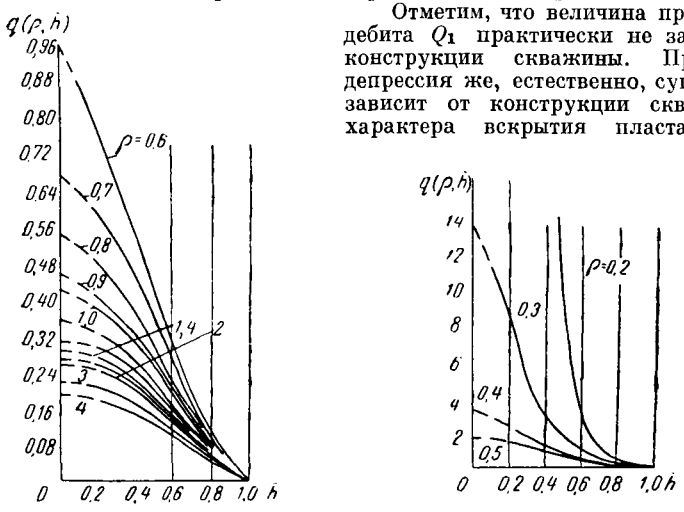


Рис. VII. 22.

предельной депрессии легко выполняется по известному предельному дебиту по обычным методам, изложенным в § 6 главы V.

Приведенные выше графики практически также можно использовать для расчетов в пластовых условиях предельных безводных дебитов несовершенных газовых скважин в пластах с подошвенной водой.

Обширный цикл исследований, связанных с конусообразованием, выполнен Д. А. Эфросом и его сотрудниками на щелевых моделях [26]. В результате этих исследований было подтверждено неравенство (VII. 8. 17) для предельного безводного дебита. Д. А. Эфросом и И. Ф. Курановым дана точная теория «плоского» конуса при безводном притоке к горизонтальной дрене в предположении неограниченных мощностей нефтяной и водяной зон на бесконечности [23]. Для пласта конечной мощности эта задача рассматривалась в [21, 24].

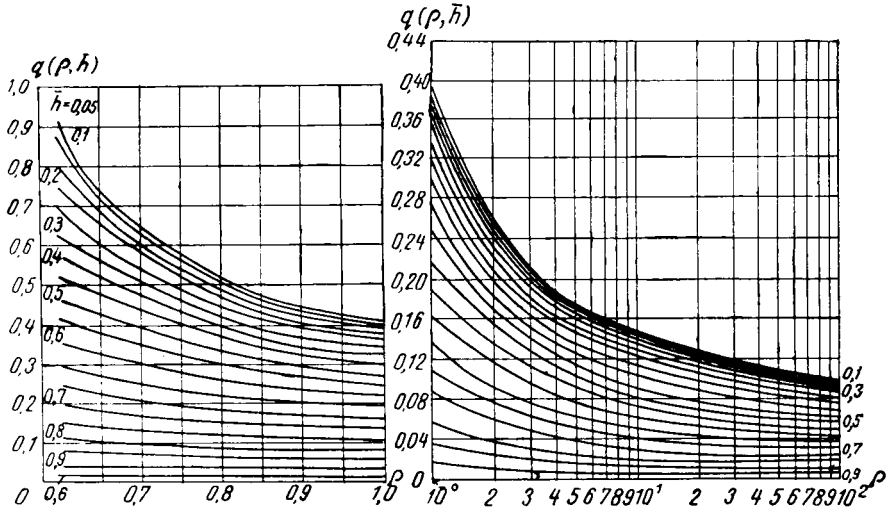


Рис. VII. 23.

Формирование конуса подошвенной воды в реальных условиях требует времени, иногда довольно значительного. Точное решение задачи с учетом мощностей водяной и нефтяной зон, различием вязкостей и плотностей пока еще отсутствует. При дебите Q меньше предельного первоначально плоская граница раздела по истечении некоторого времени примет форму стационарной холмистой поверхности BAC (см. рис. VII. 26), которая обычно и называется конусом. Вершина y_{max} может быть определена по графикам рис. VII. 21—VII. 25. Грубая оценка времени подъема может быть сделана следующим образом. В начальный момент времени $t = 0$ объемные дебиты нефти Q и воды $Q_в$, вытекающие через цилиндрическую поверхность R_0 области питания, при условии, что на этой поверхности давление распределено гидростатически, равны (рис. VII. 26):

$$Q = -\frac{k_н}{\mu_н} 2\pi R_0 h_н \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R_0}, \qquad \text{(VII. 8. 20)}$$

$$Q_в = -\frac{k_в}{\mu_в} 2\pi R_0 h_в \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R_0},$$

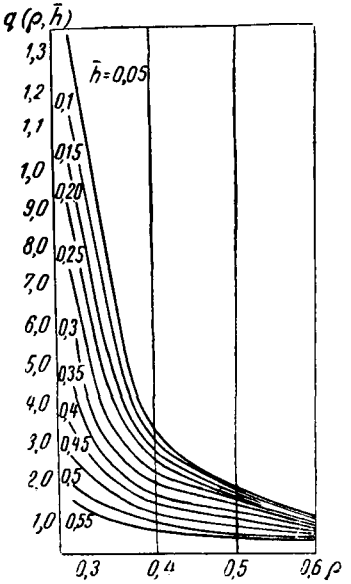
откуда

$$\frac{Q_в}{Q} = \frac{k_в h_в}{k_н h_н}\frac{\mu_н}{\mu_в}, \quad Q_в = \frac{k_в h_в}{k_н h_н}\frac{\mu_н}{\mu_в} Q, \qquad \text{(VII. 8. 21)}$$

где $k_н$, $k_в$ — проницаемости соответственно нефтяной и водяной зон.

Зная из (VII. 8. 21) $Q_в$ и объем пор V в области BACB, куда поднялась вода, нижний предел времени подъема можно определить из формулы

$$t = \frac{V}{Q_в}. \qquad \text{(VII. 8. 22)}$$



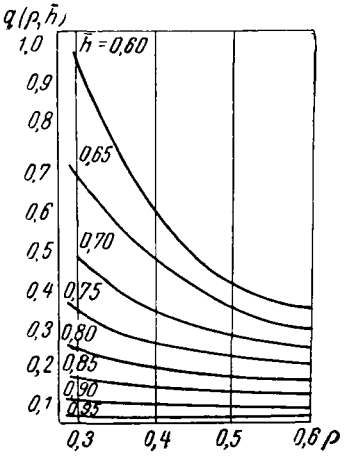


Рис. VII. 24.

Формула (VII. 8. 22) дает нижний предел времени подъема, так как при устойчивом предельном положении конуса и безводном нефтяном дебите Q дебит $Q_в$ по мере подъема уменьшается до нуля. При дебите Q сверх предельного, как показывают опыты на щелевых лотках, плавная поверхность конуса BAC перед прорывом скачком меняет свою форму и вместо точки A, где касательная плоскость горизонтальна, образуется точка возврата A' — острие, быстро прорывающаяся в скважину.

Таким образом, для грубой оценки как времени формирования конуса, так и его прорыва можно пользоваться той же формулой (VII. 8. 22).

Объем V можно оценить, аппроксимируя конус воды геометрическим конусом

$$V \approx \frac{1}{3} m \pi R_0^2 y_{max},$$

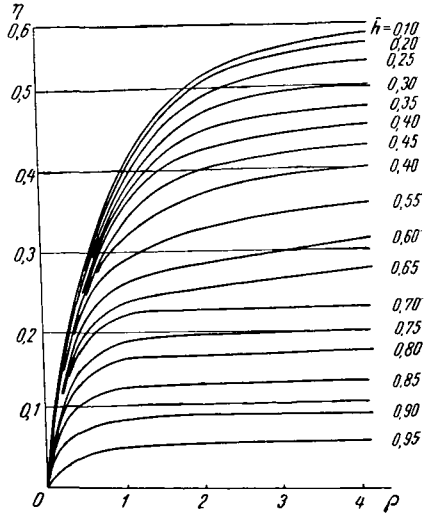


Рис. VII. 25. Графики для расчета предельной высоты конуса.

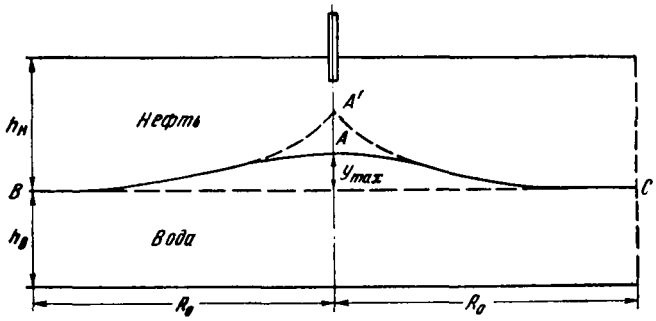


Рис. VII. 26. Конфигурация границы раздела после прорыва конуса.

а y_{max} определять из графиков рис. VII. 21 — VII. 25. Более точные методы расчета времени стабилизации и прорыва конуса приведены в работе А. П. Телкова [24].

§ 9. Совместный приток нефти и подошвенной воды к несовершенной скважине

Предположим, что вода и нефть совместно притекают к скважине радиусом r_c, вскрывшей горизонтальный пласт мощностью h на глубину b. На расстоянии R_0 от оси скважины распределение давления считается гидростатическим.

Пусть при отсутствии движения мощности, занятые водой и нефтью, соответственно равны h_1 и h_2. Движение считается установившимся и следующим закону Дарси, а жидкости несжимаемыми. На расстоянии r от скважины проведем цилиндрическую поверхность, соосную со скважиной. Пусть в первой области (водяной) высота этой поверхности $y = y(r)$ (рис. VII. 27).

Расходы воды и нефти через эту поверхность соответственно равны при оси z, направленной вверх, и горизонтальных кровле и подошве

$$Q_1 = \int_0^{y(r)} 2\pi r \frac{k_1}{\mu_1} \frac{\partial p_1(r, z)}{\partial r} dz, \qquad \text{(VII. 9. 1)}$$

$$Q_2 = \int_{y(r)}^{h} 2\pi r \frac{k_2}{\mu_2} \frac{\partial p_2(r, z)}{\partial r} dz, \qquad \text{(VII. 9. 2)}$$

где $p_1(r, z)$, $k_1 \mu_1$, $p_2(r, z)$, k_2, μ_2 — давления, проницаемости и вязкости соответственно в водяной и нефтяной частях.

Пользуясь формулой дифференцирования определенного интеграла по параметру, получим другие выражения для Q_1 и Q_2:

$$Q_1 = 2\pi c_1 \left[\frac{dP_1(r)}{d \ln r} - p_1(r, y) \frac{dy}{d \ln r} \right], \qquad \text{(VII. 9. 3)}$$

$$Q_2 = 2\pi c_2 \left[\frac{dP_2(r)}{d \ln r} + p_2(r, y) \frac{dy}{d \ln r} \right], \qquad \text{(VII. 9. 4)}$$

где

$$P_1 = \int_0^{y(r)} p_1(r, z)\,dz; \quad P_2 = \int_{y(r)}^{h} p_2(r, z)\,dz; \tag{VII. 9. 5}$$

$$c_1 = \frac{k_1}{\mu_1}; \quad c_2 = \frac{k_2}{\mu_2}. \tag{VII. 9. 6}$$

Интегралы $P_1(r)$ и $P_2(r)$ — силы, действующие вдоль вертикали, рассчитанные на единицу длины периметра $2\pi r$.

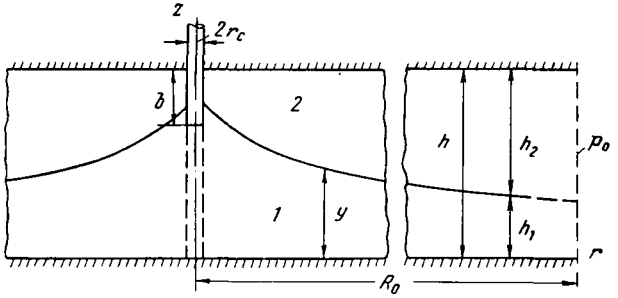


Рис. VII. 27. Совместный приток воды и нефти к несовершенной скважине.

Интегрируя (VII. 9. 3) и (VII. 9. 4) в пределах $r = r_c$ и $r = R_0$, получаем

$$\frac{Q_1}{2\pi c_1} \ln \frac{R_0}{r_c} = P_1(R_0) - P_1(r_c) - \int_{y(r_c)}^{y(R_0)} p_1(r, y)\,dy, \tag{VII. 9. 7}$$

$$\frac{Q_2}{2\pi c_2} \ln \frac{R_0}{r_c} = P_2(R_0) - P_2(r_c) + \int_{y(r_c)}^{y(R_0)} p_2(r, y)\,dy. \tag{VII. 9. 8}$$

Из уравнений (VII. 9. 7) и (VII. 9. 8) получаем

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{Q_1}{c_1} + \frac{Q_2}{c_2}\right) \ln \frac{R_0}{r_c} = P(R_0) - P(r_c) - \int_{y(r_c)}^{y(R_0)} [p_1(r, y) - p_2(r, y)]\,dy, \tag{VII. 9. 9}$$

где

$$P(R_0) = P_1(R_0) + P_2(R_0); \quad P(r_c) = P_1(r_c) + P_2(r_c) \tag{VII. 9. 10}$$

результирующие силы в сечениях $r = R_0$ и $r = r_c$.

Давления на границе раздела $p_1(r, y)$ и $p_2(r, y)$ отличаются только на величину капиллярного скачка δ:

$$p_1(r, y) - p_2(r, y) = \delta. \tag{VII. 9. 11}$$

Тогда согласно рис. VII. 27

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{Q_1}{c_1} + \frac{Q_2}{c_2}\right) \ln \frac{R_0}{r_c} = P(R_0) - P(r_c) - \delta\,[y(R_0) - y(r_c)] =$$
$$= P(R_0) - P(r_c) + \delta\,[y(r_c) - h_1]. \tag{VII. 9. 12}$$

Пренебрегая эффектом капиллярности, который при желании можно оценить из (VII. 9. 12), получаем

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{Q_1}{c_1}+\frac{Q_2}{c_2}\right)\ln\frac{R_0}{r_c}=P(R_0)-P(r_c). \qquad \text{(VII. 9. 13)}$$

Возьмем теперь на границе раздела произвольную линию тока, начинающуюся на поверхности $r=R_0$ (область питания) и заканчивающуюся в скважине.

Скорости фильтрации первой и второй жидкостей вдоль этой линии тока обозначим u_1 и u_2. Тогда согласно закону Дарси будем иметь

$$u_1=-c_1\left(\frac{dp_1}{ds}+\gamma_1\frac{dy}{ds}\right), \qquad \text{(VII. 9. 14)}$$

$$u_2=-c_2\left(\frac{dp_2}{ds}+\gamma_2\frac{dy}{ds}\right), \qquad \text{(VII. 9. 15)}$$

где γ_1, γ_2 — объемный вес соответственно первой и второй жидкостей; ds — элемент линии тока.

Интегрируя (VII. 9. 14) и (VII. 9.15) вдоль линии тока в пределах от области питания $s=s_0$ до скважины $s=s_c$, получаем

$$\int_{s_0}^{s_c}\frac{u_1}{c_1}\,ds=(p_0+\gamma_1 y_0)-(p_c+\gamma_1 y_c), \qquad \text{(VII. 9. 16)}$$

$$\int_{s_0}^{s_c}\frac{u_2}{c_2}\,ds=(p_0+\gamma_2 y_0)-(p_c+\gamma_2 y_c), \qquad \text{(VII. 9. 17)}$$

где p_0, p_c, y_0, y_c — давления и ординаты на границе раздела в сечениях $s=s_0$, $s=s_c$ (рис. VII. 27). Правую часть формулы (VII. 9. 16) можно представить так:

$$(p_0+\gamma_1 y_0)-(p_c+\gamma_1 y_c)=p_0-p_c-\gamma_1(y_c-y_0)+\gamma_2(y_c-y_0)-\gamma_2(y_c-y_0)=$$
$$=(p_0+\gamma_2 y_0)-(p_c+\gamma_2 y_c)-(\gamma_1-\gamma_2)(y_c-y_0)=\Delta p-\Delta\gamma\,(y_c-y_0), \qquad \text{(VII. 9. 18)}$$

где Δp — депрессия; $\Delta\gamma$ — разность объемных весов:

$$\Delta p=(p_0+\gamma_2 y_0)-(p_c+\gamma_2 y_c);\quad \Delta\gamma=\gamma_1-\gamma_2. \qquad \text{(VII. 9. 19)}$$

Таким образом, интегралы (VII. 9. 16) и (VII. 9. 17) можно представить в виде

$$\int_{s_0}^{s_c}\frac{u_1}{c_1}\,ds=\Delta p-\Delta\gamma\,(y_c-y_0),\qquad \int_{s_0}^{s_c}\frac{u_2}{c_2}\,ds=\Delta p. \qquad \text{(VII. 9. 20)}$$

При совместном притоке воды и нефти после прорыва водяного конуса депрессия Δp обычно намного превосходит член $\Delta\gamma\,(y_c-y_0)$, который можно назвать архимедовой составляющей. Очевидно (рис. VII. 27), $\Delta\gamma\,(y_c-y_0)<\Delta\gamma\,h_2$. Обычно депрессия Δp измеряется атмосферами или десятками атмосфер, а член $\Delta\gamma\,h_2$ при h_2 порядка 10 *м* будет иметь значение порядка 0,3 *ат*.

Таким образом, в большинстве случаев, особенно при форсированном отборе, величиной $\Delta\gamma\,(y_c - y_0)$ можно пренебречь по сравнению с Δp. Мы будем рассматривать именно эти случаи. Тогда вместо (VII. 9. 20) получим

$$\int_{s_0}^{s_c} \frac{u_1}{c_1}\,ds = \int_{s_0}^{s_c} \frac{u_2}{c_2}\,ds. \qquad \text{(VII. 9. 21)}$$

Формула (VII. 9. 21) сохраняет силу, если под s_0 и s_c подразумевать любые две точки вдоль рассматриваемой линии тока.

Отсюда следует равенство подынтегральных функций

$$\frac{u_1}{c_1} = \frac{u_2}{c_2}\,. \qquad \text{(VII. 9. 22)}$$

Из (VII. 9. 22) следует важный вывод: так как поверхность раздела является поверхностью тока, то при фиксированных значениях p_0 и p_c сетка течения, т. е. распределение эквипотенциалей и линий тока, для двухжидкостной системы такая же точно, как и для однажидкостной. Таким образом, когда архимедова составляющая $\Delta\gamma\,(y_c - y_0)$ мала по сравнению с депрессией, распределение потенциала при фиксированных значениях p_0 и p_c для совместного притока двух жидкостей с различными физическими константами точно такое же, как при движении однородной жидкости, что для осесимметричного движения жидкостей с разными вязкостями, но одинаковыми плотностями было доказано впервые М. М. Глоговским. Это обстоятельство позволяет найти результирующую силу $P\,(r_c)$ по известным p_0, p_c, степени и характеру несовершенства скважины. Для этого найдем дебит Q однородной жидкости с вязкостью μ в однородном пласте проницаемости k мощностью $h = h_1 + h_2$ (рис. VII. 27). Согласно уравнению (VII. 9. 13) и обобщенной формуле Дюпюи для притока к несовершенной скважине получим

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu}\,\frac{P(R_0) - P(r_c)}{\ln\dfrac{R_0}{r_c}} = \frac{2\pi kh}{\mu}\,\frac{p_0 - p_c}{\ln\dfrac{R_0}{r_c} + C}\,, \qquad \text{(VII. 9. 23)}$$

где C — фильтрационное сопротивление, обусловленное несовершенством скважины по величине и характеру вскрытия. При $R_0 > h$, что обычно и имеет место, величина C не зависит от радиуса R_0 и определяется исключительно конструкцией скважины.

Таким образом, из (VII. 9. 23), полагая $P\,(R_0) = p_0\,h$, имеем

$$P(r_c) = P(R_0) - h(p_0 - p_c)\,\frac{\ln\dfrac{R_0}{r_c}}{\ln\dfrac{R_0}{r_c} + C} = h\,\frac{p_c \ln\dfrac{R_0}{r_c} + p_0 C}{\ln\dfrac{R_0}{r_c} + C}\,. \qquad \text{(VII. 9. 24)}$$

Далее, в сечении $r = R_0$ — области питания — давления и скорости можно считать равномерно распределенными. Отсюда следует пропорция, неоднократно отмечавшаяся ранее:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c_1 h_1}{c_2 h_2} = \beta. \qquad \text{(VII. 9. 25)}$$

Уравнения (VII. 9.13), (VII. 9. 24) и (VII. 9. 23) позволяют найти Q_1, Q_2, если p_0 и p_c известны. Из (VII. 9. 13) и (VII. 9. 23) получаем

$$Q_1 = 2\pi c_1 h_1 \frac{p_0 - p_c}{\ln \frac{R_0}{r_c} + C} = \frac{2\pi k_1 h_1}{\mu_1} \frac{p_0 - p_c}{\ln \frac{R_0}{r_c'}}, \qquad \text{(VII. 9. 26)}$$

$$Q_2 = 2\pi c_2 h_2 \frac{p_0 - p_c}{\ln \frac{R_0}{r_c} + C} = \frac{2\pi k_2 h_2}{\mu_2} \frac{p_0 - p_c}{\ln \frac{R_0}{r_c'}}, \qquad \text{(VII. 9. 27)}$$

где

$$r_c' = r_c e^{-C}$$

— приведенный радиус. Таким образом, для расчета дебитов при совместном притоке двух жидкостей дебит каждой жидкости следует рассчитывать, как для совершенной скважины радиусом r_c' в пласте мощностью h_1 и h_2, причем приведенный радиус r_c' должен быть предварительно определен из условий движения однородной жидкости в пласте мощностью $h = h_1 + h_2$.

Предыдущее решение легко обобщается на случай совместного течения двух жидкостей в однородно-анизотропном пласте проницаемостью k_r по горизонтали (вдоль напластования) и проницаемостью k_z по вертикали (перпендикулярно напластованию).

В этом случае при расчете дебитов по формулам (VII. 9. 1) и (VII. 9. 2) вместо k_1 и k_2 должны быть подставлены горизонтальные составляющие проницаемости $(k_r)_1$ и $(k_r)_2$.

Различие в проницаемостях k_r и k_z скажется только на величине приведенного радиуса r_c', который в условиях однородно-анизотропного пласта будет иметь другое значение, нежели для однородно-изотропного. Один из возможных методов расчета r_c' был изложен в § 4, 5 главы V.

Ряд исследований совместного притока нефти и воды к скважинам выполнен во Всесоюзном нефтегазовом институте (ВНИИ) [26, 28]. Д. А. Эфрос [26] разработал принципы моделирования этого процесса и предложил ряд вспомогательных графиков, облегчающих производство расчетов и позволяющих более точно определить влияние разницы объемных весов.

Задача о совместном раздельном отборе воды и нефти рассмотрена в [27]. Некоторые другие задачи совместного движения двух жидкостей в пористой среде с учетом гравитационных эффектов изучали А. К. Курбанов и А. Х. Фаткуллин [29, 30].

§ 10. Выравнивание возмущенной в начале границы раздела двух жидкостей в пористой среде под действием гравитационных сил. Расчет предельных схем течения

Рассмотрим прямолинейное равномерное вытеснение одной жидкости другой с учетом силы тяжести. Как упоминалось выше, можно исходить из двух предельных схем течения. Если принять схему послойного течения, что будет отвечать системе жестких трубок тока, то $k_y = 0$, $k_r = k$. Можно рассмотреть также другой крайний случай — предположить, что давление в каждом поперечном сечении потока распределено гидростатически, т. е. $k_y = \infty$. В действительности, так как $0 < k_y < \infty$, истинная картина движения будет заключена между двумя крайними случаями, указанными выше.

Рассмотрим движение границы раздела в наклонном пласте мощностью h Угол наклона пласта к горизонту α (рис. VII. 28). Предположим, что жидкость *1* (вода) вытесняет жидкость *2* (нефть).

По-видимому, схема $k_y = \infty$ ближе к действительности в случае пологопадающих пластов, когда длина водо-нефтяного контакта гораздо больше мощности пласта h.

Выведем дифференциальные соотношения для границы раздела в предположении, что $k_y = \infty$ (все уравнения выписываются для единицы ширины потока). Очевидно, что эта схема соответствует случаю, когда компоненты скорости, перпендикулярные подошве пласта, равны нулю, а параллельные распределены равномерно по сечению потока.

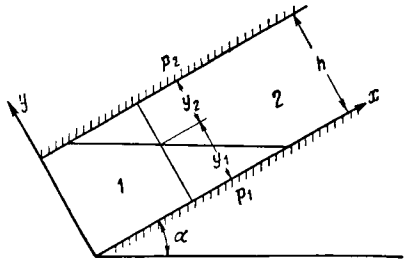


Рис. VII. 28.

Отметим сходство и различие этой схемы со схемой $k_y = 0$: при схеме $k_y = 0$ перпендикулярные напластованию скорости отсутствуют, как и в схеме $k_y = \infty$, но зато горизонтальные компоненты, вообще говоря, распределены неравномерно. Распределение компонентов скорости, параллельных напластованию, определяется из граничных условий для каждой трубки тока.

Согласно уравнению Дарси имеем (рис. VII. 28)

$$q_1 = -\frac{k_1}{\mu_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial z_1}{\partial x}\right) y_1,$$
$$q_2 = -\frac{k_2}{\mu_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial z_2}{\partial x}\right) y_2, \qquad \text{(VII. 10. 1)}$$

где p_1, p_2 — давление соответственно на подошве и на кровле; y_1, y_2 — мощности, занятые соответственно жидкостями *1* и *2* (рис. VII. 28).

Составляя баланс расхода в предположении, что вытеснение поршневое (полное), и считая обе жидкости несжимаемыми, получаем

$$-\frac{\partial q_1}{\partial x} = m\frac{\partial y_1}{\partial t}, \quad -\frac{\partial q_2}{\partial x} = m\frac{\partial y_2}{\partial t}. \qquad \text{(VII. 10. 2)}$$

Так как (рис. VII. 28) $p_1 = p_2 + \gamma_1 y_1 \cos\alpha + \gamma_2 y_2 \cos\alpha$, то

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} - \left(\gamma_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + \gamma_2 \frac{\partial y_2}{\partial x}\right)\cos\alpha.$$

Из рис. VII. 28 следует, что так как $y_1 + y_2 = h$, то

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = -\frac{\partial y_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x} = -\frac{\partial y_2}{\partial x}, \qquad \text{(VII. 10. 3)}$$

откуда

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x} - \Delta\gamma \cos\alpha \frac{\partial y_1}{\partial x}, \qquad \text{(VII. 10. 4)}$$

$$\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2. \qquad \text{(VII. 10. 5)}$$

Из (VII. 10. 2) на основании (VII. 10. 3) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}(q_1 + q_2) = m\left(\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial y_2}{\partial t}\right) = 0,$$

т. е. суммарный расход $q=q_1+q_2=q(t)$ зависит только от времени:

$$q=q(t). \tag{VII. 10. 6}$$

Подставляя (VII. 10. 4) в (VII. 10. 1), получаем

$$q_1=-\frac{k_1y_1}{\mu_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}+\gamma_1\sin\alpha\right),$$

$$q_2=-\frac{k_2y_2}{\mu_2}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}-\Delta\gamma\cos\alpha\frac{\partial y_1}{\partial x}+\gamma_2\sin\alpha\right), \tag{VII. 10. 7}$$

так как

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin\alpha.$$

В дальнейшем будем рассматривать только горизонтальные пласты, т. е. будем полагать $\alpha=0$.

Складывая правые и левые части формул (VII. 10. 7) и учитывая (VII. 10. 6), получаем

$$q_1+q_2=q(t)=-\left(\frac{k_1y_1}{\mu_1}+\frac{k_2y_2}{\mu_2}\right)\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{k_2y_2}{\mu_2}\Delta\gamma\frac{\partial y_1}{\partial x},$$

откуда

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x}=\frac{q(t)-\dfrac{k_2y_2}{\mu_2}\Delta\gamma\dfrac{\partial y_1}{\partial x}}{\dfrac{k_1y_1}{\mu_1}+\dfrac{k_2y_2}{\mu_2}}. \tag{VII. 10. 8}$$

Подставляя (VII. 10. 8) в (VII. 10. 1) и (VII. 10. 2), получаем

$$q_1=\frac{k_1y_1}{\mu_1}\,\frac{q(t)-\dfrac{k_2y_2}{\mu_2}\Delta\gamma\dfrac{\partial y_1}{\partial x}}{\dfrac{k_1y_1}{\mu_1}+\dfrac{k_2y_2}{\mu_2}}, \tag{VII. 10. 9}$$

$$-\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial x}\left[y_1\,\frac{q(t)-\dfrac{k_2y_2}{\mu_2}\Delta\gamma\dfrac{\partial y_1}{\partial x}}{\dfrac{k_1y_1}{\mu_1}+\dfrac{k_2y_2}{\mu_2}}\right]=m\frac{\partial y_1}{\partial t}. \tag{VII. 10. 10}$$

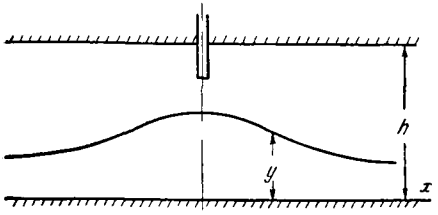


Рис. VII. 29.

Очевидно, что (VII. 10. 10) представляет собой дифференциальное уравнение относительно y_1, так как $y_2=h-y_1$. При $\Delta\gamma\neq0$ это будет уравнение параболического типа. Случай $q(t)\neq0$, $\Delta\gamma=0$, когда (VII. 10. 10) обращается в уравнение первого порядка, рассмотрен А. М. Пирвердяном [16] и в работе [15]. Некоторые автомодельные решения для общего случая $q(t)\neq0$, $\Delta\gamma\neq0$ приведены в § 11 настоящей главы.

Рассмотрим представляющую самостоятельный интерес задачу о выравнивании возмущенной поверхности раздела под действием гравитационных сил (рис. VII. 29). При этом будем предполагать, что суммарный расход отсутствует: $q(t)=0$. Пусть в начальный момент форма границы раздела известна:

$$t=0,\ y_1=y=y(x,0)=f(x). \tag{VII. 10. 11}$$

Уравнение (VII. 10. 10) принимает вид при $q(t)=0$:

$$\frac{c_1c_2\,\Delta\gamma}{m}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y(h-y)\,\dfrac{\partial y}{\partial x}}{c_1y+c_2(h-y)}\right]=\frac{\partial y}{\partial t}\,, \qquad \text{(VII. 10. 12)}$$

где

$$c_1=\frac{k_1}{\mu_1}\,;\quad c_2=\frac{k_2}{\mu_2}\,. \qquad \text{(VII. 10. 13)}$$

Введем аналогичную функции Лейбензона функцию $\omega(y)$:

$$\omega(y)=\int_0^y\frac{y(h-y)}{c_1y+c_2(h-y)}\,dy. \qquad \text{(VII. 10. 14)}$$

Из (VII. 10. 14) следует

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{d\omega}{dy}\,\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y(h-y)}{c_1y+c_2(h-y)}\,\frac{\partial y}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{d\omega}{dy}\,\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{y(h-y)}{c_1y+c_2(h-y)}\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

и (VII. 10. 14) можно переписать в виде

$$\frac{c_1c_2\,\Delta\gamma}{m}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\dfrac{\partial\omega}{\partial t}}{\dfrac{d\omega}{dy}}$$

или

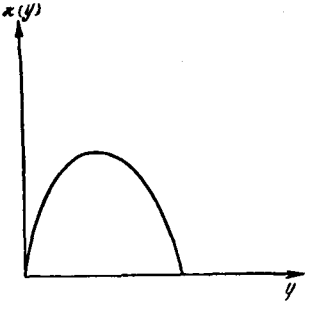


Рис. VII. 30.

$$\frac{c_1c_2\,\Delta\gamma}{m}\,\frac{y(h-y)}{c_1y+c_2(h-y)}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial\omega}{\partial t}\,. \qquad \text{(VII. 10. 15)}$$

Из (VII. 10. 14) следует, что $\omega=\omega(y)$. Вводя обозначение

$$\frac{c_1c_2\,\Delta\gamma}{m}\,\frac{y(h-y)}{c_1y+c_2(h-y)}=\varkappa(y)=\varkappa[y(\omega)], \qquad \text{(VII. 10. 16)}$$

перепишем (VII. 10. 15) в виде

$$\varkappa(y)\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{\partial\omega}{\partial t}\,. \qquad \text{(VII. 10. 17)}$$

Мы получили уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом температуропроводности.

Характер функции $\varkappa(y)$ представлен на рис. VII. 30. Если в (VII. 10. 17) заменить $\varkappa(y)$ на его максимальное значение $\varkappa_{max}$ и толковать ω как температуру, то, очевидно, это будет соответствовать более быстрому выравниванию температуры.

Верхний предел скорости выравнивания целесообразно рассчитывать по максимальному значению $[\varkappa(y)]_{max}$.

Исследуя $\varkappa(y)$ на максимум, после простых вычислений получаем

$$[\varkappa(y)]_{max}=\varkappa=\frac{\Delta\gamma\,h}{m}\,\frac{c_1c_2}{(c_1-c_2)^2}\,(\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2})^2. \qquad \text{(VII. 10. 18)}$$

При $c_1 = c_2 = c$ вместо (VII. 10. 18), как легко видеть, будет

$$[\varkappa(y)]_{\max} = \varkappa = \frac{\Delta\gamma\, h}{m}\,\frac{c}{4}\,. \qquad \text{(VII. 10. 19)}$$

Развернутое выражение $\omega(y)$ получим после выполнения интегрирования согласно (VII. 10. 14) что дает после простых вычислений

$$\omega(y) = \frac{h^2}{c_2}\cdot\frac{1}{\delta}\left\{\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\left[\eta - \frac{1}{\delta}\ln(1+\delta\eta)\right] - \frac{\eta^2}{2}\right\}, \qquad \text{(VII. 10. 20)}$$

где обозначено

$$\eta = \frac{y}{h}\,;\quad \delta = \frac{c_1 - c_2}{c_2}\,. \qquad \text{(VII. 10. 21)}$$

Таким образом, для заданного y из (VII. 10. 20) можно найти ω и наоборот. Последнюю операцию проще всего выполнять графически по заранее построенному графику правой части (VII. 10. 20). При $\delta = 0$ и $c_1 = c_2 = c$ из (VII. 10. 21) получим

$$\omega = \frac{h^2}{c}\left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{3}\eta^3\right). \qquad \text{(VII. 10. 22)}$$

Проводя аналогичные рассуждения для случая двухмерного растекания, получаем

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial x_2^2}\right) = \frac{\partial\omega}{\partial t}\,, \qquad \text{(VII. 10. 23)}$$

где x_1, x_2 — прямоугольные координаты на плоскости.

Начальные условия зададим в виде

$$\text{при } t = 0 \begin{cases} \omega(x,\ 0) = f(x) — \text{линейный случай,} \\ \omega(x_1,\ x_2,\ 0) = f(x_1,\ x_2) — \text{двухмерный случай.} \end{cases}$$

Дальнейшие расчеты будем производить, предполагая $\varkappa = \text{const}$.

Из теории теплопроводности известно [31], что для линейного случая решение уравнения (VII. 10. 17) в этом случае имеет вид:

$$\omega(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-u)^2}{4\varkappa t}}\,du, \qquad \text{(VII. 10. 24)}$$

а для двухмерного решение (VII. 10. 23) будет

$$\omega(x_1,\ x_2,\ t) = \frac{1}{4\pi\varkappa t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u,\ v)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x_1-u)^2+(x_2-v)^2}{4\varkappa t}}\,du\,dv. \qquad \text{(VII. 10. 25)}$$

При линейном растекании, вводя подстановку

$$\frac{u-x}{2\sqrt{\varkappa t}} = z,\quad u = x + 2z\sqrt{\varkappa t},$$

$$du = 2\sqrt{\varkappa t}\,dz, \qquad \text{(VII. 10. 26)}$$

перепишем (VII. 10. 24) в виде

$$\omega(x, t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+2z\sqrt{\varkappa t})\,e^{-z^2}\,dz. \qquad \text{(VII. 10. 27)}$$

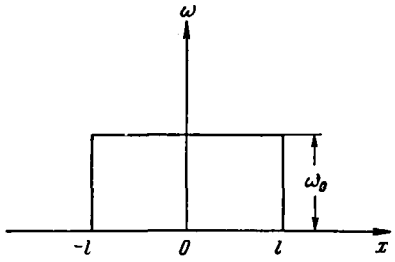


Рис. VII. 31.

Рассмотрим пример (рис. VII. 31), когда начальное распределение имеет вид прямоугольника:

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\infty < x < -l,\\ \omega_0, & -l < x < l,\\ 0, & l < x < \infty.\end{cases} \qquad \text{(VII. 10. 28)}$$

Это условие на основании (VII. 10. 26) можно переписать в виде

$$f(x+2z\sqrt{\varkappa t})=\begin{cases}0, & -\infty < z < -\dfrac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}},\\ \omega_0, & -\dfrac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}} < z < \dfrac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}},\\ 0, & \dfrac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}} < z < \infty.\end{cases} \qquad \text{(VII. 10. 29)}$$

Тогда из (VII. 10. 27) следует, что

$$\omega(x, t)=\frac{\omega_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\frac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-z^2}\,dz=\frac{\omega_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\frac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{0} e^{-z^2}\,dz+\int_{0}^{\frac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-z^2}\,dz\right]=$$

$$=\frac{\omega_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{0}^{\frac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-z^2}dz+\int_{0}^{\frac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-z^2}\,dz\right]=$$

$$=\frac{\omega_0}{2}\left(\operatorname{erf}\frac{l+x}{2\sqrt{\varkappa t}}+\operatorname{erf}\frac{l-x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right), \qquad \text{(VII. 10. 30)}$$

$$\operatorname{erf}\xi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-u^2}du\text{ — интеграл вероятности.} \qquad \text{(VII. 10. 31)}$$

Рассмотрим поведение решения (VII. 10. 30) в точках $l-\varepsilon$, $l+\varepsilon$, где ε весьма мало. В точке $x=l-\varepsilon$

$$\omega(l-\varepsilon, t)=\frac{\omega_0}{2}\left(\operatorname{erf}\frac{2l-\varepsilon}{2\sqrt{\varkappa t}}+\operatorname{erf}\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varkappa t}}\right). \qquad \text{(VII. 10. 32)}$$

Следовательно, подходя к точке $l-\varepsilon$ изнутри интервала при малых t и учитывая, что $\operatorname{erf}\xi \underset{\xi\to\infty}{\to} 1$, получаем $\omega(l-\varepsilon, t)\approx\omega_0$.

В точке $x=l+\varepsilon$

$$\omega(l+\varepsilon, t)=\frac{\omega_0}{2}\left(\operatorname{erf}\frac{2l+\varepsilon}{2\sqrt{\varkappa t}}-\operatorname{erf}\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varkappa t}}\right).$$

В точках за пределами интервала $[-l, l]$ ω сначала повышается (при $t=0$, $\omega=0$), а затем понижается.

Из (VII. 10. 27) следует, что значение $\omega(x, t)$ в момент $t>0$ зависит от значений f на всей прямой интегрирования, т. е. скорость распространения возмущений бесконечна, что хорошо известно для классического уравнения теплопроводности. Однако заметные изменения ω будут только при $0<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{\varkappa t}}<2$, откуда следует, что скорость распространения «языка» нижней жидкости практически равна $\varepsilon\approx 4\sqrt{\varkappa t}$.

Рассмотрим теперь радиальное растекание. Будем предполагать, что имеется радиальная симметрия, т. е. все величины зависят только от радиуса r. Уравнение (VII. 10. 23) в этом случае принимает вид:

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)=\frac{\partial\omega}{\partial t}, \qquad \text{(VII. 10. 33)}$$

а начальное условие при $t=0$

$$\omega(r, 0)=f(r). \qquad \text{(VII. 10. 34)}$$

Переходя к полярным координатам, $x_1=r\cos\theta$, $x_2=r\sin\theta$, $u=\varrho\cos\varphi$, $v=\varrho\sin\varphi$, получаем

$$du\,dv=\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$

Перепишем (VII. 10. 25) в виде

$$\omega(r, t)=\frac{1}{4\pi\varkappa t}\int_0^{\infty}\int_{\theta}^{2\pi+\theta} f(\varrho)\,\varrho\,e^{-\frac{r^2+\varrho^2-2r\varrho\cos(\varphi-\theta)}{4\varkappa t}}\,d\varrho\,d\varphi \qquad \text{(VII. 10. 35)}$$

или, вводя замену переменных $\psi=\varphi-\theta$ (ψ—угол между векторами r и ϱ)

$$\omega(r, t)=\frac{1}{4\pi\varkappa t}\int_0^{\infty} f(\varrho)\,\varrho\,e^{-\frac{r^2+\varrho^2}{4\varkappa t}}\,d\varrho\int_0^{2\pi} e^{\frac{r\varrho\cos\psi}{2\varkappa t}}\,d\psi. \qquad \text{(VII. 10. 36)}$$

Из теории бесселевых функций известно [31, 32], что

$$\int_0^{\pi} e^{x\cos\alpha}\,d\alpha=\pi I_0(x),$$

где I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка первого рода. Тогда

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{r\varrho\cos\psi}{2\varkappa t}} d\psi = \pi I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right) + \int_\pi^{2\pi} e^{\frac{r\varrho\cos\psi}{2\varkappa t}} d\psi =$$

$$= \pi I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right) + \int_0^{\pi} e^{-\frac{r\varrho\cos\psi}{2\varkappa t}} d\psi = \pi I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right) + \pi I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right) =$$

$$= 2\pi I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right), \qquad \text{(VII. 10. 37)}$$

причем учтено, что $I_0(x) = I_0(-x)$. Таким образом, можно (VII. 10. 36) переписать в виде

$$\omega(r, t) = \frac{1}{2\varkappa t} \int_0^{\infty} f(\varrho)\, \varrho\, e^{-\frac{r^2+\varrho^2}{4\varkappa t}} I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right) d\varrho \qquad \text{(VII. 10. 38)}$$

или

$$\omega(r, t) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}}}{2\varkappa t} \int_0^{\infty} f(\varrho)\, \varrho\, e^{-\frac{\varrho^2}{4\varkappa t}} I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right) d\varrho. \qquad \text{(VII. 10. 39)}$$

В общем случае интеграл (VII. 10. 39) приходится вычислять приближенно. Если начальная функция $f(r)$ может быть аппроксимирована в виде

$$\omega(r, 0) = f(r) = \sum_i A_i e^{-\beta_i r^2}, \qquad \text{(VII. 10. 40)}$$

где A_i, β_i — известные постоянные, то интеграл (VII. 10. 39) берется в конечном виде при помощи известной из теории Бесселя формулы

$$\int_0^{\infty} \varrho\, e^{-p^2\varrho^2} I_0(m\varrho)\, d\varrho = \frac{1}{2p^2} e^{\frac{m^2}{4p^2}}, \qquad \text{(VII. 10. 41)}$$

где p^2 и m — постоянные. После простых преобразований получим

$$\omega(r, t) = \frac{e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}}}{2\varkappa t} \int_0^{\infty} \varrho \sum_i A_i e^{-\beta_i\varrho^2} e^{-\frac{\varrho^2}{4\varkappa t}} I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right) d\varrho =$$

$$= \sum_i \frac{A_i}{4\varkappa t\, \beta_i + 1} e^{-\frac{\beta_i r^2}{4\varkappa t\, \beta_i + 1}}. \qquad \text{(VII. 10. 42)}$$

Формулу (VII. 10. 39) можно преобразовать также к виду

$$\omega(r, t) = \frac{1}{2\varkappa t} \int_0^{\infty} \varrho f(\varrho) e^{-\frac{(r-\varrho)^2}{4\varkappa t}} e^{-\frac{r\varrho}{2\varkappa t}} I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right) d\varrho, \qquad \text{(VII. 10. 43)}$$

чтобы можно было использовать таблицы функции $e^{-x}I_0(x)$ [32], а при $\frac{r\varrho}{2\varkappa t} \geqslant 10$ заменить $I_0\left(\frac{r\varrho}{2\varkappa t}\right)$ его асимптотическим приближением

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Вводя подстановку

$$\frac{\varrho - r}{2\sqrt{\varkappa t}} = u, \qquad \text{(VII. 10. 44)}$$

откуда

$$\varrho = r + 2u\sqrt{\varkappa t},$$

(VII. 10. 43) можно переписать в виде

$$\omega(r, t) = \frac{1}{\sqrt{\varkappa t}} \int_{\frac{-r}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} (r + 2u\sqrt{\varkappa t}) f(r + 2u\sqrt{\varkappa t})\, e^{-u^2} e^{-z} I_0(z)\, du, \qquad \text{(VII. 10. 45)}$$

где

$$z = \frac{r^2}{2\varkappa t} + \frac{ru}{\sqrt{\varkappa t}}.$$

Расчеты по (VII. 10. 45) производить легче, так как e^{-u^2} быстро затухает, а f — ограниченная функция.

Рассмотрим случай

$$f(r) = \begin{cases} \omega_0, & 0 < r < R, \\ 0, & R < r < \infty. \end{cases}$$

Формула (VII. 10. 45) в этом случае принимает вид:

$$\omega(r, t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{\varkappa t}} \int_{\frac{-r}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\frac{R-r}{2\sqrt{\varkappa t}}} (r + 2u\sqrt{\varkappa t})\, e^{-u^2} e^{-z} I_0(z)\, du. \qquad \text{(VII. 10. 46)}$$

При $r = 0$

$$\omega(0, t) = 2\omega_0 \int_0^{\frac{R}{2\sqrt{\varkappa t}}} u e^{-u^2} du = \omega_0 \left(1 - e^{-\frac{R^2}{4\varkappa t}}\right). \qquad \text{(VII. 10. 47)}$$

Полученные выше формулы позволяют, в частности, сделать расчет времени осадки водяного конуса после остановки нефтяной скважины, оценить время деформации газового объема в водонасыщенной пористой среде под действием сил Архимеда и т. д.

Так, можно показать, что время деформации больших газовых объемов в водоносных пластах под действием гравитационных сил весьма велико, что указывает на принципиальную возможность создания подземных газохранилищ в горизонтальных и пологопадающих водоносных пластах [33].

Приведенная выше методика, соответствующая схеме $k_y = \infty$ и максимальному значению коэффициента $\varkappa$ в линеаризованном уравнении (VII. 10. 18), дает завышенную скорость выравнивания границы раздела и, следовательно, нижний предел для времени. Заниженная скорость выравнивания и верхний предел времени выравнивания могут быть найдены, как указывалось выше, путем мысленного введения в поток той или иной системы непроницаемых перегородок, искажающих истинную картину течения и соответствующих увеличению сопротивления сверх действительного. Для задачи оседания конуса это можно сделать следующим образом (рис. VII. 32).

На цилиндрической поверхности, проходящей через контур R_0, давление предполагается распределенным гидростатически. Пусть O_1, O_2 — точки пересечения оси скважины с кровлей и подошвой пласта. Проведем теперь два конуса

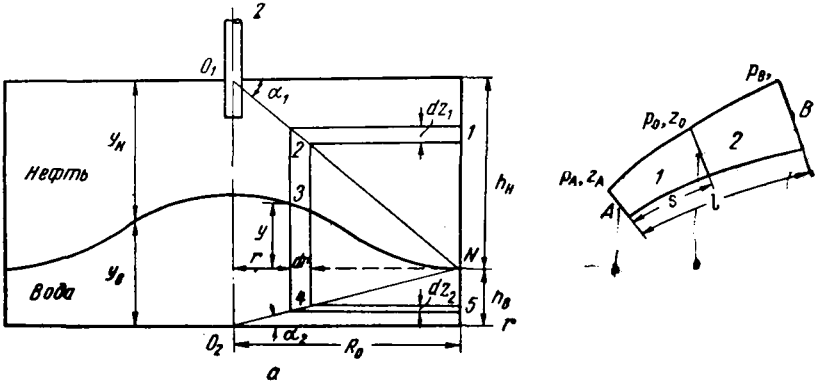


Рис. VII. 32.

с образующими O_1N и O_2N, основаниями которых является невозмущенная горизонтальная плоскость первоначального положения водо-нефтяного контакта. Проведем систему перегородок *1—2—3—4—5*, показанную на рис. VII. 32, по которой движения жидкости и осадка конуса будут происходить следующим образом: по системе *1—2* от R_0 до образующей O_1N плоскорадиально, по системе *2—3—4* между образующими O_1N и O_2N вертикально вниз и затем по системе *4—5* от образующей O_2N обратно до поверхности R_0. На участке *1—2—3* движется нефть, замещая воду, движущуюся на участке *3—4—5*. Движение происходит под действием архимедовой силы, обусловленной подъемом воды $y = y(t)$ над первоначальной горизонтальной плоскостью водо-нефтяного контакта.

Расстояния между соседними бесконечно близкими перегородками показаны на рис. VII. 32 Предварительно расширим вывод формул для вытеснения одной жидкости другой с учетом различия плотностей (рис. VII. 32, *б*). Пусть длина s трубки тока с сечением $f(s)$ занята жидкостью *1*, $l - s$ — жидкостью *2*. В сечениях A, B и на подвижной границе раздела 0 заданы давления p_A, p_B, p_0 и геометрические напоры z_A, z_B, z_0 (рис. VII. 32, *б*). Тогда расход каждой из жидкостей может быть найден из формулы, являющейся обобщением формулы (VII. 5. 5) на случай различных плотностей:

$$q = \frac{(p_A + \gamma_1 z_A) - (p_0 + \gamma_1 z_0)}{\frac{\mu_1}{k_1}\int\limits_0^s \frac{ds}{f(s)}} = \frac{(p_0 + \gamma_2 z_0) - (p_B + \gamma_2 z_B}{\frac{\mu_2}{k_2}\int\limits_s^l \frac{ds}{f(s)}}$$

или

$$q=\frac{(p_A+\gamma_1 z_A)-(p_B+\gamma_2 z_B)+(\gamma_2-\gamma_1) z_0}{R_{AO}+R_{OB}}, \qquad \text{(VII. 10. 48)}$$

где

$$R(s_1, s_2)=\frac{\mu}{k}\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{f(s)}- \qquad \text{(VII. 10. 49)}$$

фильтрационное сопротивление между сечениями s_1, s_2 при движении однородной жидкости.

Для нашей системы трубок тока (рис. VII. 32, *а*)

$$q=\frac{(p_1+\gamma_н z_1)-(p_5+\gamma_в z_5)+(\gamma_в-\gamma_н) z_3}{R_{1-5}}, \qquad \text{(VII. 10. 50)}$$

где

$$R_{1-5}=R_{1-2}+R_{2-3}+R_{3-4}+R_{4-5}. \qquad \text{(VII. 10. 51)}$$

Согласно условию о гидростатическом распределении давления (рис. VII. 32)

$$p_5=p_1+\gamma_н(z_1-z_N)+\gamma_в(z_N-z_5). \qquad \text{(VII. 10. 52)}$$

Подставляя p_5 из (VII. 10. 52) в (VII. 10. 50), получаем

$$q=\frac{(p_1+\gamma_н z_1)-[p_1+\gamma_н(z_1-z_N)+\gamma_в(z_N-z_5)+\gamma_в z_5]+(\gamma_в-\gamma_н) z_3}{R_{1-5}}=$$

$$=\frac{\Delta\gamma\, y}{R_{1-5}}, \qquad \text{(VII. 10. 53)}$$

где

$$\Delta\gamma=\gamma_в-\gamma_н;\quad y=z_3-z_N. \qquad \text{(VII. 10. 54)}$$

Фильтрационные сопротивления, в сумме составляющие R_{1-5}, согласно (VII. 10. 49) и рис. VII. 32 определяются формулами

$$R_{1-2}=\frac{\mu_н}{k}\int_r^{R_0}\frac{dr}{2\pi r\, dz_1}=\frac{\mu_н}{2\pi k\, dz_1}\ln\frac{R_0}{r},$$

$$R_{2-3}=\frac{\mu_н}{k}\frac{1}{2\pi r\, dr}\int_{r\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}^{(h_н-y)}dz=\frac{\mu_н}{2\pi kr\, dr}(h_н-y-r\,\mathrm{tg}\,\alpha_1),$$

$$R_{3-4}=\frac{\mu_в}{k}\frac{1}{2\pi r\, dr}\int_{r\,\mathrm{tg}\,\alpha_2}^{(h_в+y)}dz=\frac{\mu_в}{2\pi kr\, dr}(h_в+y-r\,\mathrm{tg}\,\alpha_2), \qquad \text{(VII. 10. 55)}$$

$$R_{4-5}=\frac{\mu_в}{k}\int_r^{R_0}\frac{dr}{2\pi r\, dz_2}=\frac{\mu_в}{2\pi k\, dz_2}\ln\frac{R_0}{r}.$$

Выразим теперь расход q через изменение y:

$$q = -2\pi rm\, dr \frac{dy}{dt} \qquad \text{(VII. 10. 56)}$$

или

$$\frac{\Delta\gamma\, y}{R_{1-5}} = \Delta\gamma \frac{y}{R_{1-5}(r, y)} = -2\pi rm\, dr \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\Delta\gamma}{2\pi mr\, dr} \frac{y}{R_{(1-5)}(r, y)}, \qquad \text{(VII. 10. 57)}$$

где $R_{1-5} = R_{1-5}(r, y)$ — суммарное фильтрационное сопротивление, согласно (VII. 10. 55) зависящее от y. Замечая, что $dz_1 = dr \operatorname{tg} \alpha_1$, $dz_2 = dr \operatorname{tg} \alpha_2$, получаем

$$R_{1-5} = \frac{1}{2\pi k\, dr}\left[\mu_н \operatorname{ctg} \alpha_1 \cdot \ln \frac{R_0}{r} + \mu_н \frac{h_н - y - r \operatorname{tg} \alpha_1}{r} + \right.$$

$$\left. + \mu_в \frac{h_в + y - r \operatorname{tg} \alpha_2}{r} + \mu_в \operatorname{ctg} \alpha_2 \ln \frac{R_0}{r}\right] = \frac{1}{2\pi k \cdot dr}\left[(\mu_н \operatorname{ctg} \alpha_1 + \right.$$

$$+ \mu_в \operatorname{ctg} \alpha_2) \ln \frac{R_0}{r} + \frac{1}{r}(\mu_н h_н + \mu_в h_в) -$$

$$\left. - (\mu_н \operatorname{tg} \alpha_1 + \mu_в \operatorname{tg} \alpha_2) - (\mu_н - \mu_в) \frac{y}{r}\right]. \qquad \text{(VII. 10. 58)}$$

Подставляя в дифференциальное уравнение (VII. 10. 57), будем иметь

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k\Delta\gamma}{m} \frac{y}{I(r) - (\mu_н - \mu_в) y}. \qquad \text{(VII. 10. 59)}$$

Разделяя переменные, получаем

$$dt = -\frac{m}{k\Delta\gamma}\left[\frac{1}{y} F(r) - (\mu_н - \mu_в)\right] dy, \qquad \text{(VII. 10. 60)}$$

где для краткости обозначено

$$F(r) = (\mu_н \operatorname{ctg} \alpha_1 + \mu_в \operatorname{ctg} \alpha_2)\, r \ln \frac{R_0}{r} + (\mu_н h_н + \mu_в h_в) -$$

$$- r(\mu_н \operatorname{tg} \alpha_1 + \mu_в \operatorname{tg} \alpha_2). \qquad \text{(VII. 10. 61)}$$

Интегрируя (VII. 10. 60), получаем

$$t = \frac{m}{k\Delta\gamma}\left[F(r) \ln \frac{y_0}{y} + (\mu_н - \mu_в)(y - y_0)\right]. \qquad \text{(VII. 10. 62)}$$

Формула (VII. 10. 62) дает закон движения ординаты y границы раздела, находящейся на заданном расстоянии r от оси скважины. По поводу обеих расчетных схем — схемы $k_y = \infty$ и указанной выше схемы течения с жесткими

воображаемыми перегородками — необходимо сделать следующее замечание. Истинное движение, по-видимому, ближе подходит к схеме $k_y = \infty$, в то время как закон движения той или иной точки границы раздела по формуле (VII. 10. 62) может существенно отличаться от действительного. Значение обеих схем для оценки предельных значений сверху и снизу заключается в том, что расчетный объем, пройденный границей раздела за одно и то же время, в схеме $k_y = \infty$ будет заведомо больше действительно пройденного объема, а в схеме жестких трубок или перегородок заведомо меньше. Расчетные объемы в обеих схемах могут быть определены по указанным выше формулам, позволяющим построить конфигурацию границы раздела в любой момент времени при помощи графического, а иногда и аналитического интегрирования. Ряд таких расчетов приведен в работе А. П. Телкова [24]. Эти расчеты показывают, что при обычных средних условиях заметная осадка конуса подошвенной воды происходит за 1—2 года и более.

§ 11. Автомодельные решения задачи о прямолинейном и радиальном вытеснении одной жидкости другой в предельно анизотропном пласте $k_y = \infty$

Уравнение (VII. 10. 10) в общем случае произвольной зависимости суммарного расхода $q(t) \neq 0$, и $\Delta\gamma \neq 0$ является весьма сложным нелинейным уравнением параболического типа, аналитическое решение которого затруднительно. Покажем, что при некоторых частных видах зависимости $q(t)$, $q(t) = A\, t^{-\frac{1}{2}}$ при прямолинейном движении и $q(t) = \text{const}$ при радиальном можно заменой переменных вида $\xi = x^{\alpha}\, t^{\beta}$ уравнение в частных производных свести к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка, которое, вообще говоря, допускает численное интегрирование с любой желаемой степенью точности. Такие решения называются автомодельными и, как правило, представляют большой интерес, так как в дальнейшем могут служить «эталоном» для оценки различных приближенных методов расчета. Автомодельные решения обычно могут быть получены из соображений теории размерностей и подобия, чему посвящена широко известная книга Л. И. Седова [34], содержащая многочисленные примеры применения этого метода к различным задачам механики. Автомодельные решения ряда задач нестационарной фильтрации газов и грунтовых вод были получены Г. И. Баренблаттом [35] и П. Я. Кочиной [Лт. II. 2].

Рассмотрим прямолинейное вытеснение одной жидкости другой в горизонтальном пласте постоянной мощности h (рис. VII. 33). В дальнейшем изложении жидкости будем считать несжимаемыми, пористую среду недеформируемой, движение следующим закону Дарси. Пусть жидкость *1* в своем прямолинейно-поступательном движении вытесняет жидкость *2*.

Тогда, считая напоры равномерно распределенными вдоль вертикали, для вертикальной координаты $y = y(x, t)$ границы раздела из уравнения (VII. 10. 10) получаем

$$-\frac{\mu_0 q}{m}\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{h+(\mu_0-1)\,y}+\frac{k\,\Delta\gamma}{m\,\mu_1}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y(h-y)}{h+(\mu_0-1)\,y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]=\frac{\partial y}{\partial t}, \qquad \text{(VII. 11. 1)}$$

$$\mu_0=\frac{\mu_2}{\mu_1},\ \Delta\gamma=\gamma_1-\gamma_2, \qquad \text{(VII. 11. 2)}$$

причем нижняя жидкость *1* считается более тяжелой, $q = q(t)$ — суммарный объемный расход, равный известному расходу жидкости *1*, закачиваемой в пласт в некотором начальном сечении. Если закачиваемая жидкость *1* более легкая, чем вытесняемая *2*, например, когда закачивается газ в нефтяной или водяной пласт, то, как нетрудно видеть, рис. VII. 33, *а*, где ось y направлена вверх,

должен быть заменен рис. VII. 33, *б*, где ось y направлена вниз, а под $\Delta\gamma$ подразумевается разность объемных весов более тяжелой и легкой жидкостей, т. е. $\gamma_2 - \gamma_1$. При $\Delta\gamma = 0$ получается задача, рассмотренная А. М. Пирвердяном [16].

Введением безразмерных переменных

$$u = \frac{y}{h}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\varkappa t}}, \quad \left(\varkappa = \frac{k\,\Delta\gamma\,h}{m\,\mu_1}\right), \tag{VII. 11. 3}$$

уравнение (VII. 11. 1) приводится к безразмерному виду

$$-\frac{\mu_0 q \sqrt{t}}{mh\sqrt{\varkappa}} \frac{1}{[1+(\mu_0-1)u]^2} \frac{du}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\left[\frac{u(1-u)}{1+(\mu_0-1)u}\frac{du}{d\xi}\right] + \\ + \frac{\xi}{2}\frac{du}{d\xi} = 0. \tag{VII. 11. 4}$$

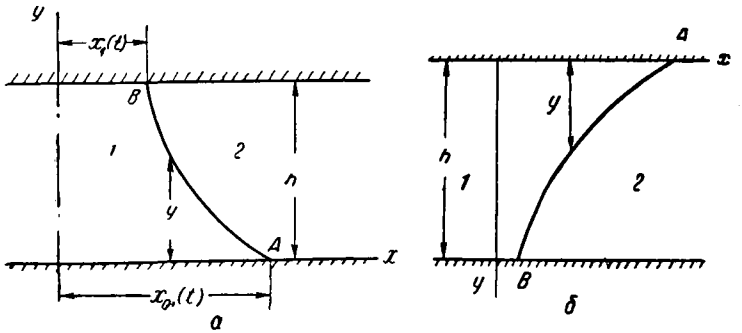


Рис. VII. 33.

Рассмотрим случай, когда расход $q = q(t)$ изменяется по закону

$$q = \frac{q_0 h}{\sqrt{\varkappa t}}, \tag{VII. 11. 5}$$

где q_0 — некоторая постоянная. Тогда (VII. 11. 4) обращается в обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\left\{\frac{\xi}{2} - \frac{a}{[1+(\mu_0-1)u]^2}\right\}\frac{du}{d\xi} + \frac{d}{d\xi}\left[\frac{u(1-u)}{1+(\mu_0-1)u}\frac{du}{d\xi}\right] = 0. \tag{VII. 11. 6}$$

Здесь безразмерный постоянный коэффициент a согласно (VII. 11. 5) имеет вид:

$$a = \frac{\mu_0 q \sqrt{t}}{mh\sqrt{\varkappa}} = \frac{\mu_0 q_0}{m\varkappa}. \tag{VII. 11. 7}$$

Умножим сначала уравнение (VII. 11. 6) на $d\xi$ и проинтегрируем в некоторых пределах от $\xi = \xi_0$ до $\xi = \xi_1$, где ξ_0 и ξ_1 — пока любые величины. Получим

$$\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi_1} \xi \frac{du}{d\xi} d\xi - a\int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{[1+(\mu_0-1)u]^2} + \left[\frac{u(1-u)}{1+(\mu_0-1)u}\frac{du}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_1} - \\ - \left[\frac{u(1-u)}{1+(\mu_0-1)u}\frac{du}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_0} = 0. \tag{VII. 11. 8}$$

Здесь второй интеграл вычисляется в конечном виде, первый интеграл преобразуется интегрированием по частям.

В результате соотношение (VII. 11. 8) можно представить так:

$$\frac{1}{2}(\xi_1 u_1 - \xi_0 u_0) - \frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi_1} u\,d\xi - \frac{a}{\mu_0 - 1}\left[\frac{1}{1+(\mu_0-1)u_0} - \frac{1}{1+(\mu_0-1)u_1}\right] +$$

$$+\left[\frac{u(1-u)}{1+(\mu_0-1)u}\frac{du}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_1} - \left[\frac{u(1-u)}{1+(\mu_0-1)u}\frac{du}{d\xi}\right]_{\xi=\xi_0} = 0, \qquad \text{(VII. 11. 9)}$$

где $u_0 = u(\xi_0)$; $u_1 = u(\xi_1)$.

Пусть теперь ξ_0 и ξ_1 будут безразмерные абсциссы точек A и B пересечения границы раздела (рис. VII. 11. 33, *а*) с подошвой и кровлей в пласте, т. е. согласно (VII. 11. 3) имеем

$$u_0 = u(\xi_0) = 0, \quad u_1 = u(\xi_1) = 1.$$

Тогда из (VII. 11. 9) и (VII. 11. 3), предполагая $u(1-u)\dfrac{du}{d\xi} = 0$ в точках $u = 0$, $u = 1$, получаем

$$\xi_1 + \int_{\xi_1}^{\xi_0} u\,d\xi = \frac{2a}{\mu_0}. \qquad \text{(VII. 11. 10)}$$

Отметим, что бесконечное значение первой производной $u' = du/d\xi = \infty$ согласно уравнениям движения (VII. 10. 7) и (VII. 10. 9) соответствует бесконечной скорости фильтрации и, таким образом, при $t > 0$ исключается из рассмотрения.

Нетрудно показать, что уравнение (VII. 11. 10) есть просто уравнение материального баланса для вошедшей жидкости *1*, когда при $t = 0$ начальная граница раздела является вертикальной плоскостью $x = 0$.

Таким образом, задача сводится к нахождению некоторой интегральной кривой для уравнения (VII. 11. 6), проходящей через неизвестные точки $\xi = \xi_0$, $u = 0$ и $\xi = \xi_1$, $u = 1$ при выполнении условия (VII. 11. 10).

В этих точках можно найти, вообще говоря, производные всех порядков последовательным дифференцированием самого дифференциального уравнения (VII. 11. 6), которое представим в развернутом виде:

$$\frac{u(1-u)u''}{1+(\mu_0-1)u} + \frac{[1+(\mu_0-1)u](1-2u) - (u-u^2)(\mu_0-1)}{[1+(\mu_0-1)u]^2}(u')^2 +$$

$$+\left\{\frac{\xi}{2} - \frac{a}{[1+(\mu_0-1)u]^2}\right\}u' = 0. \qquad \text{(VII. 11. 11)}$$

Из (VII. 11. 11) можно найти первые производные u_0' и u_1' в точках $\xi = \xi_0$, $u = 0$, $\xi = \xi_1$, $u = 1$, считая

$$\xi = \xi_0,\ u = 0,\ \lim(uu'') = 0,\quad \xi = \xi_1\ u = 1,\ \lim(1-u)u'' = 0, \qquad \text{(VII. 11. 12)}$$

$$\xi = \xi_0, \quad u = 0, \quad u_0' = a - \frac{\xi_0}{2}, \qquad \text{(VII. 11. 13)}$$

$$\xi = \xi_1, \quad u = 1, \quad u_1' = \frac{\mu_0\xi_1}{2} - \frac{a}{\mu_0}. \qquad \text{(VII. 11. 14)}$$

Дифференцируя (VII. 11. 11) по ξ для второй производной в точке $\xi=\xi_0$, $u=0$, после упрощений, считая также $\lim(uu''')=0$ при $\xi=\xi_0$, $u=0$, получаем

$$u_0''=(u_0')^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu_0-1}{2}\xi_0 u_0'\right)=\left(a-\frac{\xi_0}{2}\right)\left(a-\frac{\mu_0\xi_0}{2}\right)-\frac{1}{4}. \quad \text{(VII. 11. 15)}$$

Дальнейшее решение задачи можно получить следующим путем. Зная параметры a и μ_0, задаемся некоторым значением $(\xi_0)_1$. Условия (VII. 11. 14) и (VII. 11. 15) позволяют выполнить численное интегрирование уравнения (VII. 11. 6).

После выполнения численного интегрирования нужно по найденному первому приближению $u(\xi)$ вычислить левую часть соотношения (VII. 11. 10):

$$\Phi(\xi_0)=\xi_1+\int_{\xi_1}^{\xi_0} u\,d\xi.$$

Меняя ξ_0, можно добиться выполнения условия (VII. 11. 10). Контролем может служить выполнение уравнения (VII. 11. 14). Зная форму границы раздела, можно легко определить перепад давления между любыми двумя сечениями. Из уравнений движения Дарси для первой и второй жидкостей в каком-либо сечении для производной давления $\frac{\partial p}{\partial x}$ вдоль подошвы получается формула

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{q(t)}{\frac{k}{\mu_1}y+\frac{k}{\mu_2}(h-y)}-\frac{\Delta\gamma(h-y)}{h+(\mu_0-1)y}\frac{\partial y}{\partial x}. \quad \text{(VII. 11. 16)}$$

Пусть начальное сечение будет $x=0$. Тогда, учитывая (VII. 11. 3), (VII. 11. 5), (VII. 11. 7) в зависимости от положения второго сечения, из (VII. 11. 16) получаем (рис. VII. 33, *а*):

при $0<\xi<\xi_1$, $u=1$

$$\delta=\frac{p(0,\,t)-p(x,\,t)}{\Delta\gamma\,h}=\frac{a}{\mu_0}\xi; \quad \text{(VII. 11. 17)}$$

при $\xi_1<\xi<\xi_0$, $0<u<1$

$$\delta=\frac{p(0,\,t)-p(x,\,t)}{\Delta\gamma\,h}=\frac{a}{\mu_0}\left[\xi_1+\mu_0\int_{\xi_1}^{\xi_0}\frac{d\xi}{1+(\mu_0-1)u}\right]-$$

$$-\frac{1}{(\mu_0-1)^2}\left[\mu_0\ln\frac{\mu_0}{1+(\mu_0-1)u}-(\mu_0-1)(1-u)\right]. \quad \text{(VII. 11. 18)}$$

В частности, при $\mu_0=0$, $\xi=\xi_1$ безразмерная потеря давления на напорном участке течения, занятом жидкостью *1*, равна

$$\delta=\frac{a}{\mu_0}\xi_1=\frac{q_0}{m\varkappa}\xi_1. \quad \text{(VII. 11. 19)}$$

Таким образом, зная ξ_0, ξ_1, $u(\xi)$, можно произвести все расчеты. Параметр a для реальных условий, когда условие (VII. 11. 5) в точности не выполняется, можно оценить для заданного интервала времени T по известному на единицу длины галереи суммарному объему закачки жидкости *1* W, условно считая, что за это время $W(t)$ изменялось по закону

$$W(t)=\int_0^t q(t)\,dt=\frac{2q_0h\sqrt{t}}{\sqrt{\varkappa}},\quad W=W(T)\approx\frac{2q_0h\sqrt{T_0}}{\sqrt{\varkappa}}. \quad \text{(VII. 11. 20)}$$

Из (VII. 11. 20) и (VII. 11. 7)

$$q_0=\frac{W\sqrt{\varkappa}}{2h\sqrt{T}},\quad a=\frac{q_0\mu_0}{m\varkappa}=\frac{W\mu_0}{2mh\sqrt{\varkappa T}}=\frac{\mu_0 q^*\sqrt{T}}{2mh\sqrt{\varkappa}},\qquad \text{(VII. 11. 21)}$$

где $q^*=\frac{W}{T}$ — средний по времени расход закачиваемой жидкости I.

Указанный выше метод численного интегрирования уравнения (VII. 11. 6) при соблюдении условия (VII. 11. 10) является, очевидно, весьма трудоемким, так как исходная величина ξ_0 должна определяться подбором.

Ускорение расчетов может быть достигнуто применением современных быстродействующих вычислительных устройств, что было сделано Я. И. Алихашкиным, выполнившим численное решение задачи прямолинейного и радиального вытеснения при помощи вычислительной машины «Стрела» [36].

Представляет, однако, интерес получение хотя бы приближенных аналитических решений, удовлетворяющих требованиям практической точности и достаточным образом определяющих влияние параметров μ_0 и a. Основной практический интерес представляет определение величин ξ_0 и ξ_1, показывающих движение точек A и B (рис. VII. 33) пересечения границы раздела с подошвой и кровлей пласта и характеризующих степень вклинивания одной жидкости в другую. В качестве одного из таких приближенных методов можно предложить метод, приближающийся по идее к методам, применяемым в теории пограничного слоя, в частности к методу интегральных соотношений, развитому Г. И. Баренблаттом для приближенного решения уравнений в частных производных нестационарной фильтрации жидкости и газа [37].

Умножим сначала уравнение (VII. 11. 6) на ξ^n ($n=0, 1, 2,\ldots$) и проинтегрируем в пределах от $\xi=\xi_0$ до $\xi=\xi_1$, соответствующих u_0 и u:

$$\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\xi^{n+1}\frac{du}{d\xi}\,d\xi-a\int_{\xi_0}^{\xi_1}\frac{\xi^n\frac{du}{d\xi}\,d\xi}{[1+(\mu_0-1)u]^2}+\int_{\xi_0}^{\xi_1}\xi^n\times$$

$$\times\frac{d}{d\xi}\left[\frac{u(1-u)}{1+(\mu_0-1)u}\frac{du}{d\xi}\right]d\xi=0. \qquad \text{(VII. 11. 22)}$$

Интегрируя по частям, представим (VII. 11. 22) в таком виде:

$$\frac{1}{2}\left[\xi_1^{n+1}u_1-\xi_0^{n+1}u_0-(n+1)\int_{\xi_0}^{\xi_1}\xi^n u\,d\xi\right]+\frac{a}{\mu_0-1}\left[\frac{\xi_1^n}{1+(\mu_0-1)u_1}-\right.$$

$$-\frac{\xi_0^n}{1+(\mu_0-1)u_0}-n\int_{\xi_0}^{\xi_1}\frac{\xi^{n-1}\,d\xi}{1+(\mu_0-1)u}\Bigg]+\left[\frac{\xi_1^n u_1(1-u_1)u_1'}{1+(\mu_0-1)u_1}-\right.$$

$$\left.-\frac{\xi_0^n u_0(1-u_0)u_0'}{1+(\mu_0-1)u_0}-n\int_{\xi_0}^{\xi_1}\frac{\xi^{n-1}u(1-u)u'}{1+(\mu_0-1)u}\,d\xi\right]=0. \qquad \text{(VII. 11. 23)}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Пусть $u_0=0$, $u_1=1$. Тогда (VII. 11. 23) обращается в следующее уравнение при условии, что $u_0' \neq \infty$, $u_1' \neq \infty$:

$$\frac{1}{2}\left[\xi_1^{n+1}-(n+1)\int_{\xi_0}^{\xi_1}\xi^n u\,d\xi\right]+\frac{a}{\mu_0-1}\left[\frac{\xi_1^n}{\mu_0}-\xi_0^n-n\int_{\xi_0}^{\xi_1}\frac{\xi^{n-1}\,d\xi}{1+(\mu_0-1)\,u}\right]-$$

$$-n\int_{\xi_0}^{\xi_1}\frac{\xi^{n-1}\,u\,(1-u)\,u'}{1+(\mu_0-1)\,u}\,d\xi. \qquad \text{(VII. 11. 24)}$$

Нетрудно видеть, что условие (VII. 11. 10) получается из (VII. 11. 24) при $n=0$. Будем искать теперь решение в виде ряда

$$u(\xi)=\alpha_0+\sum_1^n \alpha_i\varphi_i(\xi), \qquad \text{(VII. 11. 25)}$$

где $\varphi_i(\xi)$ — некоторая линейно независимая система функций, видом которых мы задаемся; α_0, α_i — неопределенные коэффициенты.

Задаваясь n членами ряда и полагая в (VII. 11. 24) последовательно $n=0, 1, 2,\ldots$, получаем $(n+1)$ уравнений для коэффициентов α_0, α_i $(i=1, 2,\ldots n)$, а из условий (VII. 11. 13) и (VII. 11. 14), следующих из самого дифференциального уравнения (VII. 11. 6), получаем еще два уравнения для неизвестных абсцисс ξ_0, ξ_1. Таким образом, может быть составлена замкнутая система уравнений для определения всех неизвестных. При неограниченном возрастании числа членов n ряда (VII. 11. 25) будем, вообще говоря, формально неограниченно приближаться к точному решению.

Для приближенных расчетов с достаточной для практики точностью можно аппроксимировать $u(\xi)$ параболой 2-й или 3-й степени, а иногда даже просто прямой линией и удержать только одно интегральное соотношение $n=0$, т. е. удовлетворить балансу расхода.

Например, можно представить $u(\xi)$ в таком виде:

$$u(\xi)=\alpha_1(\xi-\xi_0)+\alpha_2(\xi-\xi_0)^2, \qquad \text{(VII. 11. 26)}$$

когда $u(\xi_0)=0$, и искать параметры α_1, α_2, ξ_0, ξ_1 из условий (VII. 11. 13) (VII. 11. 14), (VII. 11. 10) и условия $u(\xi_1)=1$. Полином 3-й степени для $u(\xi)$ будет иметь вид:

$$u(\xi)=\alpha_1(\xi-\xi_0)+\alpha_2(\xi-\xi_0)^2+\alpha_3(\xi-\xi_0)^3. \qquad \text{(VII. 11. 27)}$$

Для дополнительного неизвестного коэффициента α_3 может быть использовано условие (VII. 11. 15) или одно интегральное соотношение (VII. 11. 23) для $n=1$. Ограничимся квадратичной параболой (VII. 11. 26). Аппроксимация параболами более высокого порядка была произведена В. Н. Донецким [17], причем были получены результаты, аналогичные приведенным ниже.

Для параметров α_1, α_2, ξ_0, ξ_1 из условий (VII. 11. 13) и (VII. 11. 14) получим

$$u_0'=\alpha_1=a-\frac{1}{2}\xi_0,\quad u_1'=\frac{\mu_0\xi_1}{2}-\frac{a}{\mu_0}=\alpha_1+2\alpha_2(\xi_1-\xi_0). \qquad \text{(VII. 11. 28)}$$

Из (VII. 11. 10)

$$\xi_1=\frac{2a}{\mu_0}+\int_{\xi_0}^{\xi_1}u\,d\xi=\frac{2a}{\mu_0}+\frac{1}{2}\alpha_1(\xi_1-\xi_0)^2+\frac{1}{3}\alpha_2(\xi_1-\xi_0)^3. \qquad \text{(VII. 11. 29)}$$

Из условия $u(\xi_1)=1$ и (VII. 11. 28)

$$1=\alpha_1(\xi_1-\xi_0)+\alpha_2(\xi_1-\xi_0)^2,\quad \alpha_2=\frac{1}{2(\xi_1-\xi_0)}\left[\frac{\mu_0\xi_1+\xi_0}{2}-\frac{a(1+\mu_0)}{\mu_0}\right]. \quad \text{(VII. 11. 30)}$$

Подставляя α_1, α_2 из (VII. 11. 28) в (VII. 11. 29) и (VII. 11. 30), после упрощения получаем два уравнения для ξ_0 и ξ_1:

$$\xi_1=\frac{2a}{\mu_0}+\left[\frac{a}{2}\left(1-\frac{1+\mu_0}{3\mu_0}\right)-\frac{\xi_0}{6}+\frac{\mu_0\xi_1}{12}\right](\xi_1-\xi_0)^2, \quad \text{(VII. 11. 31)}$$

$$1=\left[a\left(1-\frac{1+\mu_0}{2\mu_0}\right)-\frac{\xi_0}{4}+\frac{\mu_0\xi_1}{4}\right](\xi_1-\xi_0). \quad \text{(VII. 11. 32)}$$

Обозначим

$$\xi_1-\xi_0=z,\quad \frac{2a}{\mu_0}=b. \quad \text{(VII. 11. 33)}$$

Тогда $\xi_1=z+\xi_0$ и из (VII. 11. 32) получаем

$$\xi_0=\frac{4}{(\mu_0-1)z}-\frac{\mu_0 z}{\mu_0-1}-\frac{4a}{\mu_0-1}\left(1-\frac{1+\mu_0}{2\mu_0}\right). \quad \text{(VII. 11. 34)}$$

Подставляя это выражение в (VII. 11. 31), получаем

$$\frac{\mu_0}{12}z^4+\frac{b}{12}(\mu_0^2-1)z^3+\frac{1}{3}(\mu_0+1)z^2+2b(\mu_0-1)z-4=0. \quad \text{(VII. 11. 35)}$$

Найдя отсюда z, из (VII. 11. 34) можно вычислить ξ_0. Можно также непосредственно искать ξ_0. Для нахождения ξ_0 предварительно целесообразно уравнения (VII. 11. 37) и (VII. 11. 36) выразить через ξ_0 и z:

$$1=\frac{1}{4}[(\mu_0-1)(b+\xi_0)+\mu_0 z]\,z, \quad \text{(VII. 11. 36)}$$

$$b-\xi_0=z-\frac{1}{12}[b(2\mu_0-1)+(\mu_0-2)\xi_0+\mu_0 z]\,z^2. \quad \text{(VII. 11. 37)}$$

Уравнение (VII. 11. 36) с учетом (VII. 11. 35) может быть заменено следующим:

$$12(b-\xi_0)=8z+(\xi_0-2a)z^2. \quad \text{(VII. 11. 38)}$$

Из (VII. 11. 38) и (VII. 11. 36) можно после некоторых преобразований выразить z через ξ_0:

$$z=\frac{3(\mu_0-1)(b^2-\xi_0^2)-8}{(1+3\mu_0)\xi_0-8a}. \quad \text{(VII. 11. 39)}$$

Подставляя z из (VII. 11. 39) в (VII. 11. 37), после простых, но довольно громоздких алгебраических выкладок получаем уравнение 4-й степени для ξ_0:

$$-3(\mu_0-1)^2\xi_0^4+3b(\mu_0-1)^3\xi_0^3+[3(\mu_0-1)^2(\mu_0+1)b^2-12\mu_0^2-56\mu_0+4]\xi_0^2+$$
$$+[-3(\mu_0-1)^3b^3+(104\mu_0^2+16\mu_0+8)b]\xi_0+$$
$$+[-3\mu_0(\mu_0-1)^2b^4-(80\mu_0^2-16\mu_0)b^2+64\mu_0]=0. \quad \text{(VII. 11. 40)}$$

Найдя из (VII. 11. 40) ξ_0, из (VII. 11. 39) можно вычислить затем z, а из (VII. 11. 33) $\xi_1 = \xi_0 + z$. Выбор нужного корня в этих уравнениях производится из следующих очевидных физических соображений:

1) ξ_0 должно быть положительно ($\xi_0 > 0$), причем должно быть $\xi_0 > \xi_1$, $z < 0$;

2) производные u_0' и u_1' в точках $\xi = \xi_0$, $u = 0$ и $\xi = \xi_1$, $u = 1$ в (VII. 11. 28) при нашем условии $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ должны быть всегда отрицательны;

3) в интервале $\xi_1 < \xi < \xi_0$ должно быть $0 < u < 1$.

Рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $\mu_0 = 0$, $b \neq 0$. Согласно (VII. 11. 19) сохраняется постоянный перепад давления на длине, занятой жидкостью *1*. Учитывая (VII. 11. 33), из (VII. 11. 19) имеем

$$\delta = \frac{1}{2} b \xi_1 = \frac{1}{2} b (z + \xi_0). \qquad \text{(VII. 11. 41)}$$

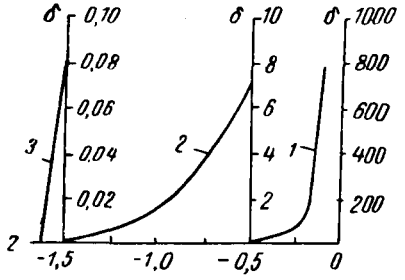


Рис. VII. 34.

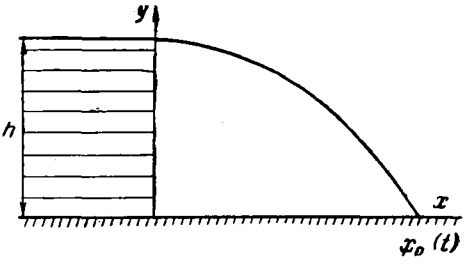


Рис. VII. 35. Схема истечения в сухой грунт.

Если задан параметр b, то ξ_0 и z определяются непосредственно из уравнений (VII. 11. 40) или (VII. 11. 35). Если задан перепад давления и, следовательно, δ, можно по уравнению (VII. 11. 19) построить график $\delta = \delta(b)$ и по известному δ найти нужное значение b.

Можно также решать задачу аналитически, что в точной постановке было выполнено С. Н. Бузиновым [38]. При $\mu_0 = 0$ уравнения (VII. 11. 35) и (VII. 11. 40) принимают следующий вид:

$$-bz^3 + 4z^2 - 24bz - 48 = 0, \qquad \text{(VII. 11. 42)}$$

$$-3\xi_0^3 - 3b\xi_0^2 + (3b^2 + 4)\xi_0 + 3b^3 + 8b = 0. \qquad \text{(VII. 11. 43)}$$

К этим уравнениям добавляется при неизвестном b условие (VII. 11. 41). Отсюда

$$b = \frac{2\delta}{z + \xi_0}. \qquad \text{(VII. 11. 44)}$$

Преобразуем сначала (VII. 11. 34) для $\mu_0 = 0$ и выразим b через z и δ, учитывая согласно (VII. 11. 7) и (VII. 11. 34), что при $\mu_0 = 0$, $a = 0$

$$b = \frac{2a}{\mu_0} = \frac{2q_0}{m\varkappa},$$

$$\xi_0 = -\frac{4}{z} - b, \quad z + \xi_0 = z - \frac{4}{z} - b. \qquad \text{(VII. 11. 45)}$$

Из (VII. 11. 44) имеем $b=\dfrac{2\delta}{z-4/z-b}$. Отсюда

$$b^2-\left(z-\frac{4}{z}\right)b+2\delta=0, \qquad \text{(VII. 11. 46)}$$

$$b=\frac{z}{2}-\frac{2}{z}\pm\sqrt{\left(\frac{z}{2}-\frac{2}{z}\right)^2-2\delta}. \qquad \text{(VII. 11. 47)}$$

Подставляя это значение в (VII. 11. 42), находим

$$2\delta=\left(\frac{z}{2}-\frac{2}{z}\right)^2-\left(\frac{z^3+12z}{2z^2+48}\right)^2. \qquad \text{(VII. 11. 48)}$$

Уравнение (VII. 11. 48) следует решать графически. График нужной области (VII. 11. 48) приведен на рис. VII. 34, причем имеет смысл $z<0$. Таким образом, если задано δ, то из графика (рис. VII. 34) для (VII. 11. 48) сначала следует найти z, а затем из уравнения (VII. 11. 42)

$$b=-\frac{48-4z^2}{24z+z^3}. \qquad \text{(VII. 11. 49)}$$

При $\delta=0$, когда напор в сечении $x=0$ равен глубине h (рис. VII. 35), получаем случай, рассмотренный П. Я. Кочиной [Лт. II. 2] и Г. И. Баренблаттом [35, 37]. Из (VII. 11. 44) имеем

$$z+\xi_0=0, \quad \xi_0=-z; \quad \xi_1=0 \text{ при } \delta=0.$$

Из (VII. 11. 48) будет

$$\pm\frac{z^2-4z}{2z}=\frac{z^3+12z}{2z^2+48}. \qquad \text{(VII. 11. 50)}$$

Отсюда при знаке плюс имеем $z^2=12$, $z=-\sqrt{12}$ и согласно (VII. 11. 49) $b=0$, что не имеет физического смысла.

При знаке минус в левой части (VII. 11. 50) имеем

$$z^2=\pm\sqrt{112}-8=\pm 10{,}583-8.$$

Знак минус перед корнем не годится. При знаке плюс

$$z^2=10{,}583-8=2{,}583, \quad z=-1{,}607, \quad \xi_0=1{,}607,$$

при этом получаем из (VII. 11. 49)

$$b=-\frac{48-4\cdot 2{,}583}{-24\cdot 1{,}607-1{,}607^3}=0{,}882>0,$$

что удовлетворяет условиям задачи.

Точные решения дают $\xi_0=1{,}614$, что очень близко к найденному выше значению $\xi_0=1{,}607$.

Найдем уравнение свободной поверхности для этого случая. Согласно (VII. 11. 26), (VII. 11. 28) и (VII. 11. 31) при $a=0$, $\xi_0=1{,}607$, учитывая (VII. 11. 33), получаем

$$\alpha_1=-\frac{\xi_0}{2}=-\frac{1{,}607}{2}=-0{,}8035,$$

$$\alpha_2=-\frac{1}{2\xi_0}\left(\frac{\xi_0}{2}-\frac{b}{2}\right)=\frac{b}{4\xi_0}-\frac{1}{4}=\frac{0{,}882}{4\cdot 1{,}607}-0{,}25=-0{,}113,$$

$$u(\xi)=-\frac{\xi_0}{2}(\xi-\xi_0)+\frac{1}{4}\left(\frac{b}{\xi_0}-1\right)(\xi-\xi_0)^2=-0{,}8035(\xi-1{,}607)-0{,}113\times$$
$$\times(\xi-1{,}607)^2. \qquad \text{(VII. 11. 51)}$$

При $\delta\gg 1$, $z\ll 1$ приближенно из (VII. II. 48) и (VII. 11. 49)

$$2\delta\approx\frac{4}{z^2},\quad z\approx-\sqrt{\frac{2}{\delta}},\quad b\approx-\frac{2}{z}\approx\sqrt{2\delta}. \qquad \text{(VII. 11. 52)}$$

Из (VII. 11. 45) и (VII. 11. 52)

$$\xi_0\approx-\frac{-4}{\sqrt{\frac{2}{\delta}}}-\sqrt{2\delta}=\sqrt{2\delta}\approx b,\quad \xi_1=\xi_0+z\approx\sqrt{2\delta}-\sqrt{\frac{2}{\delta}}. \qquad \text{(VII. 11. 53)}$$

Таким образом, при большом перепаде давления $\delta\geqslant 5$ граница раздела мало отклоняется от вертикали, что совпадает с результатами С. Н. Бузинова, полученными другим путем.

2. Рассмотрим теперь общий случай $\mu_0\neq 0$, $b\neq 0$, для чего обратимся к уравнениям (VII. 11. 35) и (VII. 11. 40). Эти алгебраические уравнения 4-й степени всегда могут быть решены с любой желаемой степенью точности в каждом конкретном случае при заданных μ_0 и $b=\frac{2a}{\mu_0}$, причем отбор нужных корней производится, как было указано выше для случая $\mu_0=0$. В реальных условиях, как указывалось, величина a может быть оценена из известного объема закачки W за данное время T из уравнения (VII. 11. 21), откуда для b получаем

$$b=\frac{2a}{\mu_0}=\frac{q^*\sqrt{T}}{mh\sqrt{\varkappa}}.$$

Найдем сначала ξ_0 и $z=\xi_1-\xi_0$, не учитывая влияния разности объемных весов $\Delta\gamma=\gamma_1-\gamma_2$ на процесс вытеснения. Этот случай может считаться достаточно исследованным [15, 16]. Как было показано в § 7, при этом скорость точки A границы раздела вдоль подошвы (рис. VII. 33, *а*) в μ_0 раз больше средней скорости, а точки B вдоль кровли в μ_0 раз меньше.

Таким образом, без учета влияния из уравнения (VII. 11. 5) получаем (рис. VII. 33, *а*)

$$m\frac{dx_0}{dt}=\mu_0\frac{q(t)}{h}=\mu_0\frac{q_0}{\sqrt{\varkappa t}},\quad m\frac{dx_1}{dt}=\frac{1}{\mu_0}\frac{q(t)}{h}=\frac{1}{\mu_0}\frac{q_0}{\sqrt{\varkappa t}},$$
$$x_0=\frac{2\mu_0 q_0\sqrt{t}}{m\sqrt{\varkappa}},\quad x_1=\frac{1}{\mu_0}\frac{2q_0\sqrt{t}}{m\sqrt{\varkappa}}. \qquad \text{(VII. 11. 54)}$$

Отсюда согласно (VII. 11. 3), учитывая (VII. 11. 7) и (VII. 11. 33), имеем

$$\xi_0=\frac{x_0(t)}{\sqrt{\varkappa t}}=\frac{2\mu_0 q_0}{m\varkappa}=2a=b\mu_0,$$

$$\xi_1=\frac{x_1(t)}{\sqrt{\varkappa t}}=\frac{1}{\mu_0}\frac{2q_0}{m\varkappa}=\frac{2a}{\mu_0^2}=\frac{b}{\mu_0},\quad z=\xi_1-\xi_0=-b\left(\mu_0-\frac{1}{\mu_0}\right). \qquad \text{(VII. 11. 55)}$$

Сравним ξ_0 и z, получающиеся из (VII. 11. 35) и (VII. 11. 40) при учете $\Delta\gamma$, с их значениями по формулам (VII. 11. 55), в которых $\Delta\gamma$ не учитывается.

Для этого уравнения (VII. 11. 40) и (VII. 11. 35) представим в следующем виде для решения их итерационным методом:

$$\xi_0 = b(\mu_0 - 1) + \frac{3(\mu_0-1)^2(\mu_0+1)b^2 - 12\mu_0^2 - 55\mu_0 + 4}{3(\mu_0-1)^2}\frac{1}{\xi_0} + \\ + \frac{-3(\mu_0-1)^3 b^3 + (104\mu_0^2 + 16\mu_0 + 8)b}{3(\mu_0-1)^2}\frac{1}{\xi_0^2} + \\ + \frac{-3\mu_0(\mu_0-1)^2 b^4 - (80\mu_0^2 - 16\mu_0)b^2 + 64\mu_0}{3(\mu_0-1)^2}\frac{1}{\xi_0^3}, \qquad \text{(VII. 11. 56)}$$

$$z = -b\frac{\mu_0^2-1}{\mu_0} - \frac{4(\mu_0+1)}{\mu_0}\frac{1}{z} - \frac{24b(\mu_0-1)}{\mu_0}\frac{1}{z^2} + \frac{48}{\mu_0}\frac{1}{z^3}. \qquad \text{(VII. 11. 57)}$$

Для решения уравнений (VII. 11. 56) и (VII. 11. 57) методом итераций подставим в их правые части значения (VII. 11. 55), которые будем рассматривать как нулевые приближения:

$$(\xi_0)_0 = b\mu_0, \quad z_0 = -b\left(\mu_0 - \frac{1}{\mu_0}\right) = -b\frac{\mu_0^2-1}{\mu_0}.$$

Для уравнения (VII. 11. 56) получим

$$(\xi_0)_1 = b(\mu_0-1) + \frac{3(\mu_0-1)^2(\mu_0+1)b^2 - 12\mu_0^2 - 56\mu_0 + 4}{3(\mu_0-1)^2}\frac{1}{b\mu_0} + \\ + \frac{-3(\mu_0-1)^3 b^3 + (104\mu_0^2 + 16\mu_0 + 8)b}{3(\mu_0-1)^2}\frac{1}{b^2\mu_0^2} + \\ + \frac{-3\mu_0(\mu_0-1)^2 b^4 - (80\mu_0^2 - 16\mu_0)b^2 + 64\mu_0}{3(\mu_0-1)^2}\frac{1}{b^3\mu_0^3} = \\ = b\mu_0 - \frac{1}{b\mu_0}\left[\frac{4\mu_0(\mu_0-4)}{(\mu_0-1)^2} + \frac{20}{(\mu_0-1)^2} - \frac{8}{3(\mu_0-1)^2\mu_0}\left(3 + \frac{8}{b^2}\right)\right]. \qquad \text{(VII. 11. 58)}$$

При $\mu_0 > 1$ и достаточно большом значении b

$$(\xi_0)_1 \approx (\xi_0)_0 = b\mu_0 = 2a.$$

Этому соответствует следующий физический смысл: при $\mu_0 > 1$, как указывалось в § 7, частицы жидкости *1*, попав в зону движения жидкости *2*, где градиент давления в μ_0 раз больше, соответственно убыстряются. Если при этом закачиваемый расход достаточно велик, закачка идет в быстром темпе, то вклинивание жидкости *1*, обусловленное гравитационными силами, будет весьма незначительным по сравнению с вклиниванием, обусловленным непосредственным вытеснением.

Аналогично для уравнения (VII. 11. 57)

$$z_1 = -b\frac{\mu_0^2-1}{\mu_0} + \frac{4(\mu_0+1)}{\mu_0}\frac{\mu_0}{b(\mu_0^2-1)} - \frac{24b(\mu_0-1)}{\mu_0}\frac{\mu_0^2}{b^2(\mu_0^2-1)} + \\ + \frac{48}{\mu_0}\frac{\mu_0^3}{b^3(\mu_0^2-1)^3} = -b\frac{\mu_0^2-1}{\mu_0} + \frac{4}{b(\mu_0-1)} - \frac{24\mu_0}{b(\mu_0^2-1)(\mu_0+1)} + \\ + \frac{48\mu_0^2}{b^3(\mu_0^2-1)^3}, \qquad \text{(VII. 11. 59)}$$

т. е. $z_1 \approx z_0$ при достаточно большом значении b $\mu_0 = 2a$ и $\mu_0 > 1$. Отсюда следует важный практический вывод, что при $\mu_0 > 1$ и достаточном темпе закачки характер вытеснения определяется только различием вязкостей. Различие плотностей в этом случае почти не оказывает влияния. Этот вывод полностью согласуется с результатами Я. И. Алихашкина. В табл. 1 и 2 [36] приведены значения ξ_0 и ξ_1, полученные в результате численного интегрирования уравнения (VII. 11. 11) на машине «Стрела» для разных a и μ_0 при $\Delta\gamma \neq 0$. Эти значения в таблице обозначены ξ^0, ξ^1 и могут рассматриваться как точные. Для сопоставления рядом приведены значения ξ_0, ξ_1, вычисленные для условия $\Delta\gamma = 0$, т. е. одинаковых плотностей. Эти значения обозначены ξ_0^*, ξ_1^*.

Таблица 1

	$a=0{,}00$			$a=0{,}50$			$a=2{,}5$			$a=5{,}0$		
μ_0	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*
1,0	1,00	—1,00	0,00	2,00	—0,00	1,00	6,00	4,00	5,00	11,00	9,00	10,00
2,5	0,87	—0,69	0,00	1,56	—0,44	0,16	5,14	0,39	0,80	10,07	1,31	1,62
5,0	0,76	—0,51	0,00	1,34	—0,42	0,04	5,05	—0,15	0,20	10,02	0,12	0,40
10,0	0,64	—0,37	0,00	1,19	—0,34	0,01	5,03	—0,25	0,05	10,01	—0,16	0,10
50,0	0,40	—0,17	0,00	1,06	—0,17	0,00	5,01	—0,16	0,00	10,00	—0,15	0,00
70,0	0,36	—0,15	0,00	1,05	—0,15	0,00	5,01	—0,14	0,00	10,00	—0,13	0,00
100,0	0,32	—0,12	0,00	1,05	—0,13	0,00	5,01	—0,12	0,00	10,00	—0,11	0,00
ξ_0^*	0,00			1,00			5,00			10,00		

Таблица 2

	$a=10$			$a=25$			$a=50$			$a=500$		
μ_0	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*
1,0	21,00	19,00	20,00	51,00	49,00	50,00	101,0	99,00	100,0	1001	999,0	1000
2,5	20,03	3,02	3,20	51,01	7,92	8,00	100,0	15,95	16,00	1000	160,0	160,0
5,0	20,01	0,59	0,80	50,00	1,89	2,00	100,0	3,94	4,00	1000	39,99	40,0
10,0	20,00	—0,02	0,20	50,00	0,35	0,50	100,0	0,91	1,00	1000	9,99	10,0
50,0	20,00	—0,14	0,01	50,00	—0,11	0,02	100,0	—0,07	0,04	1000	0,36	0,40
70,0	20,00	—0,12	0,00	50,00	—0,10	0,01	100,0	—0,08	0,02	1000	0,16	0,20
100,0	20,00	—0,11	0,00	50,00	—0,10	0,00	100,0	—0,08	0,01	1000	0,05	0,10
ξ_0^*	20,00			50,00			100,0			1000		

Из табл. 1 и 2 наглядно следует, что практически при $\mu_0 \geqslant 2{,}5$, $a \geqslant 2{,}5$, гравитационный эффект при вычислении ξ_0 не играет роли. При $a < 2{,}5$ гравитационным эффектом пренебрегать нельзя. Графики зависимости $u(\xi)$ для разных μ_0 и a приведены в статье [36].

Выше было показано, что аппроксимация границы раздела кривыми типа парабол дает достаточно близкие результаты к некоторым известным точным решениям.

Представляет интерес оценка точности более грубой аппроксимации границы раздела в виде прямой линии.

Вместо (VII. 11. 26) будем искать уравнение границы раздела в виде линейной зависимости

$$u = \alpha_1 (\xi - \xi_0) \qquad \text{(VII. 11. 60)}$$

и искать параметры α_1, ξ_0, ξ_1 из условий (VII. 11. 10) баланса расходов и одного из уравнений (VII. 11. 13) или (VII. 11. 14) для касательной в точке $\xi = \xi_0$, $u = 0$ или $\xi = \xi_1$, $u = 1$ и условия $u(\xi_1) = 1$.

Учитывая (VII. 11. 33), из (VII. 11. 10) получаем

$$\frac{2a}{\mu_0} = b = \xi_1 - \int_{\xi_0}^{\xi_1} u d\xi = \xi_1 - \int_{\xi_0}^{\xi_1} \alpha_1 (\xi - \xi_0)\, d\xi = \xi_1 - \frac{\alpha_1}{2} (\xi_1 - \xi_0)^2. \qquad \text{(VII. 11. 61)}$$

В зависимости от того, движение какой точки нас интересует, выбираем уравнение (VII. 11. 13) или (VII. 11. 14). Предположим, что нас интересует сначала движение точки $\xi = \xi_0$, $u = 0$ (точка A, рис. VII. 33, a).

Тогда берем уравнение (VII. 11. 13)

$$u_0' = a - \frac{1}{2} \xi_0 = \alpha_1. \qquad \text{(VII. 11. 62)}$$

К уравнениям (VII. 11. 61) и (VII. 11. 62) добавляется условие

$$u(\xi_1) = \alpha_1 (\xi_1 - \xi_0) = 1. \qquad \text{(VII. 11. 63)}$$

Из системы (VII. 11. 61), (VII. 11. 62) и (VII. 11. 63) можно найти α_1, ξ_0, ξ_1. Получим для ξ_0 квадратное уравнение

$$\xi_1 = 2b - \xi_0, \quad \xi_0^2 - b(1 + \mu_0)\xi_0 + b^2 \mu_0 - 1 = 0. \qquad \text{(VII. 11. 64)}$$

Отсюда

$$\xi_0 = \frac{(1 + \mu_0) b}{2} \pm \sqrt{\frac{(1 - \mu_0)^2 b^2}{4} + 1}. \qquad \text{(VII. 11. 65)}$$

Здесь нужно выбрать знак плюс, так как иначе при $\mu_0 = 0$ получим $\xi_0 < 0$, что не имеет смысла. Таким образом,

$$\xi_0 = \frac{(1 + \mu_0) b}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \mu_0)^2 b^2 + 4}. \qquad \text{(VII. 11. 66)}$$

При $(1 - \mu_0)^2 b^2 \gg 4$ из (VII. 11. 66) получим

$$\xi_0 \approx \frac{(1 + \mu_0) b}{2} + \frac{1}{2} \left[|1 - \mu_0| b + \frac{4}{2 |1 - \mu_0| b} \right] =$$

$$= \frac{(1 + \mu_0) b}{2} + \frac{b}{2} |1 - \mu_0| + \frac{1}{(1 - \mu_0) b}. \qquad \text{(VII. 11. 67)}$$

При $\mu_0 > 1$

$$\xi_0 \approx \frac{(1 + \mu_0) b}{2} + \frac{(\mu_0 - 1) b}{2} + \frac{1}{(\mu_0 - 1) b} = \mu_0 b + \frac{1}{(\mu_0 - 1) b}. \qquad \text{(VII. 11. 68)}$$

При достаточно большом b, т. е. при достаточном темпе закачки, отсюда получаем согласие с формулой (VII. 11. 58), выведенной из параболической аппроксимации. При $\mu_0 < 1$

$$\xi_0 \approx \frac{(1 + \mu_0) b}{2} + \frac{(1 - \mu_0) b}{2} + \frac{1}{(1 - \mu_0) b} = b + \frac{1}{(1 - \mu_0) b}. \qquad \text{(VII. 11. 69)}$$

При достаточно большом b отсюда следует согласие с формулой (VII. 11. 53). Интересно отметить, что формулы (VII. 11. 68) и (VII. 11. 69) отчетливо выявляют эффект разности объемных весов в отличие от формул (VII. 11. 58) и (VII. 11. 59), где он несколько завуалирован. Если разность объемных весов не учитывать, то получилось бы $\xi_0 = \mu_0 b = 2a$ при $\mu_0 > 1$ и $\xi_0 = b$ при $\mu_0 < 1$. Формулы (VII. 11. 68) и (VII. 11. 69) показывают, что эффект сил Архимеда сказывается в дополнительном возрастании ξ_0 тем меньше, чем больше μ_0 и b. Практически при $\mu_0 \geqslant 2$, $b \geqslant 5$, как указывалось выше, этот эффект почти не играет роли.

Таким образом, грубая аппроксимация границы раздела прямой линией дает довольно правильные результаты для движения одной из граничных точек — той, которая взята за основную при составлении исходной системы уравнений.

Для дополнительной оценки рассмотрим случай $\mu_0 = 0$. Из (VII. 11. 64) и (VII. 11. 66) имеем

$$\xi_1 = \frac{3}{2} b - \frac{1}{2} \sqrt{b^2+4}. \qquad \text{(VII. 11. 70)}$$

Из формулы (VII. 11. 19) получаем

$$\delta = \frac{a\xi_1}{\mu_0} = \frac{b\xi_1}{2} = \frac{1}{4}(3b^2 - b\sqrt{b^2+4}). \qquad \text{(VII. 11. 71)}$$

Для случая $\delta = 0$ — фиксированного уровня в безнапорном бассейне — из (VII. 11. 71) будет

$$3b - \sqrt{b^2+4} = 0, \quad b^2 = 0{,}5, \quad b = 0{,}709 \qquad \text{(VII. 11. 72)}$$

вместо $b = 0{,}882$ для параболической аппроксимации (VII. 11. 49), т. е. почти на 20% меньше. При $b = 0{,}709$ для ξ_0 согласно (VII. 11. 66), где полагаем $\mu_0 = 0$

$$\xi_0 = \frac{1}{2} b + \frac{1}{2}\sqrt{b^2+4} = \frac{0{,}709}{2} + \frac{\sqrt{4{,}5}}{2} = 1{,}414 = \sqrt{2} \qquad \text{(VII. 11. 73)}$$

вместо точного значения $\xi_0 = 1{,}614$, т. е. на 12% меньше.

Возьмем теперь за опорную точку $\xi = \xi_1$, $u = 1$ и вместо уравнения (VII. 11. 62) уравнение (VII. 11. 14):

$$u_1' = \frac{\mu_0 \xi_1}{2} - \frac{a}{\mu_0} = \frac{1}{2}(\mu_0 \xi_1 - b) = \alpha_1. \qquad \text{(VII. 11. 74)}$$

Из уравнений (VII. 11. 61), (VII. 11. 63) и (VII. 11. 74) получаем для ξ_1 квадратное уравнение

$$\xi_0 = 2a - \xi_1, \quad \xi_1^2 - \frac{(1+\mu_0)b}{\mu_0}\xi_1 + \frac{b^2-1}{\mu_0} = 0. \qquad \text{(VII. 11. 75)}$$

Отсюда

$$\xi_1 = \frac{(1+\mu_0)b}{2\mu_0} \pm \frac{1}{2\mu_0}\sqrt{(1-\mu_0)^2 b^2 + 4\mu_0}. \qquad \text{(VII. 11. 76)}$$

При $(1-\mu_0)^2 b^2 \gg 4\mu_0$ из (VII. 11. 76) получаем

$$\xi_1 = \frac{(1+\mu_0)b}{2\mu_0} \pm \frac{1}{2\mu_0}\left[|1-\mu_0| b \pm \frac{2}{|1-\mu_0| b}\right] =$$

$$= \frac{(1+\mu_0)b}{2\mu_0} \pm \frac{|1-\mu_0| b}{2\mu_0} \pm \frac{1}{|1-\mu_0| b}. \qquad \text{(VII. 11. 77)}$$

В (VII. 11. 76) и (VII. 11. 77) нужно выбрать знак минус, так как при знаке плюс получается $\xi_1 > b$, что невозможно.

Таким образом,

$$\xi_1 = \frac{(1+\mu_0)\,b}{2\mu_0} - \frac{1}{2\mu_0}\sqrt{(1-\mu_0)^2 b^2 + 4\mu_0}\,. \qquad \text{(VII. 11. 78)}$$

Следовательно, при $(1-\mu_0)^2 b^2 \gg 4\mu_0$ имеем

$$\xi_1 \approx \frac{(1+\mu_0)\,b}{2\mu_0} - \frac{|1-\mu_0|\,b}{2\mu_0} - \frac{1}{|1-\mu_0|\,b} \qquad \text{(VII. 11. 79)}$$

При $\mu_0 > 1$ из (VII. 11. 79) имеем

$$\xi_1 \approx \frac{(1+\mu_0)\,b}{2\mu_0} - \frac{(\mu_0-1)\,b}{2\mu_0} - \frac{1}{(\mu_0-1)\,b} = \frac{b}{\mu_0} - \frac{1}{(\mu_0-1)\,b}\,, \qquad \text{(VII. 11. 80)}$$

что достаточно близко при $b \gg 1$ к (VII. 11. 55) и (VII. 11. 59).

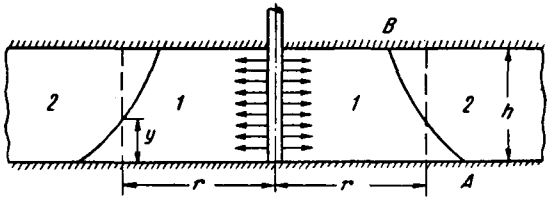


Рис. VII. 36.

При $\mu_0 < 1$

$$\xi_1 = \frac{(1+\mu_0)\,b}{2\mu_0} - \frac{(1-\mu_0)\,b}{2\mu_0} - \frac{1}{(1-\mu_0)\,b} = b - \frac{1}{(1-\mu_0)\,b}\,, \qquad \text{(VII. 11. 81)}$$

что также достаточно близко согласуется с (VII. 11. 55) и (VII. 11. 59). Таким образом, весьма грубая аппроксимация границы раздела прямой линией при заданном b, т. е. заданном темпе закачки, дает весьма хорошие результаты для движения точек границы раздела вдоль подошвы и кровли пласта.

Я. И. Алихашкин показал, что при $\mu_0 = 1$ — вытеснение жидкостей различной плотности, но одинаковой вязкости, например пресной воды соленой, — граница раздела в точности есть прямая

$$u = \frac{1}{2}\,\xi + a + \frac{1}{2}\,, \quad \xi_0 = 2a + 1, \quad \xi_1 = 2a - 1. \qquad \text{(VII. 11. 82)}$$

Легко проверить, что (VII. 11. 82) точно удовлетворяет дифференциальному уравнению (VII. 11. 6) и условиям (VII. 11. 10), (VII. 11. 13) и (VII. 11. 14).

Вполне аналогичным образом может быть рассмотрена задача о радиальном вытеснении. Пусть жидкость *1* нагнетается в скважину и вытесняет радиальным образом жидкость *2*, ранее находившуюся в пласте (рис. VII. 36).

Предполагая, как и выше, давления распределенными гидростатически вдоль вертикали, для ординаты $y\,(r,\ t)$ границы раздела получим из уравнений движения и неразрывности для скважины-источника

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[ry\,\frac{-\mu_2 Q\,(t)/2\pi\,rk + \Delta\gamma\,(h-y)\,\partial y/\partial r}{h+(\mu_0-1)\,y}\right] = \frac{m\mu_1}{k}\,r\,\frac{\partial y}{\partial t}\,, \qquad \text{(VII. 11. 83)}$$

где $Q(t)$ — дебит нагнетаемой жидкости в скважину, согласно несжимаемости жидкостей равный суммарному расходу в любом цилидрическом сечении (рис. VII. 36) радиусом r.

Замена переменных x на r в (VII. 11. 3) приводит уравнение (VII. 11. 83) к следующему безразмерному виду:

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{-Au}{1+(\mu_0-1)u}+\frac{u(1-u)}{1+(\mu_0-1)u}\xi\frac{du}{d\xi}\right]=-\frac{\xi^2}{2}\frac{du}{d\xi},$$

$$\frac{\mu_2 Q(t)}{2\pi k\Delta\gamma h^2}=A. \qquad \text{(VII. 11. 84)}$$

В отличие от уравнения (VII. 11. 4) для прямолинейного движения уравнение (VII. 11. 84) обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение при $Q(t)=Q=\text{const}$, что и будем предполагать в дальнейшем.

Умножая (VII. 11. 84) на $d\xi$ и интегрируя в некоторых пределах от $\xi=\xi_0$, $u(\xi_0)=u_0$ до $\xi=\xi_1$, $u(\xi_1)=u_1$, получаем

$$\left[\frac{Au}{1+(\mu_0-1)u}\right]_{u=u_0}-\left[\frac{Au}{1+(\mu_0-1)u}\right]_{u=u_1}+\left[\frac{\xi u(1-u)}{1+(\mu_0-1)u}\frac{du}{d\xi}\right]_{\substack{\xi=\xi_1\\u=u_1}}-$$

$$-\left[\frac{\xi u(1-u)}{1+(\mu_0-1)n}\frac{du}{d\xi}\right]_{\substack{\xi=\xi_0\\u=u_0}}+\frac{1}{2}\int_{\xi_0}^{\xi_1}\xi^2\frac{du}{d\xi}d\xi=0. \qquad \text{(VII. 11. 85)}$$

Полагаем, как и раньше, $u(\xi_0)=u_0=0$, $u(\xi_1)=u_1=1$. Считая $\frac{du}{d\xi}\neq\infty$ в точках ξ_1, $u_1=1$ и ξ_0, $u_0=0$ и интегрируя по частям, будем иметь

$$\frac{A}{\mu_0}=\frac{\xi_1^2}{2}-\int_{\xi_0}^{\xi_1}\xi\,u\,d\xi. \qquad \text{(VII. 11. 86)}$$

Нетрудно видеть, что (VII. 11. 86) выражает аналогично (VII. 11. 10) баланс расходов. Раскрывая (VII. 11. 86) и предполагая, как и в (VII. 11. 12), $u(1-u)u''=0$ в точках $\xi=\xi_0$, $u=0$, $\xi=\xi_1$, $u=1$, получаем для первых производных

$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)_{\substack{\xi=\xi_0\\u=0}}=u_0'=\frac{A}{\xi_0}-\frac{\xi_0}{2},\quad \left(\frac{du}{d\xi}\right)_{\substack{\xi=\xi_1\\u=1}}=u_1'=\frac{\mu_0\xi_1}{2}-\frac{A}{\mu_0\xi_1}. \qquad \text{(VII. 11. 87)}$$

Дифференцируя (VII. 11. 84) по ξ и предполагая $uu'''=0$ в точке $\xi=\xi_0$, $u=0$, получаем для второй производной

$$\left(\frac{d^2u}{d\xi^2}\right)_{\substack{\xi=\xi_0\\u=0}}=u_0''=\frac{\xi_0^2-2A}{2\xi_0^2}\left(1-A+\frac{\xi_0^2\mu_0}{2}\right)-\frac{1}{2}. \qquad \text{(VII. 11. 88)}$$

Решение для случая радиального вытеснения принципиально ничем не отличается от рассмотренного выше случая прямолинейного вытеснения.

Ограничимся простейшей аппроксимацией границы раздела в виде прямой, дающей, как было показано выше для прямолинейного вытеснения, удовлетворительную практическую точность при расчете движения граничных точек вдоль кровли и подошвы пласта. Аналогично (VII. 11. 60) полагаем

$$u(\xi)=a_1(\xi-\xi_0). \qquad \text{(VII. 11. 89)}$$

Определим ξ_0, для чего воспользуемся первым уравнением (VII. 11. 87) и соотношением (VII. 11. 86). Получим

$$\alpha_1 = \frac{A}{\xi_0} - \frac{\xi_0}{2}, \tag{VII. 11. 90}$$

$$\frac{A}{\mu_0} = \frac{\xi_1^2}{2} - \int_{\xi_0}^{\xi_1} \alpha_1 \xi (\xi - \xi_0)\, d\xi = \frac{\xi_1^2}{2} - \alpha_1 \left[\frac{\xi_1^3 - \xi_0^3}{3} - \frac{\xi_0}{2}(\xi_1^2 - \xi_0^2) \right], \tag{VII. 11. 91}$$

$$1 = \alpha_1 (\xi_1 - \xi_0). \tag{VII. 11. 92}$$

Отсюда будем иметь для ξ_0^2 кубичное уравнение

$$v^3 - \left(4A + \frac{2A}{\mu_0} + 2\right) v^2 + \left(4A^2 + \frac{8A^2}{\mu_0} + 4A + \frac{4}{3}\right) v - \frac{8A^3}{\mu_0} = 0,$$

$$v = \xi_0^2. \tag{VII. 11. 93}$$

Для решения методом итераций представим (VII. 11. 93) так:

$$v = \left(4A + \frac{2A}{\mu_0} + 2\right) - \left(4A^2 + \frac{8A^2}{\mu_0} + 4A + \frac{4}{3}\right) \frac{1}{v} + \frac{8A^3}{\mu_0} \frac{1}{v^2}. \tag{VII. 11. 94}$$

Нетрудно показать, что если не учитывать разность объемных весов, то

$$v = \xi_0^2 = 2A. \tag{VII. 11. 95}$$

Подставим это значение в правую часть (7. 11. 94), рассматривая (VII. 11. 95) как нулевое приближение $v_0 = 2A$:

$$v_1 = \left(4A + \frac{2A}{\mu_0} + 2\right) - \left(2A + \frac{4A}{\mu_0} + 2 + \frac{2}{3A}\right) + \frac{2A}{\mu_0} = 2A - \frac{2}{3A}. \tag{7. 11. 96}$$

Из (VII. 11. 96) следует, что при достаточном значении параметра $2A$ корень (VII. 11. 93) весьма близок к этому значению. Таким образом, при $A \geqslant 5$ и $\mu_0 > 1$ гравитационный эффект можно не учитывать. Этот вывод также согласуется с результатами Я. И. Алихашкина [36]. В табл. 3, 4 приведены

Таблица 3

μ_0	$A = 1{,}0$			$A = 2{,}5$			$A = 5{,}0$			$A = 10$		
	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*
1,0	2,10	0,73	1,41	2,94	1,53	2,24	3,87	2,45	3,16	5,17	3,76	4,47
2,5	1,76	0,20	0,56	2,50	0,56	0,90	3,37	0,97	1,26	4,62	1,54	1,79
5,0	1,60	0,04	0,28	2,36	0,21	0,45	3,25	0,42	0,63	4,53	0,71	0,90
10,0	1,51	0,00	0,14	2,29	0,05	0,22	3,21	0,16	0,32	4,50	0,30	0,45
50,0	1,44	0,00	0,03	2,25	0,00	0,04	3,18	0,00	0,06	4,48	0,02	0,09
70,0	1,44	0,00	0,02	2,25	0,00	0,03	3,17	0,00	0,04	4,48	0,00	0,06
100,0	1,44	0,00	0,01	2,25	0,00	0,02	3,17	0,00	0,03	4,47	0,00	0,04
ξ_0^*	1,41			2,24			3,16			4,47		

значения ξ_0 и ξ_1, полученные в результате численного интегрирования уравнения (VII. 11. 84) на машине «Стрела» для радиального вытеснения и разных значений A и μ_0 при $\Delta\gamma \neq 0$. Эти значения, которые следует рассматривать как точные, обозначены ξ^0 и ξ^1. Рядом приведены значения ξ_0, ξ_1, вычисленные для условия $\Delta\gamma = 0$ и обозначенные $\xi_0^* = \sqrt{2A}$ и $\xi_1^* = \frac{\sqrt{2A}}{\mu_0}$.

Таблица 4

$A=25$				$A=50$			$A=100$			$A=500$		
μ^0	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*	ξ^0	ξ^1	ξ_1^*
1,0	7,78	6,36	7,07	10,70	9,29	10,00	14,85	13,43	14,14	32,30	30,31	31,62
2,5	7,17	2,64	2,83	10,06	3,85	4,00	14,18	5,55	5,66	31,64	12,60	12.64
5,0	7,11	1,27	1,41	10,03	1,89	2,00	14,16	2,75	2,83	31,63	6,28	6,32
10,0	7,09	0,59	0,71	10,01	0,91	1,00	14,15	1,35	0,14	31,62	3,12	3,16
50,0	7,08	0,07	0,14	10,00	0,14	0,20	14,14	0,23	0,28	31,62	0,60	0,63
70,0	7,08	0,04	0,10	10,00	0,09	0,14	14,14	0,16	0,20	31,62	0,42	0,45
100,0	7,07	0,02	0,07	10,00	0,05	0,10	14,14	0,10	0,14	31,62	0,29	0,31
ξ_0^*	7,07			10,00			14,14			31,62		

Как и выше для случая прямолинейного вытеснения, из табл. 3 и 4 видно, что при достаточном темпе нагнетания, например $A \geqslant 5$, $\mu_0 \geqslant 5$ гравитационный эффект для ξ_0 практически отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. ГОНТИ, 1945.

2. Пирвердян А. М. Нефтяная подземная гидравлика. Азнефтеиздат, 1956.

3. Галин Л. А. *Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью.* Докл. АН СССР, т. 47, № 4, 1945.

4. Куфарев П. П., Виноградов Ю. П. О некоторых частных решениях задачи фильтрации. Докл. АН СССР, т. 57, № 4, 1947.

5. Куфарев П. П. Решение задачи о контуре нефтеносности для полосы с цепочной скважиной. Докл. АН СССР, т. 75, № 3, 1950.

6. Куфарев П. П. Задача о контуре нефтеносности, для круга при любом числе скважин. Докл. АН СССР, т. 75, № 4, 1950.

7. Данилов В. Л. Краевые задачи гидродинамической теории фильтрации и гидродинамики с подвижной границей. Казан. гос. университет, 1962.

8. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела жидкостей в пористой среде. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, вып. 11, 1957.

9. Данилов В. Л. Движение границы раздела вязких жидкостей в узкой щели и моделирование перемещения контура нефтеносности. Всесоюзный съезд по теор. и прикл. механ. Аннотации докладов. Изд. АН СССР, 1960.

10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1953.

11. Тумашев Г. Г. К задаче стягивания контура нефтеносности. Ученые записки Казанского университета. Сб. работ НИИМИ им. Н. Г. Чеботарева, т. 113, кн. 10, 1953.

12. Власов А. М. К расчету движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изд-во АН СССР, Инженерный журнал, т. II, № 3, 1962.
13. Данилов В. Л., Скворцов В. В. Решение одной задачи о стягивании контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Изв. Казанского филиала АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, вып. 13, 1959.
14. Полубаринова-Кочина П. Я., Шкирич А. Р. К вопросу о перемещении контура нефтеносности. Изв. АН СССР, ОТН, № 11, 1954.
15. Чарный И. А. Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах. Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1954.
16. Пирвердян А. М. О движении подошвенной воды в слабо наклоненных пластах. Прикл. матем. и механ., т. XVI, вып. 2, 1952.
17. Донецкий В. Н. Некоторые задачи нестационарной фильтрации однородных и неоднородных жидкостей. Диссертация. ВНИИнефтегаз, 1960.
18. Фаткуллин А. Х. ВНИИнефтегаз, Исследование влияния силы тяжести на процесс вытеснения нефти водой, Диссертация, 1962.
19. Тейлор Дж. И. Поверхность раздела между вязкими жидкостями в узких щелях. Сб. АН СССР к 70-летию акад. Н. И. Мусхелишвили, 1961.
20. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. Proc. Roy. Soc., A-245, No. 1242, 1958, pp. 312—329.
21. Чарный И. А. О предельных дебитах и депрессиях в водоплавающих и подгазовых нефтяных месторождениях. Труды совещания по развитию научно-исследовательских работ в области вторичных методов добычи нефти. Изд. АН Азерб. ССР, Баку, 1953.
22. Чарный И. А. Об одном интегральном соотношении теории фильтрации и его некоторых приложениях. Материалы межвузовского совещания по вопросам новой техники в нефтяной промышленности. Гостоптехиздат, 1958.
23. Эфрос Д. А., Куранов И. Ф. Плоская задача о поднятии подошвенной воды. Сб. «Вопросы гидродинамики нефтяного пласта», вып. IV, Труды ВНИИнефтегаза, Гостоптехиздат, 1954.
24. Телков А. П. Некоторые задачи движения и равновесия границы раздела двух жидкостей в пористой среде, Диссертация, МИНХ и ГП, 1962.
25. Холин А. И., Султанов С. А. Образуются ли конусы обводнения при эксплуатации скважин? Нефт. хоз., № 6, 1957.
26. Эфрос Д. А., Аллахвердиева Р. А. Расчет дебитов скважин, расположенных в водо-нефтяной зоне, и определение анизотропии пласта по промысловым данным. ВНИИ, НТС, вып. 4, 1959.
27. Чарный И. А., Евдокимова В. А., Кочина И. Н. Увеличение предельного безводного дебита несовершенной скважины в нефтяном пласте с подошвенной водой за счет раздельного отбора воды и нефти. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, № 2, 1958.
28. Софронов С. В., Аллахвердиева Р. А. Экспериментальные исследования совместного притока нефти и воды к несовершенным скважинам. Труды ВНИИ, вып. X, 1957.
29. Курбанов А. К. Особенности эксплуатации подгазовых нефтяных залежей. Диссертация, МИНХ и ГП, 1958.
30. Курбанов А. К., Фаткуллин А. Х. О фильтрации двухжидкостной смеси. Сиб. отд. АН СССР, Прикл. механ. и техн. физ., № 1, 1962.
31. Карслоу Х. Г. Теория теплопроводности. Пер. с англ. Гостехиздат, 1947.
32. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, 1949.
33. Чарный И. А. Гидродинамические принципы создания подземных газохранилищ в горизонтальных и пологопадающих водоносных пластах. Материалы межвузовской научной конференции по вопросам газовой промышленности. Гостоптехиздат, 1960.
34. Седов Л. И. Методы подобия и размерностей в механике. Гостехтеориздат, 1957.

35. Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости в пористой среде. Прикл. матем. и механ., т. XVI, вып. 2, 1952.

36. Алихашкин Я. И. Численное интегрирование уравнений автомодельного движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1961.

37. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1954.

38. Бузинов С. Н. Теоретические и экспериментальные исследования движения двухфазной системы жидкостей в пористой среде. Диссертация. МИНХ и ГП, 1958.

39. Карпычев В. А. О перемещении водо-нефтяного контакта в пластах с подошвенной водой. Ин-т механики АН СССР, Инженерный сборник, т. XXV, 1959.

40. Карпычев В. А. О конусе подошвенной воды в двухслойном пласте. Изд-во АН СССР. Инженерный журнал, т. II, вып. 4, 1962.

ГЛАВА VIII

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

§ 1. Уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. Влияние неподвижных газовых включений на приведенный модуль упругости пластовой системы

Рассмотрим фильтрацию упругой капельной жидкости. Полагая проницаемость и вязкость постоянными $k = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ и пренебрегая массовыми силами согласно (II. 2. 19), имеем основное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial (m\gamma)}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \nabla^2 P, \qquad \text{(VIII. 1. 1)}$$

где $P = \int \gamma(p)\, dp$ — функция Л. С. Лейбензона.

Предположим, что жидкость следует закону Гука

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dp}{K_ж},$$

где $K_ж$ — модуль объемной упругости — обычно очень большое число. Для воды $K_ж \approx 2 \cdot 10^4$ *кГ/см*^{2}, для нефтей $K_ж \approx 1{,}6 \cdot 10^4 \div 2 \cdot 10^4$ *кГ/см*^{2}.

Считая $K_ж$ достаточно большим, уравнение состояния можно записать теперь в виде

$$\gamma = \gamma_0 e^{\frac{p-p_0}{K_ж}} \approx \gamma_0 \left(1 + \frac{p-p_0}{K_ж}\right), \qquad \text{(VIII. 1. 2)}$$

где γ_0 — объемный вес жидкости при некотором давлении p_0, за которое обычно принимается начальное статическое давление.

Подставляя (VIII. 1. 2) в (VIII. 1. 1) и учитывая (VIII. 1. 2), получаем

$$P = \int \gamma(p)\, dp = \gamma_0 K_ж e^{\frac{p-p_0}{K_ж}} + \text{const} = K_ж \gamma + \text{const} \approx$$
$$\approx K_ж \gamma_0 + \gamma_0 (p - p_0) + \text{const} = \gamma_0 p + \text{const}_1. \qquad \text{(VIII. 1. 3)}$$

Изменение пористости m обычно считается пропорциональным изменению давления [1]:

$$m - m_0 = \frac{p - p_0}{K_c}, \qquad \text{(VIII. 1. 4)}$$

где K_c — модуль упругости пористой среды; m_0 — пористость при давлении p_0.

Из (VIII. 1. 2) и (VIII. 1. 4) имеем

$$m\gamma = \left(m_0 + \frac{p - p_0}{K_c}\right)\gamma_0\left(1 + \frac{p - p_0}{K_ж}\right) = m_0\gamma_0\left[1 + (p - p_0) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{K_ж} + \frac{1}{m_0 K_c}\right) + \frac{(p - p_0)^2}{m_0 K_c K_ж}\right] \approx m_0\gamma_0\left[1 + (p - p_0) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{K_ж} + \frac{1}{m_0 K_c}\right)\right], \qquad \text{(VIII. 1. 5)}$$

откуда

$$\frac{m\gamma - m_0\gamma_0}{m_0\gamma_0} = \frac{p - p_0}{K}, \qquad \text{(VIII. 1. 6)}$$

где введено обозначение

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_ж} + \frac{1}{m_0 K_c}$$

или

$$K = \frac{K_ж}{1 + K_ж / m_0 K_c}, \qquad \text{(VIII. 1. 7)}$$

приведенный модуль упругости жидкости в упругой пористой среде. Очевидно, что он всегда меньше модуля упругости жидкости $K_ж$.

Подставляя (VIII. 1. 6) и (VIII. 1. 3) в (VIII. 1. 1), получаем уравнение типа теплопроводности

$$\varkappa \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \varkappa = \frac{kK}{m_0\mu}. \qquad \text{(VIII. 1. 8)}$$

Величина $\varkappa$ — аналог коэффициента температуропроводности, p — аналог температуры. По предложению В. Н. Щелкачева $\varkappa$ называется коэффициентом пьезопроводности.

Маскет, Шилсуиз и Херст дали в 30-х годах вывод уравнения (VIII. 1. 8) в предположении постоянной пористости $m = \text{const}$. В этом случае (VIII. 1. 1) принимает вид:

$$m\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{k}{\mu}\nabla^2 P. \qquad \text{(VIII. 1. 9)}$$

Из (VIII. 1. 2) и (VIII. 1. 9) следует, что

$$P = K_ж\gamma, \quad \nabla^2 P = K_ж \nabla^2 \gamma,$$

откуда

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{kK_{ж}}{m\mu} \nabla^2 \gamma \qquad \text{(VIII. 1. 10)}$$

или

$$\varkappa = \frac{kK_{ж}}{m\mu} . \qquad \text{(VIII. 1. 11)}$$

Предположение m = const приводит к необходимости значительного снижения $K_{ж}$ для согласования с экспериментальными данными [2], относящимися в первую очередь к известному нефтяному месторождению Вудбайн.

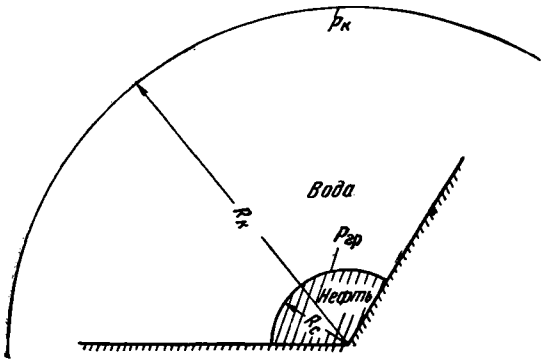


Рис. VIII. 1а. Схема нефтяного месторождения в Вудбайне.

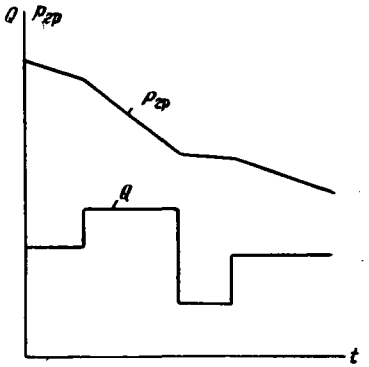


Рис. VIII. 1б. График зависимости дебита и пластового давления на границе раздела от времени.

Это месторождение, находящееся в Восточном Техасе, в плане можно рассматривать как сектор с углом раствора около 120° . Нефтяная часть граничит с огромной массой воды, как показано схематично на рис. VIII, 1а. Нефтяная часть была хорошо разбурена, и было отобрано много жидкости — нефти и воды. На протяжении нескольких лет измеряли давление $p_{гр}$ на границе раздела вода — нефть и получили кривую изменения $p_{гр}$ в зависимости от времени t (рис. VIII. 1б).

Затем строили другую кривую — дебит всей отобранной жидкости за тот же период времени. Пластовое давление было выше давления насыщения и, следовательно, весь газ был растворен и в пласте свободного газа не было. Режим месторождения, таким образом, типично водонапорный.

Если бы вода была абсолютно жесткой, несжимаемой, то связь между дебитом и давлением $p_{гр}$ определялась бы формулой вида формулы Дюпюи, так как нефтяной пласт можно рассматривать схематично в виде огромной скважины в окружающем водоносном пласте радиусом $R_с$ (рис. VIII. 1).

Однако характер связи между давлением на водоразделе $p_{гр}$ и отбором жидкости заставил предположить, что здесь имеются проявления упругих свойств окружающей массы воды.

Это явление можно исследовать, решив дифференциальное уравнение упругого режима (VIII. 1. 8) при начальном условии $t = 0$, $p = p_0$.

Согласно этому условию до начала разработки первоначальное пластовое давление всюду одинаковое. Граничные условия имеют следующий вид: на контуре «скважины» $r = R_c$ — радиусу «скважины», т. е. месторождение рассматривается как укрупненная скважина радиусом порядка 40 *км*, задан дебит жидкости в функции времени $Q = Q(t)$.

На контуре питания $R_к$ известно давление $p_к$. Решение этой задачи в результате интегрирования уравнения (VIII. 1. 8) позволило найти давление в любой точке пласта в любой момент времени $p = p(r, t)$, следовательно, и на водоразделе при $r = R_c$. Вычисленное американскими авторами давление без учета упругости пористой среды было сопоставлено с фактически наблюденным [Лт. I.11]. Расчетная и фактическая кривые пластового давления хорошо совпали в предположении, что модуль объемного сжатия жидкости в пласте Вудбайн равен 2000 *ат*, примерно в 10 раз меньше модуля упругости обычной воды.

Маскет, Шилсуиз и Херст [Лт. I. 11] предложили объяснить эту разницу вероятным наличием небольших газовых включений, которые могли быть расположены на огромной водоносной площади. Достаточно было предположить, что около 5% пор водяного пласта занято газом, чтобы эффект упругости жидкости стал в 10 раз меньше. Газ таким образом, играет ту же роль, что и воздух в воздушном колпаке поршневого насоса, — является амортизатором. Другое объяснение кажущейся сверхсжимаемости пластовой воды в Вудбайне, основанное на совместном учете упругости пластовой жидкости и самого пласта, было предложено Джейкобом [3] и В. Н. Щелкачевым [1].

Джейкоб рассмотрел схематичную, но физически вполне обоснованную картину сил, действующих на продуктивную зону пласта со стороны содержащейся в нем жидкости и вышележащих горных пород, и получил для неустановившегося плоско-радиального притока упругой жидкости к скважине уравнение, совпадающее по виду с (VIII. 1. 8) и содержащее постоянный коэффициент, в котором учтены одновременно упругие свойства жидкости и пористой среды, но в несколько другой форме, нежели в (VIII. 1. 8). В. Н. Щелкачев предложил в виде исходной зависимости линейную форму связи пористости с давлением (VIII. 1. 4) и основанный на ней вывод уравнений (VIII. 1. 7) и (VIII. 1. 8) [4]. В более поздних работах В. Н. Щелкачева, обобщенных в книге [25], содержится наряду с обширной библиографией подробное обсуждение ряда вопросов и материалов,

связанных с разработкой пласта Вудбайн, в том числе и соображений Джейкоба.

Вывод уравнения (VIII. 1. 8), предложенный Джейкобом, представляет несомненный интерес ввиду своей физической наглядности. В связи с тем, что, насколько известно, в нашей литературе этот вывод до сего времени не приводился, ниже он кратко дается в своей основной части с некоторыми не меняющими существа дела изменениями.

Рассмотрим продуктивный пласт мощностью h_0, насыщенный жидкостью с статическим давлением p_0.

В статическом состоянии горное давление, определяемое весом вышележащих горных пород, уравновешивается реакцией твердого скелета продуктивного пласта и давлением пластовой жидкости. Горное давление, на больших глубинах залегания можно считать постоянным и не зависящим от нагрузки на дневной поверхности, которая может быть переменной вследствие разных причин, например при возведении различных сооружений, перевозке тяжелых грузов автомобильным и железнодорожным транспортом и т. д.

Считая горное давление постоянным, мы приходим к выводу, что изменения пластового давления dp, возникающие при откачке или закачке жидкости, должны вызывать соответствующие изменения $d\sigma_z$ напряжения сжатия σ_z в твердом скелете грунта. Связь между dp и $d\sigma_z$ можно представить в виде

$$d\sigma_z = -\alpha\, dp, \qquad \text{(VIII. 1. 12)}$$

где α — некоторый коэффициент, зависящий от геометрии контакта твердых зерен с кровлей, пористости, механических характеристик кровли, которая, конечно, не является абсолютно жесткой недеформируемой поверхностью, и т. д.

Величина $d\sigma_z$ в свою очередь связана с изменением dh текущей мощности пласта h соотношением

$$-\frac{dh}{h} = \frac{d\sigma_z}{E_{\text{ск}}}, \qquad \text{(VIII. 1. 13)}$$

где $E_{\text{ск}}$ — модуль упругости твердого скелета. Величины α и $E_{\text{ск}}$ зависят от ряда факторов: структуры и механических характеристик твердого скелета, формы и характера упаковки твердых частиц, слагающих скелет, и т. д. Постоянство величины $E_{\text{ск}}$ в некотором диапазоне изменения напряжения сжатия σ_z соответствует линейному закону Гука для твердого скелета, что мы и примем в дальнейшем, хотя имеется ряд указаний как о нелинейном, так и необратимом характере упругих деформаций пласта. Последнее обстоятельство подробно исследовано в работе Г. И. Баренблатта и А. П. Крылова [5], содержащей весьма полный анализ напряжений и деформаций насыщенной жидкостью пористой среды под действием внешних

нагрузок и давления жидкости. Учитывая (VIII. 1. 12), $\frac{dh}{h}$ теперь можно представить в виде

$$\frac{dh}{h} = \frac{\alpha\, dp}{E_{\text{ск}}} = \frac{dp}{E_1}, \qquad \text{(VIII. 1. 14)}$$

где

$$E_1 = \frac{1}{\alpha} E_{\text{ск}}. \qquad \text{(VIII. 1. 15)}$$

Модуль упругости E_1, связывающий изменение мощности с изменением давления, таким образом, является величиной, характерной для каждого конкретного пласта и условий его работы.

Отправляясь от формулы (VIII. 1. 14), дальнейший учет упругости пласта и его влияния на распределение давления при фильтрации упругой жидкости можно выполнить следующим образом.

Выделим в пласте мощностью h столбик пористой среды с площадью, равной единице. В этом столбике объемом $V = h \cdot 1 = h$ одну часть $mV = mh$ занимает жидкость, а другую часть $V_{\text{т}} = (1 - m)h$ — твердый скелет пласта. При повышении давления жидкости на dp твердый скелет незначительно сожмется, чем сам Джейкоб пренебрегает. Можно не пренебрегать этим обстоятельством и учесть изменение объема твердого скелета формулой

$$-\frac{dV_{\text{т}}}{V_{\text{т}}} = \frac{dp}{E_2}, \qquad \text{(VIII. 1. 16)}$$

где E_2 — объемный модуль упругости твердого скелета. Так как $V_{\text{т}} = (1 - m)h$, то, логарифмируя и дифференцируя, получаем

$$\frac{dV_{\text{т}}}{V_{\text{т}}} = -\frac{dm}{1-m} + \frac{dh}{h}$$

или, учитывая (VIII. 1. 16) и (VIII. 1. 14),

$$-\frac{dp}{E_2} = -\frac{dm}{1-m} + \frac{dp}{E_1},$$

откуда

$$\frac{dm}{dp} = (1 - m)\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right). \qquad \text{(VIII. 1. 17)}$$

Правая часть (VIII. 1. 17) есть параметр $\frac{1}{K_{\text{с}}}$, введенный В. Н. Щелкачевым:

$$(1 - m)\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) = \frac{1}{K_{\text{с}}}. \qquad \text{(VIII. 1. 18)}$$

Полагая $K_{\text{с}}$ постоянным, приходим к формуле (VIII. 1. 4)

$$m - m_0 = \frac{p - p_0}{K_{\text{с}}},$$

а затем, как показано было выше, к уравнениям (VIII. 1. 7) и (VIII . 1. 8).

Отметим, что рассуждения Джейкоба в своей основной части являются развитием представлений о так называемом грузовом режиме работы нефтяных и газовых месторождений, высказывавшихся ранее И. Н. Стрижовым.

Рассмотрим теперь вопрос о влиянии неподвижных газовых включений на величину приведенного модуля упругости K и коэффициента пьезопроводности $\varkappa$. Обозначим газонасыщенность, т. е. часть объема пор, занятую газом, через σ. Тогда нетрудно показать при помощи уравнений неразрывности и движения, что для давления жидкости вместо (VIII. 1. 1) теперь будет

$$\frac{\partial [m\gamma(1-\sigma)]}{\partial t} = \frac{k_{ж}}{\mu_{ж}} \nabla^2 p \approx \frac{\gamma_0 k_{ж}}{\mu_{ж}} \nabla^2 p, \qquad \text{(VIII. 1. 19)}$$

где $k_{ж}$ — фазовая проницаемость жидкости в присутствии неподвижного газа; $\mu_{ж}$ — вязкость жидкости. В главе IX будет показано, что $k_{ж}$ значительно (примерно на 30—35%) ниже проницаемости k пористой среды, занятой однородной жидкостью. Формулу (VIII. 1. 19) целесообразно представить в виде

$$\frac{d[m\gamma(1-\sigma)]}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\gamma_0 k_{ж}}{\mu_{ж}} \nabla^2 p,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \left(\frac{\gamma_0 k_{ж}}{\mu_{ж}} \Big/ \frac{d[m\gamma(1-\sigma)]}{dp} \right) \nabla^2 p = \varkappa \nabla^2 p, \qquad \text{(VIII. 1. 20)}$$

где обозначено

$$\frac{\gamma_0 k_{ж}}{\mu_{ж}} \Big/ \frac{d[m\gamma(1-\sigma)]}{dp} = \varkappa. \qquad \text{(VIII. 1. 21)}$$

Далее, учитывая (VIII. 1. 6), имеем

$$\frac{d[m\gamma(1-\sigma)]}{dp} = (1-\sigma)\frac{d(m\gamma)}{dp} - m\gamma\frac{d\sigma}{dp} =$$

$$= (1-\sigma)\frac{m_0\gamma_0}{K} - m\gamma\frac{d\sigma}{dp}. \qquad \text{(VIII. 1. 22)}$$

Производная $d\sigma/dp$ в предположении, что газ неподвижен, может быть найдена следующим образом. Обозначим $V_г$ объем газа в столбике пористой среды мощностью h с поперечным сечением, равным единице. Очевидно, $V_г = m\,\sigma\,h$.

Так как по условию газ неподвижен, то его вес в объеме $V_г$ не изменяется. Отсюда, считая режим изотермическим, согласно закону Бойля—Мариотта имеем

$$m\sigma hp = \text{const}. \qquad \text{(VIII. 1. 23)}$$

Логарифмируя и дифференцируя последнее равенство, получаем

$$\frac{dm}{m} + \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{dh}{h} + \frac{dp}{p} = 0,$$

откуда

$$-\frac{d\sigma}{dp}=\sigma\left(\frac{1}{m}\frac{dm}{dp}+\frac{1}{h}\frac{dh}{dp}+\frac{1}{p}\right) \qquad \text{(VIII. 1. 24)}$$

или, учитывая (VIII. 1. 14) и (VIII. 1. 4),

$$-\frac{d\sigma}{dp}=\sigma\left(\frac{1}{m}\frac{1}{K_c}+\frac{1}{E_1}+\frac{1}{p}\right). \qquad \text{(VIII. 1. 25)}$$

Таким образом, согласно (VIII. 1. 22), учитывая (VIII. 1. 7),

$$\frac{d[m\gamma(1-\sigma)]}{dp}=(1-\sigma)\frac{m_0\gamma_0}{K}+m\gamma\sigma\left(\frac{1}{mK_c}+\frac{1}{E_1}+\frac{1}{p}\right)=$$

$$=\frac{m_0\gamma_0}{K}-m_0\gamma_0\sigma\left(\frac{1}{mK_c}+\frac{1}{K_ж}\right)+m\gamma\sigma\left(\frac{1}{mK_c}+\frac{1}{E_1}+\frac{1}{p}\right)\approx$$

$$\approx m_0\gamma_0\left(\frac{1}{K}-\frac{\sigma}{K_ж}+\frac{\sigma}{E_1}+\frac{\sigma}{p}\right)=\frac{m_0\gamma_0}{K'}, \qquad \text{(VIII. 1. 26)}$$

где

$$\frac{1}{K'}=\frac{1}{K}-\frac{\sigma}{K_ж}+\frac{\sigma}{E_1}+\frac{\sigma}{p}=\frac{1}{mK_c}+\frac{1-\sigma}{K_ж}+\frac{\sigma}{E_1}+\frac{\sigma}{p}; \qquad \text{(VIII. 1. 27)}$$

K' — приведенный модуль упругости пластовой системы с включениями неподвижного газа.

Согласно (VIII. 1. 21) теперь для $\varkappa$ получим

$$\varkappa=\frac{\gamma_0 k_ж}{\mu_ж}\frac{K'}{m_0\gamma_0}=\frac{k_ж K'}{m_0\mu_ж}. \qquad \text{(VIII. 1. 28)}$$

Так как обычно по порядку величин K, $K_ж$, E_1 в сотни раз больше p, то из (VIII. 1. 27) следует,что при весьма малых σ величина K' может оказаться значительно (в несколько раз и более) меньше K.

Поскольку модули упругости пористой среды обычно выше или того же порядка, что и модуль упругости пластовой жидкости $K_ж$, приведенный модуль упругости K в формуле (VIII. 1. 7) оказывается меньше модуля упругости жидкости $K_ж$ примерно в 2—5 раз.

Для условий Вудбайна, как упоминалось, оказалось $K\approx 0{,}1K_ж$, т. е. кажущаяся сверхсжимаемость пластовой воды в Вудбайне более чем в 2 раза превосходит вероятное значение этой величины. Поэтому нельзя считать исключенным присутствие газовых включений в данном случае, хотя, по всей вероятности, они занимают значительно меньше 5% объема пор, указанных в свое время американскими авторами.

Вообще же K или K' и $\varkappa$ следует рассматривать как физические характеристики данного пласта или района пласта и определять их из наблюдаемой связи между отбором или закачкой жидкости и пластовым давлением.

§ 2. Вывод формул для притока упругой жидкости к прямолинейной галерее и к точечному источнику на плоскости

Перейдем к нахождению решения основного уравнения фильтрации упругой жидкости (VIII. 1. 8). В случае ограниченной области решение обычно находят методом Фурье, т. е. решение ищется в виде произведения независимых функций $p = X(x)\,Y(y)\;\;Z\;(z)\;\;T\;(t)$ с последующей суперпозицией частных решений для удовлетворения начальным и граничным условиям. Ряд решений для ограниченного пласта приведен в [Лт. I. 11; 6, 7]. Для бесконечного пласта можно поступить иначе.

Приводимый ниже вывод формул (VIII. 2. 31) и (VIII. 2. 60) для притока упругой жидкости к прямолинейной галерее и к точечному источнику на плоскости несколько отличается от обычного, даваемого в курсах математического анализа и в руководствах по теории теплопроводности.

Интегрирование дифференциальных уравнений в частых производных, к которым принадлежит уравнение (VIII. 1. 8) упругого режима фильтрации, является, как правило, более сложной задачей по сравнению с интегрированием обыкновенных дифференциальных уравнений. В уравнениях с частными производными искомая функция зависит от нескольких аргументов, в то время как в обыкновенных дифференциальных уравнениях она зависит только от одного аргумента. Как правило, проще найти функцию, зависящую от одного переменного, чем от нескольких.

В связи с этим возникает естественная мысль попытаться ввести некоторое новое независимое переменное $\xi = \xi(x, y, z, t)$ таким образом, чтобы уравнение в частных производных

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) \qquad \text{(VIII. 2. 1)}$$

обратилось в обыкновенное дифференциальное уравнение, где искомая функция — давление p — зависела бы только от этого одного нового аргумента ξ.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что, например, для одномерного движения $p = p(x, t)$ при $\xi = x\,t^{-\frac{1}{2}}$ формула (VIII. 2. 1) обратится в обыкновенное дифференциальное уравнение.

Вывод этой подстановки в руководствах или не дается (читателю предлагается непосредственно убедиться в ее правильности) или дается весьма сложным путем. Относительно проще выводы, основанные на соображениях теорий размерности [Лт. VII. 10, 35].

Из соображений методического характера, а также по существу, целесообразно изложить последовательно замену переменных x, y, z, t в формуле (VIII. 2. 1) одной переменной ξ, после чего станет

ясно, как следует выбрать ξ, чтобы формула (VIII. 2. 1) перешла в обыкновенное дифференциальное уравнение.

Для этого заменим переменные в уравнении (VIII. 2. 1), не делая пока никаких предположений о характере зависимости $\xi = \xi(x, y, z, t)$.

Начнем с одномерного прямолинейного движения — притока к галерее (рис. VIII. 2), когда движение зависит только от одной координаты x и времени t, $p = p(x, t)$. Уравнение (VIII. 2. 1) принимает вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}. \qquad \text{(VIII. 2. 2)}$$

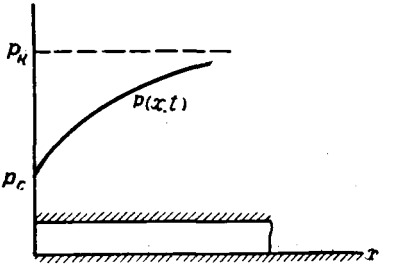


Рис. VIII. 2. Распределение давления в пласте при нестационарном притоке к прямолинейной галерее.

Новое переменное ξ также будет функцией x и t: $\xi = \xi(x)$.

По правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}. \qquad \text{(VIII. 2. 3)}$$

Выразим теперь вторую производную $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ через новую переменную:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

По правилам дифференцирования произведения получаем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dp}{d\xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Множитель в первом члене $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dp}{d\xi}\right)$ преобразуем по правилу дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dp}{d\xi}\right) = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{dp}{d\xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{d^2 p}{d\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Таким образом, для $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ окончательно имеем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{d^2 p}{d\xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad \text{(VIII. 2. 4)}$$

и уравнение (VIII. 2. 2) упругого режима согласно уравнениям (VIII. 2. 3) и (VIII. 2. 4) принимает вид:

$$\frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varkappa\left[\frac{d^2 p}{d\xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right]. \qquad \text{(VIII. 2. 5)}$$

Посмотрим теперь, нельзя ли так подобрать зависимость $\xi = \xi(x, t)$, на выбор которой пока не наложено никаких ограничений, чтобы уравнение (VIII. 2. 5) обратилось в обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от одного аргумента ξ.

Для этого будем искать $\xi(x, t)$ в виде произведения двух функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$\xi(x, t) = X(x)\,T(t), \qquad \text{(VIII. 2. 6)}$$

каждая из которых зависит только от одного аргумента — соответственно x и t.

Тогда

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = X'T, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = X''T, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = XT'. \qquad \text{(VIII. 2. 7)}$$

Подставим эти значения в уравнение (VIII. 2. 5):

$$\frac{dp}{d\xi} XT' = \varkappa\left(\frac{d^2p}{d\xi^2} X'^2T^2 + \frac{dp}{d\xi} X''T\right)$$

или

$$\frac{dp}{d\xi}\frac{XT'}{T^2} = \varkappa\left(\frac{d^2p}{d\xi^2} X'^2 + \frac{dp}{d\xi}\frac{X''}{T}\right). \qquad \text{(VIII. 2. 8)}$$

Но из уравнения (VIII. 2. 6)

$$X = \frac{\xi}{T}. \qquad \text{(VIII. 2. 9)}$$

Уравнение (VIII. 2. 8), таким образом, можно еще представить так:

$$\frac{dp}{d\xi}\,\xi\,\frac{T'}{T^3} = \varkappa\left(\frac{d^2p}{d\xi^2} X'^2 + \frac{dp}{d\xi}\frac{X''}{T}\right). \qquad \text{(VIII. 2. 10)}$$

Теперь ясно, как следует выбрать функции $X(x)$ и $T(t)$ (пока произвольные), чтобы уравнение (VIII. 2. 10) обратилось в обыкновенное дифференциальное уравнение от одного аргумента ξ: очевидно, коэффициенты при производных должны быть постоянными или явно зависеть только от одного аргумента ξ, но не от старых переменных x и t. Это достигается при

$$X' = a, \quad \frac{T'}{T^3} = b, \qquad \text{(VIII. 2. 11)}$$

где a и b — постоянные.

Из первого уравнения (VIII. 2. 11) следует

$$X = ax + C_1, \quad X'' = 0, \qquad \text{(VIII. 2. 12)}$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Интегрируя второе уравнение (VIII. 2. 11), получаем

$$\frac{1}{T^3}\frac{dT}{dt} = b,$$

откуда

$$b\,dt = \frac{dT}{T^3}, \quad bt = -\frac{1}{2T^2} + C_2,$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Отсюда получаем

$$T = 2\,(C_2 - bt)^{-\frac{1}{2}}. \qquad \text{(VIII. 2. 13)}$$

Чтобы T принимало любые вещественные значения при $t > 0$, следует положить $C_2 = 0$ и потребовать, чтобы b было отрицательно. Для простоты без нарушения общности можно положить $b = -\frac{1}{2}$. Тогда полагая также в уравнении (VIII. 2. 12) для простоты $a = 1$, $C_1 = 0$, получаем

$$X = x, \quad T = t^{-\frac{1}{2}}, \quad \xi = xt^{-\frac{1}{2}}. \qquad \text{(VIII. 2. 14)}$$

К такому же результату можно было бы прийти, полагая $\xi = x^\alpha t^\beta$ и отыскивая α, β, при которых (VIII. 2. 5) обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение. Мы получили бы, как нетрудно видеть, условие вида

$$x^{2-\alpha} t^{-(1+\beta)} = f(\xi) = f(x^\alpha t^\beta).$$

Чтобы это условие удовлетворялось, следует положить

$$2 - \alpha = k\alpha, \quad -(1+\beta) = k\beta, \qquad \text{(VIII. 2. 15)}$$

откуда

$$x^{2-\alpha} t^{-(1+\beta)} = \xi^k, \qquad \text{(VIII. 2. 16)}$$

где k — некоторая постоянная.

Из (VIII. 2. 15) получаем

$$\alpha = \frac{2}{1+k}, \quad \beta = -\frac{1}{1+k},$$

т. е.

$$\alpha = -2\beta.$$

Без нарушения общности можно теперь положить $\alpha = 1$, откуда $\beta = -\frac{1}{2}$.

Уравнение (VIII. 2. 10) при таком выборе переменных при условии, что $\frac{T'}{T^3} = b = -\frac{1}{2}$, обращается в следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-\frac{1}{2}\xi\frac{dp}{d\xi} = \varkappa\frac{d^2p}{d\xi^2}, \qquad \text{(VIII. 2. 17)}$$

которое легко интегрируется. Для этого обозначим

$$\frac{dp}{d\xi} = U(\xi). \qquad \text{(VIII. 2. 18)}$$

Тогда уравнение (VIII. 2. 17) примет вид:

$$-\frac{1}{2}\xi U = \varkappa \frac{dU}{d\xi},$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{2\varkappa}\xi\, d\xi = \frac{dU}{U},$$

$$-\frac{\xi^2}{4\varkappa} = \ln U - \ln c_1 = \ln \frac{U}{c_1}, \qquad \text{(VIII. 2. 19)}$$

где $\ln c_1$ — постоянная интегрирования.

Потенциируя и учитывая уравнение (VIII. 2. 18), будем иметь

$$U = \frac{dp}{d\xi} = c_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{4\varkappa}\xi^2}. \qquad \text{(VIII. 2. 20)}$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$p = c_1 \int \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa}} d\xi + c_2 = p(\xi) = p(x, t). \qquad \text{(VIII. 2. 21)}$$

Постоянные c_1 и c_2 должны быть определены из начальных и граничных условий, которым должны соответствовать два значения ξ.

Пусть в нашей задаче задан скачок давления в сечении $x = 0$ (галерея) с начального пластового $p_к$ до давления в галерее $p_с$, которое поддерживается постоянным. Таким образом, начальные и граничные условия следующие:

$$t = 0,\ p(x, 0) = p_к = \text{const}, \qquad \text{(VIII. 2. 22)}$$

$$x = 0,\ p(0, t) = p_с = \text{const}. \qquad \text{(VIII. 2. 23)}$$

Согласно уравнению (VIII. 2. 14) $\xi = \infty$ при $t = 0$, $\xi = 0$ при $x = 0$. Тогда из решения уравнения (VIII. 2. 21) получим два уравнения для c_1 и c_2. Сначала напишем условие для $p_к$:

$$p_к = c_1 \left(\int \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa}} d\xi \right)_{\xi=\infty} + c_2. \qquad \text{(VIII. 2. 24)}$$

Вычитая уравнение (VIII. 2. 21) из (VIII. 2. 24) и учитывая (VIII. 2. 14), получаем

$$p_к - p = c_1 \int_{\xi}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa}} d\xi = c_1 \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa}} d\xi. \qquad \text{(VIII. 2. 25)}$$

Перед нахождением c_1 для удобства заменим переменное интегрирования ξ другим:

$$u = \frac{\xi}{2\sqrt{\varkappa}} = \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}. \qquad \text{(VIII. 2. 26)}$$

Тогда $d\xi = 2\sqrt{\varkappa}\, du$ и уравнение (VIII. 2. 25) примет вид:

$$p_к - p = 2\sqrt{\varkappa}\, c_1 \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} e^{-u^2} du = c_1' \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} e^{-u^2} du, \qquad \text{(VIII. 2. 27)}$$

где $c_1' = 2\sqrt{\varkappa}\, c_1$.

Последний интеграл обычно представляют в виде разности интегралов:

$$\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} e^{-u^2} du = \int\limits_0^{\infty} e^{-u^2} du - \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2} du.$$

Из интегрального исчисления известно [Лт. III. 7], что

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad \text{(VIII. 2. 28)}$$

Интеграл в уравнении (VIII. 2. 28) называется интегралом Пуассона. Тогда уравнение (VIII. 2. 27) можно представить в виде

$$p_к - p = c_1' \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2} du \right) =$$

$$= c_1' \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2} du \right) = c_1'' \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} \right), \qquad \text{(VIII. 2. 29)}$$

где $\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}} = \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2} du$. Табулированный интеграл

$$\operatorname{erf} \xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\xi} e^{-u^2} du \qquad \text{(VIII. 2. 30)}$$

называется интегралом или функцией вероятности.

Постоянная c_1'' находится из граничного условия (VIII. 2. 23), которое с учетом уравнения (VIII. 2. 29), принимает вид:

$$p_к - p_с = c_1''(1 - \operatorname{erf} 0) = c_1''(1 - 0) = c_1''.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$p_к - p = (p_к - p_с)\left(1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}\right) =$$

$$= (p_к - p_с)\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}} e^{-u^2}\,du\right). \qquad \text{(VIII. 2. 31)}$$

Найдем теперь дебит галереи. Будем считать положительным дебит, отбираемый из галереи (рис. VIII. 2), когда поток движется против оси x.

Тогда, дифференцируя интеграл (VIII. 2. 31) по x, согласно закону Дарси получаем

$$|w| = q = \frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0} = (p_к - p_с)\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4\varkappa t}\frac{1}{2\sqrt{\varkappa t}}\right)_{x=0}\frac{k}{\mu} =$$

$$= \frac{k}{\mu}\frac{p_к - p_с}{\sqrt{\pi\varkappa t}} \approx 0{,}565\frac{k}{\mu}\frac{p_к - p_с}{\sqrt{\varkappa t}}. \qquad \text{(VIII. 2. 32)}$$

Если задается постоянный отбор на галерее, то задача решается аналогично. Начальные и граничные условия имеют вид:

при $x = 0$,

$$w(0, t) = w_1; \qquad \text{(VIII. 2. 33)}$$

при $t = 0$,

$$p(0, x) = p_0;\ w(0, x) = 0. \qquad \text{(VIII. 2. 34)}$$

Умножая уравнение теплопроводности (VIII. 2. 2) для p на $\left(-\frac{k}{\mu}\right)$ и дифференцируя по x, а также учитывая, что $w = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$, получаем

$$-\frac{k}{\mu}\varkappa\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial t}$$

или

$$\varkappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right),$$

т. е.

$$\varkappa\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial w}{\partial t}. \qquad \text{(VIII. 2. 35)}$$

Мы получили то же уравнение теплопроводности с той разницей, что здесь вместо давления p имеем скорость фильтрации w, причем

$$w(x, 0) = w_0 = 0, \quad w(0, t) = w_1 = \text{const}. \qquad \text{(VIII. 2. 36)}$$

Подставляя (VIII. 2. 36) в уравнение (VIII. 2. 31) и заменяя переменные, имеем соответственно

$$w = w(x, t) = \frac{2w_1}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi}^{\infty} e^{-u^2} du, \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}. \qquad \text{(VIII. 2. 37)}$$

Чтобы найти закон изменения давления, обозначим

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}}^{\infty} e^{-u^2} du = \Phi(x, t). \qquad \text{(VIII. 2. 38)}$$

Тогда

$$-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = w(x, t) = w_1 \Phi(x, t),$$

$$p(x, t) - p(0, t) = -\frac{\mu w_1}{k} \int_0^x \Phi(x, t)\, dx. \qquad \text{(VIII. 2. 39)}$$

Интегрируя по частям и учитывая, что в (VIII. 2. 39) t фиксировано, получаем

$$p(x, t) - p(0, t) = -\frac{\mu w_1}{k}\left[\Phi(x, t)\, x\Big|_0^x - \int_0^x x\, d\Phi\right], \qquad \text{(VIII. 2. 40)}$$

$$d\Phi = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4\varkappa t} \frac{dx}{2\sqrt{\varkappa t}} = \frac{-1}{\sqrt{\pi \varkappa t}} e^{-x^2/4\varkappa t} dx$$

или, выполняя интегрирование,

$$p(x, t) - p(0, t) = -\frac{\mu w_1}{k}\left[x\,\Phi(x, t)\Big|_0^x + \frac{1}{\sqrt{\pi \varkappa t}} \int_0^x x\, e^{-x^2/4\varkappa t} dx\right] =$$

$$= -\frac{x \mu w_1}{k}\left[1 - \operatorname{erf} \xi + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - e^{-\xi^2}}{\xi}\right], \quad \xi = \frac{x}{2\sqrt{\varkappa t}}. \qquad \text{(VIII. 2. 41)}$$

Рассмотрим теперь радиальный приток к точечному стоку на плоскости, когда задан постоянный дебит Q стока. Уравнение упругого режима для радиального притока упругой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\right). \qquad \text{(VIII. 2. 42)}$$

Поступая, как в предыдущей задаче, введем новое переменное:

$$\xi = R(r)\,T(t), \qquad \text{(VIII. 2. 43)}$$

где $R(r)$ и $T(t)$ — функции только одного аргумента.

Можно сразу воспользоваться формулами (VIII. 2. 3) и (VIII. 2. 4), в которых $X(x)$ следует заменить на $R(r)$. Получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial r}, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = \frac{d^2p}{d\xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^2 + \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2}.\end{gathered} \qquad \text{(VIII. 2. 44)}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (VIII. 2. 42), будем иметь

$$\frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \varkappa\left[\frac{d^2p}{d\xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^2 + \frac{dp}{d\xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{dp}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial r}\right]$$

или

$$\frac{dp}{d\xi}RT' = \varkappa\left[\frac{d^2p}{d\xi^2}T^2R'^2 + \frac{dp}{d\xi}T\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)\right]. \qquad \text{(VIII. 2. 45)}$$

Учитывая уравнение (VIII. 2. 43), последнее уравнение представим так:

$$\frac{dp}{d\xi}\frac{\xi T'}{T^3} = \varkappa\left[\frac{d^2p}{d\xi^2}R'^2 + \frac{dp}{d\xi}\frac{1}{T}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)\right]. \qquad \text{(VIII. 2. 46)}$$

Чтобы уравнение (VIII. 2. 46) обратилось в обыкновенное дифференциальное уравнение, достаточно положить

$$R'^2 = 1, \quad R = r, \quad \frac{T'}{T^3} = \text{const}. \qquad \text{(VIII. 2. 47)}$$

Учитывая второе уравнение (VIII. 2. 11), после рассуждений, аналогичных приведенным в предыдущей задаче, получаем

$$\frac{T'}{T^3} = -\frac{1}{2}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \xi = \frac{r}{\sqrt{t}}. \qquad \text{(VIII. 2. 48)}$$

Замечая, что при этом

$$R'' + \frac{1}{r}R' = \frac{1}{r} = \frac{1}{R},$$

получаем вместо уравнения (VIII. 2. 46)

$$-\frac{1}{2}\xi\frac{dp}{d\xi} = \varkappa\left(\frac{d^2p}{d\xi^2} + \frac{1}{RT}\frac{dp}{d\xi}\right) = \varkappa\left(\frac{d^2p}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dp}{d\xi}\right). \qquad \text{(VIII. 2. 49)}$$

Для интегрирования уравнения (VIII. 2. 49) полагаем

$$\frac{dp}{d\xi} = U. \qquad \text{(VIII. 2. 50)}$$

Тогда

$$-\frac{1}{2}\xi U = \varkappa\left(\frac{dU}{d\xi}+\frac{U}{\xi}\right),$$

$$\frac{dU}{d\xi} = -\left(\frac{1}{2\varkappa}\xi+\frac{1}{\xi}\right)U. \qquad \text{(VIII. 2. 51)}$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{dU}{U} = -\left(\frac{\xi\, d\xi}{2\varkappa}+\frac{d\xi}{\xi}\right),\ \ln U = -\frac{\xi^2}{4\varkappa} - \ln\xi + \ln c_1, \qquad \text{(VIII. 2. 52)}$$

где $\ln c_1$ — константа интеграции. Потенцируя, имеем

$$\ln\frac{U\xi}{c_1} = \frac{-\xi^2}{4\varkappa},\ U = c_1\frac{1}{\xi}e^{-\xi^2/4\varkappa}. \qquad \text{(VIII. 2. 53)}$$

Согласно уравнению (VIII. 2. 50) теперь находим

$$p = p(r,\ t) = c_1\int\frac{1}{\xi}e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa}}d\xi + c_2. \qquad \text{(VIII. 2. 54)}$$

Постоянную c_2 найдем из начального условия $t = 0$, $p = p_к$, соответствующего значению $\xi = \infty$:

$$p_к = c_1\left(\int\frac{1}{\xi}e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa}}d\xi\right)_{\xi=\infty} + c_2. \qquad \text{(VIII. 2. 55)}$$

Из уравнений (VIII. 2. 55) и (VIII. 2. 54)

$$p_к - p = c_1\int_{\xi}^{\infty}\frac{1}{\xi}e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa}}d\xi = c_1\int_{\frac{r}{\sqrt{t}}}^{\infty}\frac{1}{\xi}e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa}}d\xi. \qquad \text{(VIII. 2. 56)}$$

Для нахождения c_1 определим расход Q_0. Считая дебит скважины-стока положительным, получаем

$$Q_0 = \frac{2\pi kh}{\mu}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=0} \qquad \text{(VIII. 2. 57)}$$

или согласно уравнению (VIII. 2. 56)

$$Q_0 = \frac{2\pi kh}{\mu}c_1\left(re^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}}\frac{\sqrt{t}}{r}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)_{r=0} = \frac{2\pi kn}{\mu}c_1,$$

откуда

$$c_1 = \frac{Q_0\mu}{2\pi kh}. \qquad \text{(VIII. 2. 58)}$$

Подставляя значение c_1 в уравнение (VIII. 2. 56), получаем

$$p_к - p = \frac{Q_0 \mu}{2\pi kh} \int\limits_{\frac{r}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{4\varkappa}} d\xi. \qquad \text{(VIII. 2. 59)}$$

Последний интеграл приводится к табулированному интегралу $-\mathrm{Ei}(-x)$ [8] подстановкой $\frac{\xi^2}{4\varkappa} = u$. Тогда

$$\xi = 2\sqrt{\varkappa u}, \quad d\xi = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{u}} du.$$

Подставляя в уравнение (VIII. 2. 59), получаем

$$p_к - p = \frac{Q_0 \mu}{2\pi kh} \int\limits_{\frac{r^2}{4\varkappa t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{\varkappa u}} \frac{\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{u}} du = \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \int\limits_{\frac{r^2}{4\varkappa t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du =$$

$$= -\frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right). \qquad \text{(VIII. 2. 60)}$$

Расход через окружность радиусом r получим для скважины-стока из формулы

$$Q(r, t) = \frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} 2\pi rh. \qquad \text{(VIII. 2. 61)}$$

Выполняя дифференцирование, из (VIII. 2. 60) и (VIII. 2. 61) будем иметь

$$Q(r, t) = Q_0 e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}}. \qquad \text{(VIII. 2. 62)}$$

Интеграл в формуле (VIII. 2. 60) является функцией нижнего предела. Этот интеграл табулирован [8] и называется интегральным экспоненциалом или интегральной показательной функцией. Основные свойства интегрального экспоненциала изложены в руководствах по специальным функциям [9].

Для малых значений аргумента $\frac{r^2}{4\varkappa t}$ приближенно

$$-\mathrm{Ei}\left(-\frac{r^2}{4\varkappa t}\right) \approx \ln \frac{4\varkappa t}{r^2} - 0{,}5772\ldots = \ln \frac{2{,}25\varkappa t}{r^2}. \qquad \text{(XIII. 2. 63)}$$

Скорость фильтрации на расстоянии r согласно (VIII. 2. 62) определяется формулой

$$w = \frac{Q_0}{2\pi rh} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa t}}. \qquad \text{(VIII. 2. 64)}$$

Из последней формулы следует, что так как $\varkappa$ обычно очень велико, то стационарная скорость $w_{\text{стац}} = \frac{Q_0}{2\pi rh}$ достигается на небольших расстояниях от скважины очень быстро.

Как было показано в § 2 главы V, расчет депрессии при стационарном притоке к несовершенной скважине может быть произведен, как для совершенной радиуса, равного приведенному радиусу r_c'. Из сказанного выше следует, что такая замена справедлива и при нестационарном притоке, если для несовершенных скважин действительные радиусы при вычислении депрессии заменить приведенными r_c'.

Приток упругой жидкости к несовершенным скважинам рассмотрен в работах А. Л. Хейна [10].

При практических расчетах упругого режима широко применяются приближенные методы — рассмотренный ниже метод последовательной смены стационарных состояний (§ 4, 5) и более точные, предложенные Г. И. Баренблаттом, А. М. Пирвердяном и другими, близкие по идее к методам, применяемым в теории пограничного слоя [Лт. VII. 37). Интерференция батарей скважин при упругом режиме фильтрации исследована в работах [11, 12, 13 и др.].

М. Г. Сухарев [12] показал, что достаточно хорошей точности можно достигнуть при помощи метода эквивалентных фильтрационных сопротивлений, изложенного в § 5 главы IV. При этом внешние фильтрационные сопротивления считаются заданными функциями времени, вид которых может быть установлен как из точных решений, так и из приближенных. Внутренние фильтрационные сопротивления считаются постоянными, как для несжимаемой жидкости. Точный расчет интерференции легко выполняется для группы скважин в неограниченном пласте при заданных дебитах. При заданных забойных давлениях в точной постановке для дебитов получается система интегральных уравнений, не имеющая пока эффективного решения. Приближенными методами эта задача решается сравнительно легко.

§ 3. Приток к точечному стоку и кольцевой галерее при переменном дебите

Формула (VIII. 2. 60) справедлива для зависимости $Q(t) = Q_0 = \text{const}$, представленной на рис. VIII. 3, т. е. для постоянного дебита стока. Начнем с случая, когда расход представлен в виде прямоугольного графика (рис. VIII. 4), где τ произвольно, т. е. $Q=0$, $0 < t < \tau$; $Q(t) = Q = \text{const}$, $\tau < t < \tau + \Delta\tau$; $Q = 0$, $t > \tau + \Delta\tau$. Заменяя t на $t - \tau$ (перенос начала координат в точку $t = \tau$), из формулы (VIII. 2. 60) получаем

$$p_0 - p(r, t) = \frac{Q\mu}{4\pi kh}\left[\int\limits_{\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int\limits_{\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau-\Delta\tau)}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du\right], \qquad \text{(VIII. 3. 1)}$$

где справедливость формулы (VIII. 3. 1) следует из принципа суперпозиции, (p_0 — постоянное всюду начальное давление).

Переходя к пределу при $\Delta\tau \to 0$ и полагая

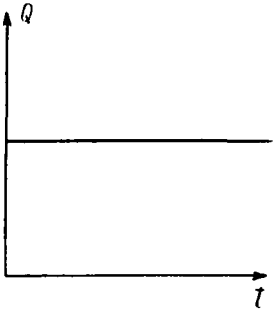
$$\lim_{\Delta\tau \to 0} Q\,\Delta\tau = V,$$

где V — объем мгновенно отобранной из пласта жидкости, получаем:

$$p_0 - p(r,\ t) = \frac{-Q\mu}{4\pi kh}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\int_{\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du\right]d\tau =$$

$$= \frac{\mu V}{4\pi kh}\,\frac{e^{-r^2/4\varkappa(t-\tau)}}{t-\tau}. \qquad \text{(VIII. 3. 2)}$$

Рис. VIII. 3.



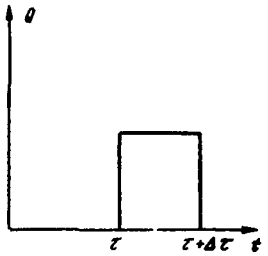


Рис. VIII. 4.

Формула (VIII. 3. 2) дает температурный эффект, вызываемый действием мгновенного теплового источника.

Непрерывный отбор жидкости из пласта с переменным во времени дебитом $Q(t)$ можно рассматривать как бесконечную последовательность элементарных отборов, действие каждого из которых можно определить по формуле (VIII. 3. 2). Суммарное действие всей последовательности элементарных отборов выразится интегралом, называемым интегралом Дюамеля [Лт. VII. 31]:

$$p_0 - p(r,\ t) = \frac{\mu}{4\pi kh}\int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau}\,e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}}\,d\tau. \qquad \text{(VIII. 3. 3)}$$

Полагая в (VIII. 3. 3) $Q(\tau) = Q = \text{const}$ и производя замену переменных

$$\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)} = u,$$

получаем, как легко видеть, снова формулу (VIII, 2. 60).

Рассмотрим теперь случай кольцевого стока радиусом a (рис. VIII. 5).

Элемент кольцевого стока $ad\theta$ можно рассматривать как точечный сток. Вследствие линейности уравнения теплопроводности можно суммировать давления, вызываемые элементарными точечными стоками или источниками. Пусть $Q = Q(\tau)$ — переменный во времени дебит всей кольцевой галереи. Тогда дебит элемента $ad\theta$ в точке A будет

$$q(\tau) = \frac{Q(\tau)\,d\theta}{2\pi}. \qquad \text{(VIII. 3. 4)}$$

Согласно (VIII. 3. 3) распределение давления от точечного стока в начале координат будет

$$p_0 - p(r, t) = \frac{\mu}{4\pi kh} \int_0^t \frac{q(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2}{4\varkappa(t-\tau)}} d\tau, \qquad \text{(VIII. 3. 5)}$$

где r — расстояние до стока.

Подставив (VIII. 3. 4) в (VIII. 3. 5), получим эффект действия элементарного стока $ad\theta$, при этом полагаем $r = r'$, где $r' = AM$ (рис. VIII. 5) расстояние точки M, где определяется давление, от стока:

$$d[p_0 - p(r, t)] =$$

$$= \frac{\mu}{4\pi kh} \int_0^t \frac{Q(\tau)\, d\theta}{2\pi(t-\tau)} e^{-r'^2/4\varkappa(t-\tau)} d\tau,$$

$$r'^2 = AM^2 = a^2 + OM^2 - 2aOM\cos(\theta - \varphi) =$$

$$= a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \varphi).$$

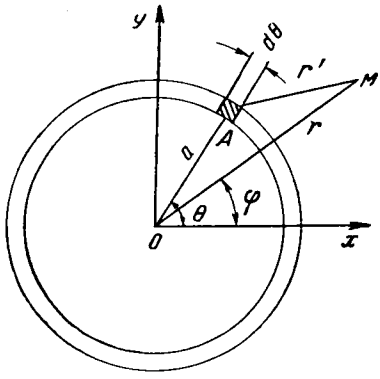


Рис. VIII. 5.

Эффект действия всей кольцевой галереи будет

$$p_0 - p(r, t) = \frac{\mu}{4\pi kh} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{Q(\tau)}{2\pi(t-\tau)} \times$$

$$\times e^{-\frac{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta-\varphi)}{4\varkappa(t-\tau)}} d\tau\, d\theta. \qquad \text{(VIII. 3. 6)}$$

В (VIII. 3. 6) двойной интеграл можно представить так:

$$p_0 - p(r, t) = \frac{\mu}{4\pi kh} \int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2+a^2}{4\varkappa(t-\tau)}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2ar\cos(\theta-\varphi)}{4\varkappa(t-\tau)}} d\theta\right] d\tau. \qquad \text{(VIII. 3. 7)}$$

Пользуясь формулой, которую мы уже встречали (§ 10, гл. VII),

$$\int_0^{2\pi} e^{x\cos\theta} d\theta = 2\pi I_0(x),$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка первого рода мнимого аргумента, получаем

$$\int_0^{2\pi} e^{\frac{2ar\cos(\theta-\varphi)}{4\varkappa(t-\tau)}} d\theta = 2\pi I_0\left[\frac{2ar}{4\varkappa(t-\tau)}\right] = 2\pi I_0\left[\frac{ar}{2\varkappa(t-\tau)}\right]. \qquad \text{(VIII. 3. 8)}$$

Подставив (VIII. 3. 8) в (VIII. 3. 7), получим

$$p_0 - p(r, t) = \frac{\mu}{4\pi kh} \int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{r^2+a^2}{4\varkappa(t-\tau)}} I_0\left[\frac{ar}{2\varkappa(t-\tau)}\right] d\tau. \qquad \text{(VIII. 3. 9)}$$

Это есть уравнение Маскета для кольцевого стока радиусом a дебита $Q(\tau)$ При $a \to 0$

$$I_0\left[\frac{ar}{2\varkappa(t-\tau)}\right]=I_0(0)=1.$$

Тогда получаем формулу для точечного стока (VIII. 3. 3).

Интеграл (VIII. 3. 9) имеет вид, который в операционном исчислении называется сверткой двух функций f_1 и f_2:

$$J(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau.$$

В этих интегралах f_1 и f_2 можно менять местами. Действительно, сделаем замену переменного:

$$t-\tau=\tau',\quad d\tau=-d\tau',\quad \tau=t-\tau',$$

$$J(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau=-\int_t^0 f_1(\tau')\,f_2(t-\tau')\,d\tau'=\int_0^t f_1(\tau')\,f_2(t-\tau')\,d\tau'.$$

Таким образом, можно получить другое представление формулы (VIII. 3. 9):

$$p_0-p(r,\,t)=\frac{\mu}{4\pi kh}\int_0^t\frac{Q(t-\tau)}{\tau}\,e^{-\frac{r^2}{4\varkappa\tau}}\,I_0\left(\frac{ar}{2\varkappa\tau}\right)d\tau. \quad \text{(VIII. 3. 10)}$$

§ 4. Метод последовательной смены стационарных состояний. Приток к прямолинейной галерее

В связи со сложностью точных решений были предложены приближенные методы решения задач о нестационарной фильтрации жидкости и газа в пористой среде. Эти же методы позволяют изучать некоторые нестационарные тепловые задачи.

Одним из таких методов является метод последовательной смены стационарных состояний, который, по-видимому, впервые был применен к фильтрационным задачам К. Э. Лембке [14]. Этот же метод был применен и развит далее Л. С. Лейбензоном для решения некоторых тепловых задач. Рассмотрим вначале задачу о притоке упругой жидкости к галерее.

Дан полубесконечный пласт, т. е. пласт, ограниченный с одной стороны прямолинейным контуром. Вначале во всей области существовало постоянное давление $p_к$ (рис. VIII. 6, *а*).

Пусть в сечении $x = 0$ давление внезапно снизилось и стало равным $p_с$. Точное решение этой задачи выражается интегралом вероятности (VIII. 2. 31). Вместо этого решения можно предложить следующую расчетную схему.

Представим себе, что в данный момент $t > 0$ зона пониженного давления распространилась на какое-то расстояние $l = l(t)$.

Распределение давления в этой зоне будем считать стационарным, в чем собственно и состоит сущность метода.

Здесь нужно сделать следующее замечание. В реальных условиях возмущения давления в пласте распространяются с весьма большой, но конечной скоростью звука. Вследствие фильтрационного трения амплитуда возмущения на фронте распространяющейся волны сильно затухает по мере увеличения расстояния x, пройденного волной, примерно по закону $e^{-\alpha x}$, где α — весьма большое число. Когда мы исходим из уравнения упругого режима (VIII. 1. 8) — линейного уравнения теплопроводности, получаемого из общих уравнений фильтрации при отбрасывании инерционных членов, то скорость распространения возмущений, как это хорошо известно для линейного уравнения теплопроводности, вообще обращается в бесконечность.

Таким образом, введенная условная длина $l(t)$ ничего общего не имеет с действительным размером зоны пониженного давления, которая, если исходить из линейного уравнения теплопроводности, теоретически мгновенно захватывает весь пласт. Для установившегося прямолинейного движения упругой жидкости с большим значением модуля упругости K распределение давления такое же, как и у несжимаемой жидкости:

$$p = p_c + (p_к - p_c)\frac{x}{l} \qquad \text{(VIII. 4. 1)}$$

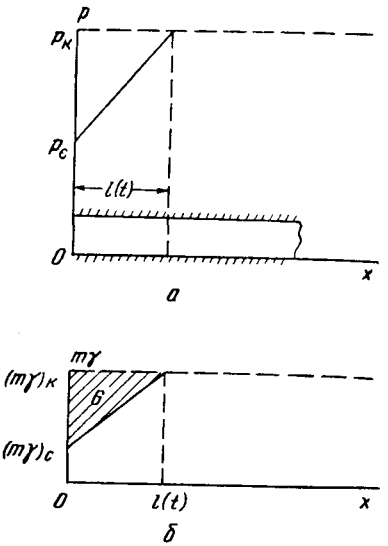


Рис. VIII. 6.

(рис. VIII. 6, *б*), т. е. давление распределено по закону прямой линии.

Расстояние l следует рассматривать как некоторую функцию времени t, $l = l(t)$. Заметим, что в точном решении эпюры давления не должны иметь и не имеют угловых точек, что физически совершенно ясно.

При методе последовательной смены стационарных состояний предполагается, что существует стационарная эпюра давления — прямая (рис. VIII. 6, *б*), перемещающаяся вдоль пласта с течением времени, с угловой точкой $x = l(t)$.

Расстояние $l(t)$ можно назвать условным переменным радиусом влияния галереи, длиной, на которую распространилось понижение давления.

Мы идем на такую погрешность по следующим причинам. Сопоставление приближенного решения, которое получается таким методом, с точным решением дает для дебита галереи вполне удовлетворительное согласие.

Например, для рассматриваемой задачи о прямолинейном притоке к галерее расхождение между точным и приближенным значениями дебитов равно приблизительно 11% [15]. Для радиального притока расхождение еще меньше (порядка 5%) [16]. Вычисления же по методу последовательной смены стационарных состояний оказываются гораздо более простыми, нежели расчеты по точным формулам.

Для решения задачи поступим следующим образом. Найдем отобранное количество жидкости из пласта на каждую единицу площади его поперечного сечения. Для этого выделим элемент длиной dx и площадью сечения, равной единице, и определим вес жидкости в этом элементе.

Очевидно, этот элементарный вес равен $m\gamma\, dx \cdot 1 = m\gamma\, dx$.

На длине $l(t) = l$ вес жидкости в пласте на единицу площади сечения равен интегралу

$$\int_0^l m\gamma\, dx.$$

Найдем теперь вес жидкости, отобранной из пласта за время t Очевидно, отобранное количество жидкости G равно первоначальному количеству жидкости минус то, что осталось, т. е.

$$G = (m\gamma)_к\, l - \int_0^l m\gamma\, dx. \qquad \text{(VIII. 4. 2)}$$

Для вычисления интеграла (VIII. 4. 2) воспользуемся связью между величинами $m\gamma$ и p для упругого режима фильтрации.

Для переменного произведения $m\gamma$ мы имели уравнение (VIII. 1. 6)

$$m\gamma = (m\gamma)_0\left(1 + \frac{p - p_0}{K}\right). \qquad \text{(VIII. 4. 3)}$$

Произведение $m\gamma$ по длине пласта будет распределено точно так же, как давление p. На рис. VIII. 6, *б* приведен график распределения $m\gamma$ по длине пласта согласно схеме последовательной смены стационарных состояний, причем $(m\gamma)_к$ соответствует давлению $p_к$, $(m\gamma)_с$ — давлению $p_с$ (штриховкой показано отобранное количество жидкости).

Для прямолинейной эпюры давления согласно рис. VIII. 6, *б* площадь треугольника G равна

$$G = \frac{1}{2}[(m\gamma)_к - (m\gamma)_с]\, l(t). \qquad \text{(VIII. 4. 4)}$$

Найдем теперь весовой расход жидкости g, вытекающей из пласта через единицу площади сечения галереи. Очевидно,

$$G = \int_0^t g(t)\, dt.$$

Из этого интеграла следует, что весовой расход g равен

$$g = \frac{dG}{dt}.$$

Согласно закону Дарси весовой расход можно выразить еще таким образом:

$$g = \frac{k}{\mu} \frac{p_к - p_с}{l} \gamma_с, \qquad \text{(VIII. 4. 5)}$$

где $\gamma_с$ — объемный вес жидкости при давлении $p_с$.

Дифференцируя по времени уравнение (VIII. 4. 4), получаем

$$\frac{1}{2}[(m\gamma)_к - (m\gamma)_с] \frac{dl}{dt} = \frac{k}{\mu} \frac{p_к - p_с}{l} \gamma_с. \qquad \text{(VIII. 4. 6)}$$

Согласно уравнению (VIII. 4. 3)

$$(m\gamma)_к - (m\gamma)_с = (m\gamma)_0 \frac{p_к - p_с}{K}. \qquad \text{(VIII. 4. 7)}$$

Подставляя это значение в уравнение (VIII. 4. 6), получаем дифференциальное уравнение для длины $l(t)$:

$$\frac{1}{2K}(m\gamma)_0 \frac{dl}{dt} = \frac{k\gamma_с}{\mu l}. \qquad \text{(VIII. 4. 8)}$$

Разделим переменные:

$$l dl = \frac{2kK\gamma_с}{\mu (m\gamma)_0} dt. \qquad \text{(VIII. 4. 9)}$$

В этом уравнении ввиду большой величины модуля упругости жидкости $K_ж$ можно принять $\gamma_0 \approx \gamma_с$ и без практической погрешности считать пористость постоянной ($m \approx m_0 = \text{const}$). Тогда уравнение (VIII. 4. 9) примет вид:

$$l dl = \frac{2kK}{m\mu} dt.$$

Замечая согласно уравнению (VIII. 1. 8), что $\frac{kK}{m\mu} = \varkappa$, последнее дифференциальное уравнение можно записать в таком виде:

$$l dl = 2\varkappa dt. \qquad \text{(VIII. 4. 10)}$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{2} l^2 = 2\varkappa t + C, \qquad \text{(VIII. 4. 11)}$$

где C — постоянная интегрирования.

В начальный момент $l = 0$ при $t = 0$. Следовательно, согласно уравнению (VIII. 4. 11) $C = 0$.

Отсюда получаем окончательно

$$l = l(t) = 2\sqrt{\varkappa t}. \qquad \text{(VIII. 4. 12)}$$

Формула (VIII. 4. 12) выражает закон движения условной зоны депрессии. В действительности же, как уже говорилось, зона депрессии захватывает сразу весь пласт.

Найдем теперь расход в зависимости от времени. Для этого можно воспользоваться формулами для дебита при стационарном режиме движения, подразумевая под $l(t)$ расстояние между сечениями с давлениями $p_к$ и $p_с$. Это непосредственно следует из самой сущности метода последовательной смены стационарных состояний.

Согласно формулам (VIII. 4. 5) и (VIII. 4. 12) объемный расход жидкости q на единицу площади пласта, т. е. скорость фильтрации, равен

$$q = w = \frac{k}{\mu}\frac{p_к - p_с}{l(t)} = \frac{1}{2}\frac{k}{\mu}\frac{p_к - p_с}{\sqrt{\varkappa t}}. \qquad \text{(VIII. 4. 13)}$$

Таким образом, дебит жидкости будет изменяться обратно пропорционально $\sqrt{t}$.

Отметим, что точная формула для q (VIII. 2. 32) имеет вид:

$$q = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{k}{\mu}\frac{p_к - p_с}{\sqrt{\varkappa t}}.$$

Таким образом, приближенное решение отличается от точного приблизительно на 11%.

Решим теперь ту же задачу, когда задан отбираемый дебит. Для простоты примем этот дебит постоянным: $q = \text{const}$. Весовое количество отобранной жидкости по-прежнему, с учетом (VIII. 4. 4) и (VIII. 4. 7), выражается формулой

$$G = \frac{1}{2}(m\gamma)_0 \frac{p_к - p_с}{K} l(t). \qquad \text{(VIII. 4. 14)}$$

Объемный же дебит, как и раньше, равен

$$q = \frac{k}{\mu}\frac{p_к - p_с}{l}. \qquad \text{(VIII. 4. 15)}$$

Обозначим объем отобранной жидкости за время t через Q:

$$Q = \frac{G}{\gamma_с}.$$

Отсюда

$$Q = \frac{G}{\gamma_с} = \frac{1}{2}\frac{(m\gamma)_0}{\gamma_с}\frac{p_к - p_с}{K} l(t) \approx \frac{m}{2}\frac{p_к - p_с}{K} l(t), \qquad \text{(VIII. 4. 16)}$$

так как в этой формуле можно принять $\gamma_0 \approx \gamma_с$, $m \approx \text{const}$.

В нашей задаче Q — известная величина, $Q = \int_0^t q dt$. Неизвестными являются депрессия и длина $l(t)$. Для определения их из уравнений (VIII. 4. 15) и (VIII. 4. 16) составляют пару уравнений с двумя неизвестными, которые решаются очень просто:

$$l = \frac{k}{\mu} \frac{p_к - p_с}{q}. \qquad \text{(VIII. 4. 17)}$$

Отсюда согласно (VIII. 4. 16) находим

$$Q = \frac{m}{2} \frac{p_к - p_с}{K} \frac{k}{\mu} \frac{p_к - p_с}{q} = \frac{km}{2\mu K} \frac{(p_к - p_с)^2}{q},$$

$$p_к - p_с = \left(\frac{2QqK\mu}{km}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \text{(VIII. 4. 18)}$$

При сопоставлении с точными расчетами [16] обнаружено, что формула (VIII. 4. 18) дает погрешность около 25%. Для выяснения причины такого большого расхождения найдем закон изменения длины $l = l(t)$.

Подставляя значение депрессии из уравнения (VIII. 4. 18) в уравнение (VIII. 4. 17), получаем

$$l = \frac{k}{\mu q} \sqrt{\frac{2QqK\mu}{km}}$$

и

$$l = \sqrt{\frac{2Q}{q} \frac{kK}{m\mu}} = \sqrt{\frac{2Q}{q}}\, \varkappa. \qquad \text{(VIII. 4. 19)}$$

В нашем случае, когда q постоянно, $Q = qt$ и формула (VIII. 4. 19) принимает вид:

$$l = \sqrt{2\varkappa t}. \qquad \text{(VIII. 4. 20)}$$

Таким образом, смотря по условию задачи, зависимость $l = l(t)$ оказывается различной: когда задана постоянная депрессия, $l = 2\sqrt{\varkappa t}$ согласно (VIII. 4.12); когда задан постоянный дебит, $l = \sqrt{2\varkappa t}$ согласно (VIII. 4. 20).

Дело заключается в том, что нельзя слишком сильно искажать эпюру давления. Эпюру давления, являющуюся некоторой кривой, мы сильно исказили, заменив прямой. В первом случае получилось сравнительно удовлетворительное согласие при расчете дебита — погрешность около 11%. При расчете же депрессии погрешность оказалась около 25%.

Следовательно, методом последовательной смены стационарных состояний для прямолинейного движения можно пользоваться при расчетах дебитов тогда, когда задана постоянная депрессия. При постоянных дебитах результат получается хуже.

Другие примеры приложения метода последовательной смены стационарных состояний можно найти в [17, 18].

Следует указать, что точность результатов расчетов по методу последовательной смены стационарных состояний сильно снижается при граничных условиях, отличных от рассмотренных выше $(p)_{x=0,\,t>0} = \text{const}$ или $(q)_{x=0,\,t>0} = \text{const}$. В этих случаях следует пользоваться хотя и более громоздкими, но зато и более точными, нежели метод последовательной смены стационарных состояний, приближенными решениями. Разумеется, когда это целесообразно и не связано с чрезмерными вычислительными трудностями, проще всего прямо исходить из точных решений уравнения теплопроводности.

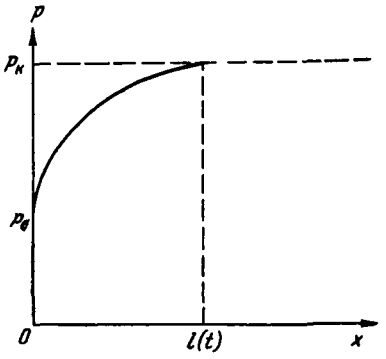


Рис. VIII. 7.

Приближенные методы, являющиеся развитием метода последовательной смены стационарных состояний, были предложены А. М. Пирвердяном [19] и Ю. Д. Соколовым [20].

А. М. Пирвердян также вводит условную длину l для зоны депрессии, но задается эпюрой давления на этом участке так, чтобы она не имела угловых точек. При этом распределение давления в этой зоне уже не будет стационарным.

Эпюра давления задается в виде параболы таким образом, чтобы в точке $x = l\,(t)$ касательная к параболе была горизонтальной (рис. VIII. 7).

Используя условия $g = \frac{dG}{dt}$ и закон Дарси

$$g = -\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{x=0} \gamma \cdot 1,$$

можно получить дифференциальное уравнение для условной длины зоны депрессии.

Параболическая эпюра давления ближе соответствует действительности, нежели прямая линия. При этом методе удается улучшить точность против метода последовательной смены примерно в 2,5 раза.

Еще более точные приближенные методы были предложены Г. И. Баренблаттом [21]. Эти методы основаны на выведенных Г. И. Баренблаттом некоторых моментных интегральных соотношениях, аналогичных тем, которые применяются в теории пограничного слоя. Некоторое видоизменение метода интегральных соотношений для задач упругого режима фильтрации приведено в § 6.

§ 5. Расчет радиального притока упругой жидкости по методу последовательной смены стационарных состояний

Значительно лучшие результаты дает метод последовательной смены стационарных состояний при радиальном притоке упругой жидкости к скважине.

Рассмотрим радиальный приток упругой жидкости к скважине из пласта мощностью h (рис. VIII. 8, *а*, *б*).

Когда из скважины начали отбор, вокруг нее образовалась воронка депрессии, которая теоретически захватывает весь пласт. Мы будем считать, что воронка депрессии распространилась на какую-то конечную длину, причем радиус $R\ (t)$ этой воронки депрессии условный.

Нетрудно видеть, почему для радиального движения метод последовательной смены стационарных состояний будет давать лучшие результаты, нежели для прямолинейного. При прямолинейном движении кривая распределения давления аппроксимируется двумя прямыми линиями (см. рис. VIII. 6).

При радиальном движении кривая распределения давления аппроксимируется логарифмической кривой. Расхождение между двумя кривыми оказывается меньше, чем расхождение между прямой и кривой.

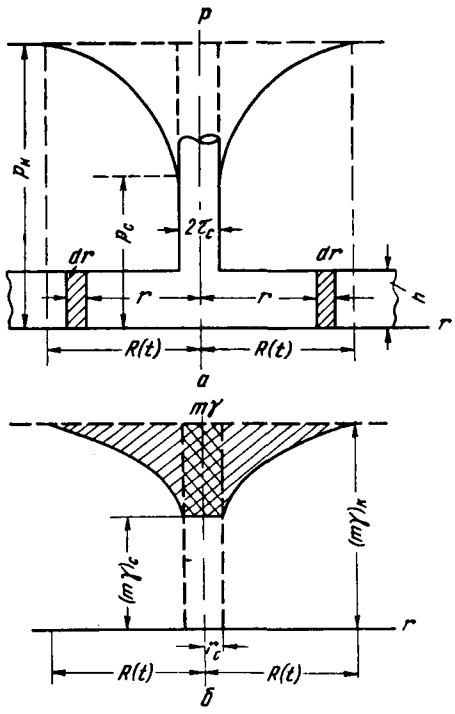


Рис. VIII. 8.

Найдем убыль жидкости из цилиндрического кольцевого элемента пласта внутренним радиусом r ($r_c < r < R\ (t)$), мощностью h, толщиной dr, считая, что первоначально скважина не эксплуатировалась и пластовое давление было всюду постоянным и равным $p_к$ (рис. VIII. 8).

Объем элемента пласта равен $2\pi\, rh \cdot dr$. Первоначальный вес жидкости в этом элементе пласта равен $2\pi rh\,(m\gamma)_к dr$. Вес жидкости в нем в данный момент $2\pi\, rhm\gamma$. Убыль веса жидкости в элементе равна разности

$$2\pi\, rh\,[(m\gamma)_к - m\gamma]\,dr.$$

Весовое количество жидкости, отобранное из пласта, равно

$$G = \int_{r_c}^{R(t)} 2\pi rh\,[m\gamma)_к - m\gamma]\,dr. \qquad \text{(VIII. 5. 1)}$$

Чтобы воспользоваться этим уравнением, нужно знать, как изменяется $m\gamma$ в пласте. Примем, что $m\gamma$ изменяются по законам стационарного движения

Когда движение стационарно, давление p в окрестности скважины распределено по логарифмическому закону согласно уравнению

$$p = p_к - \frac{p_к - p_c}{\ln\frac{R(t)}{r_c}} \ln\frac{R(t)}{r}, \quad r_c < r < R(t), \qquad \text{(VIII. 5. 2)}$$

где $R(t)$ — радиус воронки депрессии в данный момент t.

Очевидно, произведение $m\gamma$, линейно зависящее от p, будет распределено по такому же закону:

$$m\gamma = (m\gamma)_к - \frac{(m\gamma)_к - (m\gamma)_c}{\ln\frac{R(t)}{r_c}} \ln\frac{R(t)}{r} \qquad \text{(VII. 5. 3)}$$

или

$$(m\gamma)_к - m\gamma = \frac{(m\gamma)_к - (m\gamma)_c}{\ln\frac{R(t)}{r_c}} \ln\frac{R(t)}{r}.$$

Подставляя это выражение в формулу (VIII. 5. 3), получаем

$$G = \int_{r_c}^{R(t)} 2\pi rh \frac{(m\gamma)_к - (m\gamma)_c}{\ln\frac{R(t)}{r_c}} \ln\frac{R(t)}{r}\,dr. \qquad \text{(VIII. 5. 4)}$$

Интеграл в уравнении (VIII. 5. 4) легко берется интегрированием по частям. Получим

$$G = \frac{2\pi h}{\ln\frac{R(t)}{r_c}} [(m\gamma)_к - (m\gamma)_c] \int_{r_c}^{R(t)} r \ln\frac{R(t)}{r}\,dr =$$

$$= 2\pi h \frac{(m\gamma)_к - (m\gamma)_c}{\ln\frac{R(t)}{r_c}} \left\{\frac{R^2(t) - r_c^2}{2} \ln R(t) - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{R^2(t)}{2} \ln R(t) - \frac{R^2(t)}{4}\right] + \left(\frac{r_c^2}{2} \ln r_c - \frac{r_c^2}{4}\right)\right\}. \qquad \text{(VIII. 5. 5)}$$

Раскрывая скобки, после сокращений будем иметь

$$G = 2\pi h \frac{(m\gamma)_к - (m\gamma)_с}{\ln \frac{R(t)}{r_с}} \left[\frac{R^2(t) - r_с^2}{4} - \frac{r_с^2}{2} \ln \frac{R(t)}{r_с} \right].$$

Почленно поделив на $\ln \frac{R(t)}{r_с}$, окончательно получим

$$G = \pi h [(m\gamma)_к - (m\gamma)_с] \left[\frac{R^2(t) - r_с^2}{2 \ln R(t)/r_с} - r_с^2 \right]. \qquad \text{(VIII. 5. 6)}$$

Это количество жидкости извлечено непосредственно из пласта вокруг скважины (показано штриховкой на рис. VIII. 8, *б*).

При вычислении полного количества жидкости, отобранной из пласта, необходимо учесть также жидкость, отобранную из скважины при снижении в ней давления с начального $p_к$ до забойного $p_с$.

Для реальной скважины это дополнительное количество жидкости ничтожно мало, но для укрупненной скважины, моделирующей целое месторождение, оно может оказаться существенным. Это дополнительное количество жидкости показано двойной штриховкой на рис. VIII. 8.

Полное количество жидкости, извлеченной из пласта и скважины, обозначим G_0.

Оно будет равно

$$G_0 = \pi h [(m\gamma)_к - (m\gamma)_с] \left[\frac{R^2(t) - r_с^2}{2 \ln \frac{R(t)}{r_с}} - r_с^2 \right] + \pi r_с^2 h [(m\gamma)_к - (m\gamma)_с]$$

или

$$G_0 = \pi h [m\gamma)_к - (m\gamma)_с] \frac{R^2(t) - r_с^2}{2 \ln \frac{R(t)}{r_с}}. \qquad \text{(VIII. 5. 7)}$$

Учитывая, что

$$(m\gamma)_к - (m\gamma)_с = (m\gamma)_0 \frac{p_к - p_с}{K},$$

и подставляя значение этой разности в уравнение (VIII. 5. 7), окончательно получаем

$$G_0 = \pi h (m\gamma)_0 \frac{p_к - p_с}{K} \frac{R^2(t) - r_с^2}{2 \ln R(t)/r_с}. \qquad \text{(VIII. 5. 8)}$$

Найдем теперь объем жидкости, соответствующий этому весовому количеству. Он получится, если разделить вес G_0 на $\gamma_с$:

$$Q = \frac{G_0}{\gamma_с}.$$

Заметим, что при подъеме на поверхность можно учесть соответствующим образом усадку. Для простоты усадку мы здесь не учитываем и расчет относим к объемному весу γ_c. Полагая $\gamma_c = \gamma_0$, имеем

$$Q = \pi h \frac{(m\gamma)_0}{\gamma_c} \frac{p_к - p_c}{K} \frac{R^2(t) - r_c^2}{2\ln R(t)/r_c} \approx \pi mh \frac{p_к - p_c}{K} \times$$

$$\times \frac{R^2(t) - r_c^2}{2\ln \frac{R(t)}{r_c}}. \qquad \text{(VIII. 5. 9)}$$

В уравнении (VIII. 5. 9) пористость m можно считать постоянной. Найдем теперь связь между средним давлением в пласте и контурным давлением $p_к$.

Предположим, что давление в пласте всюду снизилось равномерно. Тогда отобранный при упругом расширении объем жидкости в пласте радиусом R равен

$$Q = \pi mhR^2 \frac{p_к - \bar{p}}{K}, \qquad \text{(VIII. 5. 10)}$$

где $\bar{p}$ — среднее постоянное давление, которое должно установиться во всем пласте при упругом расширении жидкости на ту же величину Q.

Сравнивая формулы (VIII. 5. 9) и (VIII. 5. 10), получаем

$$\frac{p_к - p_c}{2\ln \frac{R}{r_c}} (R^2 - r_c^2) = R^2 (p_к - \bar{p}).$$

Отсюда

$$\bar{p} = p_к - \frac{p_к - p_c}{2\ln \frac{R}{r_c}} \left(1 - \frac{r_c^2}{R^2}\right). \qquad \text{(VIII. 5. 11)}$$

Последняя формула указывает, что, когда R много больше r_c, при небольшой депрессии второй член в уравнении (VIII. 5. 11) мал и поэтому приближенно можно принять среднее пластовое давление равным контурному, т. е. положить $\bar{p} \approx p_к$.

Погрешность можно оценить из формулы (VIII. 5. 11). Чем меньше депрессия, тем точнее это приближение. Заметим, что в газовых залежах эта погрешность еще меньше, так как вокруг газовой скважины воронка депрессии более крутая [17, 18].

Вернемся к уравнению (VIII. 5. 9) и найдем закон увеличения условной воронки депрессии $R = R(t)$ в зависимости от времени. Пока воронка депрессии не дошла до границы подземного резервуара, имеет место так называемая первая фаза неустановившегося движения. В период первой фазы воронка депрессии расширяется.

Когда она достигает естественных границ резервуара, начинается так называемая вторая фаза упругого режима; предполагается, что во всем пласте движение происходит по стационарному режиму.

Если границы резервуара являются контуром питания с постоянным давлением, то вторую фазу можно рассматривать как стационарный режим. Если границы резервуара непроницаемы, то во второй фазе будет происходить собственно истощение резервуара с постепенным падением контурного давления.

Будем рассматривать первую фазу упругого режима и найдем закон расширения воронки депрессии.

Предположим, что дебит скважины известен. Объемный дебит скважины q рассчитывается по формуле Дюпюи

$$q = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_к - p_c}{\ln \frac{R}{r_c}}.$$

Отсюда

$$(p_к - p_c)/\ln \frac{R}{r_c} = q\mu/2\pi kh. \qquad \text{(VIII. 5. 12)}$$

Подставляя последнюю формулу в уравнение (VIII. 5. 9) для Q, получаем

$$Q = \pi mh \frac{R^2(t) - r_c^2}{2K} \frac{q\mu}{2\pi kh} = \frac{m\mu}{4kK} [R^2(t) - r_c^2] q = \frac{R^2(t) - r_c^2}{4\varkappa} q.$$

Правая часть этой формулы известна, потому что по условию дебит q задан и, следовательно, отобранное количество жидкости $Q = \int_0^t q dt$ также известно. Для $R(t)$ получаем

$$R^2(t) = r_c^2 + 4\varkappa \frac{Q}{q}. \qquad \text{(VIII. 5. 13)}$$

Будем считать, что скважина начала эксплуатироваться с постоянным дебитом. Тогда $Q = qt$ и формула (VIII. 5. 13) примет следующий вид:

$$R^2(t) = r_c^2 + 4\varkappa t. \qquad \text{(VIII. 5. 14)}$$

В общем случае из формулы (VII. 5. 13) следует

$$\frac{R^2(t)}{r_c^2} = 1 + \frac{4\varkappa Q}{r_c^2 q},$$

$$\ln \frac{R(t)}{r_c} = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{4\varkappa Q}{r_c^2 q}\right). \qquad \text{(VIII. 5. 15)}$$

Теперь можно найти депрессию из формулы Дюпюи, причем значение $\ln \frac{R(t)}{r_c}$ возьмем из формулы (VIII. 5. 15). Тогда получим

$$p_к - p_c = \frac{q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R(t)}{r_c} = \frac{q\mu}{4\pi kh} \ln \left(1 + \frac{4\varkappa Q}{r_c^2 q}\right). \quad \text{(VIII. 5. 16)}$$

В частном случае, когда $q = \text{const}$ и $Q = qt$, формула (VIII. 5. 16) принимает вид:

$$p_к - p_c = \frac{q\mu}{4\pi kh} \ln \left(1 + \frac{4\varkappa t}{r_c^2}\right). \quad \text{(VIII. 5. 17)}$$

Формула (VIII. 5. 17) указывает, как меняется депрессия на забое скважины в зависимости от времени, если скважина начинает эксплуатироваться с постоянным дебитом.

Если $R(t)$ много больше r_c, то из формулы (VIII. 5. 14) получаем

$$R(t) \approx 2\sqrt{\varkappa t}. \quad \text{(VIII. 5. 18)}$$

Сравнения с точными решениями показывают, что эти формулы дают удовлетворительное согласие [15, 16, 18]. Расхождение оказывается меньше 6%.

Рассмотрим кратко обратную задачу. Предположим, что начали эксплуатировать скважину при постоянной депрессии $\Delta p = p_к - p_c = \text{const}$ и требуется определить закон изменения дебита. Принцип исследования остается тем же, но, конечно, получаются несколько иные уравнения. Закон расширения воронки депрессии несколько отличается от формулы (VIII. 5. 18). Для приближенных расчетов с точностью порядка 10—15% можно считать, что при $R \gg r_c$ закон расширения воронки депрессии в обоих случаях дается формулой (VIII. 5. 18); тогда при помощи обычных соотношений для дебитов и депрессий можно определить искомые величины для первой фазы упругого режима.

Аналогично можно исследовать вторую фазу упругого режима. Мы на этом останавливаться не будем, так как задача может быть решена без принципиальных затруднений как методом последовательной смены стационарных состояний [15, 17], так и другими [19, 20, 21].

§ 6. Об одном видоизменении метода интегральных соотношений для решения задач упругого режима фильтрации с неподвижными и подвижными граничными условиями

Приближенные методы, основанные на идеях теории пограничного слоя, предложенные Г. И. Баренблаттом для решения задач нестационарной фильтрации, оказались весьма эффективными [Лт. VII. 37). В основе этих методов лежат некоторые интегральные соотношения, получаемые из исходных дифференциальных уравнений. Ниже дано некоторое преобразование основного ин-

тегрального соотношения — баланса массы — и рассмотрено несколько задач нестационарной фильтрации с неподвижными и подвижными границами.

1. Умножим, как это делается при выводе интегральных соотношений, дифференциальное уравнение упругого режима радиальной фильтрации

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}\right)=\frac{\varkappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)=\frac{\partial p}{\partial t}, \qquad \text{(VIII. 6. 1)}$$

на r^n $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и проинтегрируем в пределах от $r=R_0$ до $r=R_1$, где R_0, R_1 — произвольные величины, постоянные или функции времени,

$$R_0=R_0(t), \quad R_1=R_1(t), \quad R_0<r<R_1.$$

Получим

$$\varkappa\int\limits_{R_0(t)}^{R_1(t)} r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)dr=\int\limits_{R_0(t)}^{R_1(t)}\frac{\partial p}{\partial t}\,r^n dr. \qquad \text{(VIII. 6. 2)}$$

Пусть при $t=0$ распределение давления было стационарным:

$$p(r, 0)=p_{\text{ст}}(r), \qquad \text{(VIII. 6. 3)}$$

причем $\nabla^2 p_{\text{ст}}=0$.

Введем разность (возмущение)

$$u=p(r, t)-p(r, 0)=p(r, t)-p_{\text{ст}}(r). \qquad \text{(VIII. 6. 4)}$$

Так как $\varkappa\nabla^2 u=\dfrac{\partial u}{\partial t}$, то для u также справедливо соотношение (VIII. 6. 2)

$$\varkappa\int\limits_{R_0(t)}^{R_1(t)} r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)dr=\int\limits_{R_0(t)}^{R_1(t)}\frac{\partial u}{\partial t}\,r^n dr. \qquad \text{(VIII. 6. 5)}$$

Обозначая объемный расход

$$Q=Q(r, t)=-\frac{2\pi kh}{\mu}\,r\,\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad \text{(VIII. 6. 6)}$$

и пользуясь формулами интегрирования по частям и дифференцирования определенных интегралов по параметру, вместо (VIII. 6. 5) получаем

$$\frac{Q_0-Q_{\text{ст}}(R_0)}{2\pi kh}\mu R_0^{n-1}-\frac{Q_1-Q_{\text{ст}}(R_1)}{2\pi kh}\mu R_1^{n-1}-(n-1)\{R_1^{n-1}[p_1-p_{\text{ст}}(R_1)]-$$

$$-R_0^{n-1}[p_0-p_{\text{ст}}(R_0)]\}+(n-1)^2\int\limits_{R_0}^{R_1}[p(r, t)-p_{\text{ст}}(r)]\,r^{n-2}\,dr=$$

$$=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{d}{dt}\int\limits_{R_0}^{R_1}p(r, t)\,r^n dr-p_1 R_1^n\frac{dR_1}{dt}+p_0 R_0^n\frac{dR_0}{dt}\right], \qquad \text{(VIII. 6. 7)}$$

где

$$p_0=p(R_0, t);\ p_1=p(R_1, t);\ Q_0=Q(R_0, t);\ Q_1=Q(R_1, t).$$

Согласно условию (VIII. 6. 3) $Q_{ст}(R_0)=Q_{ст}(R_1)=Q_{ст}$, так как при $t=0$ режим стационарный. Полагая $n=1$, из (VIII. 6. 7) получаем условие сохранения массы в виде

$$\frac{\mu\varkappa}{2\pi kh}(Q_0-Q_1)+\frac{1}{2}\left(p_1\frac{dR_1^2}{dt}-p_0\frac{dR_0^2}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\int_{R_0}^{R_1}prdr. \qquad \text{(VIII. 6. 8)}$$

Предположим, что рассматривается некоторое возмущение, начавшееся при $t\geqslant 0$. Тогда под R_1 можно подразумевать, как обычно, условный радиус зоны влияния, подчиняемый условиям гладкости кривой давления $p(r, t)$ в точке $r=R_1$ — условиям

$$Q_1=Q(R_1, t)=Q_{ст},\ p(R_1, t)=p_{ст}(R_1) \qquad \text{(VIII. 6. 9)}$$

и при желании равенствам нулю желаемого количества производных в случае $Q_{ст}=0$:

$$\left(\frac{\partial^k p}{\partial r^k}\right)_{r=R_1}=0,\ k=2, 3,\ldots$$

Тогда из (VIII. 6. 8) получим

$$\frac{\mu\varkappa}{2\pi kh}(Q_0-Q_{ст})+\frac{1}{2}\left[p_{ст}(R_1)\frac{dR_1^2}{dt}-p_0\frac{dR_0^2}{dt}\right]=\frac{d}{dt}\int_{R_0}^{R_1}prdr. \qquad \text{(VIII. 6. 10)}$$

Интегрируя формально по t, получаем

$$\frac{\mu\varkappa}{2\pi kh}[V_0(t)-Q_{ст}t]+\frac{1}{2}\left[\int_{R_1^2(0)}^{R_1^2(t)}p_{ст}(R_1)\,dR_1^2-\int_{R_0^2(0)}^{R_0^2(t)}p_0(R_0, t)\,dR_0^2\right]=$$

$$=\int_{R_0(t)}^{R_1(t)}p(r, t)\,rdr-\int_{R_0(0)}^{R_1(0)}p(r, t)\,rdr, \qquad \text{(VIII. 6. 11)}$$

где $V_0(t)=\int_0^t Q_0dt$ — суммарный объем, протекший через границу R_0. Последний интеграл правой части (VIII. 6. 11) равен нулю, так как по самой идее метода $R_1(0)=R_0(0)$.

В пределах зоны влияния задаются для давления функцией желаемого вида, обычно полиномом, с параметрами, зависящими от времени. Вид параметров устанавливается из граничных условий типа (VIII. 6. 9) и одного или нескольких интегральных соотношений (VIII. 6. 10) или (VIII. 6. 7), причем для R_1 и в зависимости от условий задачи для R_0 получаются обыкновенные дифференциальные уравнения [Лт. VII. 37]. Иногда предпочтительнее задаться условиями для расхода в виде

$$Q(r, t)-Q_{ст}=[Q(R_0, t)-Q_{ст}]F(r, R_0, R_1). \qquad \text{(VIII. 6. 12)}$$

где функция $F(r, R_0, R_1)$ выбирается не содержащей явно время.

Самое грубое приближение, тем не менее в ряде случаев дающее вполне удовлетворительные результаты, получается, если положить $F(r, R_0, R_1)=\text{const}=1$, — это будет метод последовательной смены стационарных состояний (§ 4, 5).

Для большей точности можно положить

$$F(R_0, R_0, R_1)=1,$$
$$F(R_1, R_0, R_1)=0. \qquad \text{(VIII. 6. 13)}$$

Функцию $F(r, R_0, R_1)$ можно подчинить любому количеству условий гладкости. Такой выбор вида функции (VIII. 6. 12) дает хорошие результаты при монотонном характере возмущения. Согласно (VIII. 6. 6)

$$Q(r, t)-Q_{ст}=[Q_0(R_0, t)-Q_{ст}]\,F(r, R_0, R_1)=-\frac{2\pi kh}{\mu}\,r\left(\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{\partial p_{ст}}{\partial r}\right) \qquad \text{(VIII. 6. 14)}$$

откуда получаем, интегрируя последнее уравнение по r в пределах от r до R_1:

$$p(r, t)-p(R_1, t)-[p_{ст}(r)-p_{ст}(R_1)]=[Q_0(R_0, t)-Q_{ст}]\,\frac{\mu}{2\pi kh}\int\limits_r^{R_1}\frac{F(r, R_0, R_1)}{r}\,dr$$

или, так как $p(R_1, t)=p_{ст}(R_1)$,

$$p(r, t)-p_{ст}(r)=\frac{\mu}{2\pi kh}\,[Q_0(R_0, t)-Q_{ст}]\,f(r, R_0, R_1), \qquad \text{(VIII. 6. 15)}$$

где

$$f(r, R_0, R_1)=\int\limits_r^{R_1}\frac{1}{r}\,F(r, R_0, R_1)\,dr. \qquad \text{(VIII. 6. 16)}$$

Подставляя $p(r, t)$ из (VIII. 6. 15) в (VIII. 6. 11), получаем

$$\frac{\mu\varkappa}{2\pi kh}\,[V_0(t)-Q_{ст}t]+\frac{1}{2}\left[\int\limits_{R_1^2(0)}^{R_1^2(t)}p_{ст}(R_1)\,dR_1^2-\int\limits_{R_0^2(0)}^{R_0^2(t)}p_0(R_0, t)\,dR_0^2\right]=$$
$$=\int\limits_{R_0(t)}^{R_1(t)}p_{ст}(r)\,r\,dr+\frac{\mu}{2\pi kh}\,[Q_0(R_0, t)-Q_{ст}]\int\limits_{R_0(t)}^{R_1(t)}f(r, R_0, R_1)\,r\,dr$$

или, замечая, что $R_1(0)=R_0(0)$,

$$\frac{\mu\varkappa}{2\pi kh}\,[V_0(t)-Q_{ст}t]+\frac{1}{2}\left[\int\limits_{R_0^2(0)}^{R_0^2(t)}p_{ст}(r)\,dr^2-\int\limits_{R_0^2(0)}^{R_0^2(t)}p_0(R_0, t)\,dR_0^2\right]=$$
$$=\frac{\mu}{2\pi kh}\,[Q_0(R_0, t)-Q_{ст}]\int\limits_{R_0(t)}^{R_1(t)}f(r, R_0, R_1)\,r\,dr. \qquad \text{(VIII. 6. 17)}$$

Учитывая (VIII. 6. 15), правую часть (VIII. 6. 17) можно представить также в виде

$$p_0(R_0, t)-p_{ст}(R_0)=\frac{\mu}{2\pi kh}\,[Q_0(R_0, t)-Q_{ст}]\,f(R_0, R_0, R_1), \qquad \text{(VIII. 6. 18)}$$

где

$$f(R_0, R_0, R_1)=\int\limits_{R_0}^{R_1}\frac{F(r, R_0, R_1)}{r}\,dr. \qquad \text{(VIII. 6. 19)}$$

Отсюда

$$\frac{\mu}{2\pi kh}[Q_0(R_0, t)-Q_{ст}]=\frac{p_0(R_0, t)-p_{ст}(R_0)}{f(R_0, R_0, R_1)}, \qquad \text{(VIII. 6. 20)}$$

$$\frac{\mu\varkappa}{2\pi kh}[V_0(t)-Q_{ст}t]+\frac{1}{2}\left[\int_{R_0^2(0)}^{R_0^2(t)} p_{ст}(r)\,dr^2-\int_{R_0^2(0)}^{R_0^2(t)} p_0(R_0, t)\,dR_0^2\right]=$$

$$=\frac{p_0(R_0, t)-p_{ст}(R_0)}{f(R_0, R_0, R_1)}\int_{R_0(t)}^{R_1(t)} f(r, R_0, R_1)\,r\,dr. \qquad \text{(VIII. 6. 21)}$$

В зависимости от условий задачи можно выбирать интегральное соотношение в виде (VIII. 6. 17) или (VIII. 6. 21), в дополнение к которым следует использовать связь между давлением и расходами (VIII. 6. 15).

Ниже рассмотрено несколько примеров нестационарной фильтрации упругой жидкости с неподвижными и подвижными граничными условиями.

2. Ограничимся простейшей аппроксимацией $F(r, R_0, R_1)$ в виде линейной зависимости

$$F(r, R_0, R_1)=(R_1-r)/(R_1-R_0). \qquad \text{(VIII. 6. 22)}$$

Согласно (VIII. 6. 16) и (VIII. 6. 17)

$$f(r, R_0, R_1)=\int_r^{R_1}\frac{1}{r}\frac{R_1-r}{R_1-R_0}\,dr=\frac{R_1}{R_1-R_0}\left(\frac{r}{R_1}+\ln\frac{R_1}{r}-1\right), \qquad \text{(VIII. 6. 23)}$$

$$f(R_0, R_0, R_1)=\frac{R_1}{R_1-R_0}\left(\frac{R_0}{R_1}+\ln\frac{R_1}{R_0}-1\right)=\frac{R_1}{R_1-R_0}\ln\frac{R_1}{R_0}-1, \qquad \text{(VIII. 6. 24)}$$

$$\int_{R_0(t)}^{R_1(t)} f(r, R_0, R_1)\,r\,dr=\frac{1}{12}R_1^2+\frac{1}{12}R_0R_1+$$

$$+\frac{1}{3}R_0^2-\frac{R_1}{2(R_1-R_0)}R_0^2\ln\frac{R_1}{R_0}. \qquad \text{(VIII. 6. 25)}$$

По методу последовательной смены, полагая $F(r, R_0, R_1)=1$, получаем более грубое приближение

$$f(r, R_0, R_1)=\int_r^{R_1}\frac{dr}{r}=\ln\frac{R_1}{r}, \qquad \text{(VIII. 6. 26)}$$

$$f(R_0, R_0, R_1)=\ln\frac{R_1}{R_0}, \qquad \text{(VIII. 6. 27)}$$

$$\int_{R_0}^{R_1} f(r, R_0, R_1)\,r\,dr=\int_{R_0}^{R_1} r\ln\frac{R_1}{r}\,dr=\frac{1}{2}\left(\frac{R_1^2-R_0^2}{2}-R_0^2\ln\frac{R_1}{R_0}\right). \qquad \text{(VIII. 6. 28)}$$

Рассмотрим два примера.

I. Нагнетание расхода $Q_0(t)$ в скважину постоянного радиуса $R_0=\text{const}$ в неограниченном пласте. Нулевые начальные условия $p_{ст}(r)=0$, $Q_{ст}=0$.

Условие (VIII. 6. 17) принимает вид:

$$\frac{\mu\varkappa}{2\pi kh}V_0(t)=\frac{\mu Q_0(t)}{2\pi kh}\left[\frac{R_1^2+R_0R_1}{12}+\frac{R_0^2}{3}-\frac{R_1R_0^2}{2(R_1-R_0)}\ln\frac{R_1}{R_0}\right]$$

или, обозначая

$$\varrho = \varrho(t) = \frac{R_1}{R_0}, \qquad \text{(VIII. 6. 29)}$$

$$\frac{\varkappa V_0(t)}{Q_0(t) R_0^2} = \frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho. \qquad \text{(VIII. 6. 30)}$$

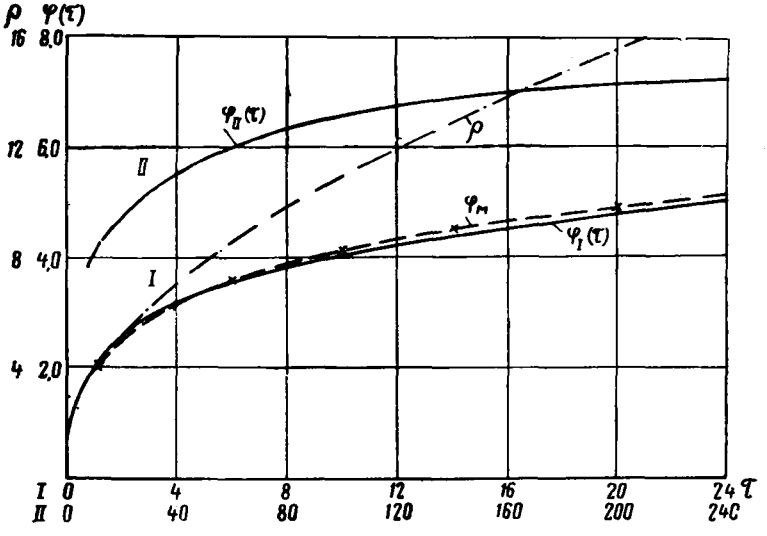


Рис. VIII. 9. Графики зависимости депрессии от времени при притоке с постоянным дебитом к скважине конечного радиуса в неограниченном пласте: пунктир — по точному решению, сплошные линии — по расчету методом интегральных соотношений.

Отсюда можно найти ϱ для заданного t. Давление на скважине согласно (VIII. 6. 18) и (VIII. 6. 24) меняется по закону

$$p_0(t) = \frac{\mu Q_0(t)}{2\pi kh}\left(\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho - 1\right). \qquad \text{(VIII. 6. 31)}$$

При $Q_0(t) = \text{const} = Q_0$, из (VIII. 6. 30) находим

$$\tau = \frac{\varkappa t}{R_0^2} = \frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho. \qquad \text{(VIII. 6. 32)}$$

Раскрывая неопределенность, из (VIII. 6. 32) получаем $\tau = 0$ при $\varrho = 1$.

На рис. VIII. 9 приведена кривая $\tau = \tau(\varrho)$ согласно (VIII. 6. 32). Задаваясь различными значениями τ, по кривой рис. VIII. 9 можно найти соответствующие значения ϱ, а затем по уравнению (VIII. 6. 31) $p_0(t)$.

Для сравнения с точным решением, приведенным в книге Маскета [6], выражающимся трудно вычисляемым несобственным интегралом

$$p_0 = \frac{2Q_0\mu}{\pi^3 kh}\int_0^\infty \frac{1-e^{-z^2\tau}}{z^3\left[J_1^2(z)+Y_1^2(z)\right]}\,dz \qquad \text{(VIII. 6. 33)}$$

(J_1, Y_1 — функции Бесселя действительного аргумента первого и второго рода первого порядка), на рис. VIII. 9 приведены кривые отношений

$$\varphi = \pi^3 khp_0 / 2Q_0 \mu \qquad \text{(VIII. 6. 34)}$$

по точному уравнению (VIII. 6. 33) ($\varphi_м$) и по уравнениям (VIII. 6. 31) и (VIII. 6. 32):

$$\frac{2\pi khp_0}{\mu Q_0} = \frac{\varrho}{\varrho - 1} \ln \varrho - 1.$$

$$\varphi = \frac{\pi^3 khp_0}{2Q_0 \mu} = \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\varrho}{\varrho - 1} \ln \varrho - 1\right). \qquad \text{(VIII. 6. 35)}$$

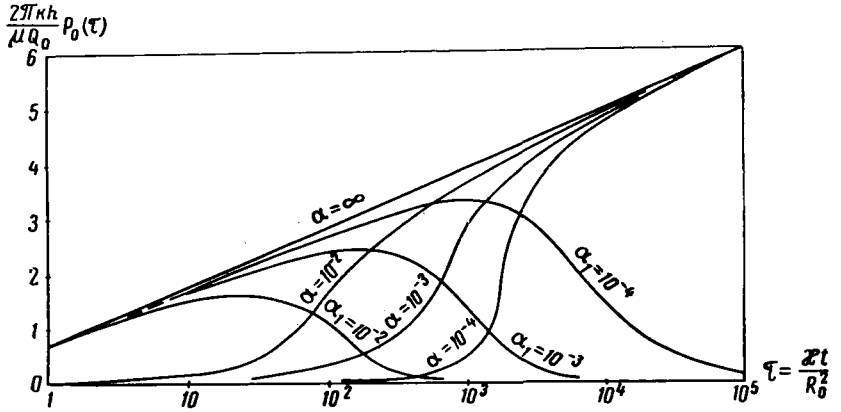


Рис. VIII. 10. Графики зависимости депрессии от времени при притоке к скважине конечного радиуса в неограниченном пласте при различных законах отбора.

Как видно из рис. VIII. 9, точная и приближенная кривые хорошо совпадают.

На рис. VIII. 10 показаны три серии кривых, соответствующих следующим законам изменения дебита $Q(t)$, закачиваемого в скважину постоянного радиуса в неограниченном пласте:

1) $Q(t) = \text{const} = Q_0$ — постоянный темп нагнетания, дебит постоянный;

2) $Q(t) = Q_0(1 - e^{-\alpha\tau})$ ($Q_0 = \text{const}$ соответствует $\alpha = \infty$) — постепенное увеличение темпа нагнетания, дебит возрастает от нуля, приближаясь к предельному значению Q_0;

3) $Q(\tau) = Q_0 e^{-\alpha_1 \tau}$ — постепенное уменьшение темпа нагнетания, дебит уменьшается от начального значения Q_0, приближаясь в пределе к нулю.

На графиках рис. VIII. 10 по оси абсцисс отложено в логарифмическом масштабе безразмерное время $\tau = \frac{\varkappa t}{R_0^2}$, по оси ординат — безразмерное давление в виде отношения

$$p^*(\tau) = \frac{2\pi kh}{\mu Q_0} p_0(\tau). \qquad \text{(VIII. 6. 36)}$$

Из формул (VIII. 6. 31) и (VIII. 6. 30) для этих трех случаев после вычислений получим:

1) $\tau = \frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho,$

$$\frac{2\pi kh}{\mu Q_0} p_0(\tau) = p^*(\tau) = \frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho - 1; \qquad \text{(VIII. 6. 37)}$$

2) $\frac{\tau}{1-e^{-\alpha\tau}} - \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho,$

$$\frac{2\pi kh}{\mu Q_0} p_0(\tau) = p^*(t) = \left(\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho - 1\right)(1-e^{-\alpha\tau}); \qquad \text{(VIII. 6. 38)}$$

3) $\frac{1}{\alpha_1}(e^{\alpha_1\tau}-1) = \frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho$

или

$$\tau = \frac{1}{\alpha_1}\ln\left\{\alpha_1\left[\frac{\varrho^2+\varrho}{12} + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho\right] + 1\right\},$$

$$\frac{2\pi kh}{\mu Q_0} p_0(\tau) = p^*(\tau) = \left(\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho - 1\right)e^{-\alpha_1\tau}. \qquad \text{(VIII. 6. 39)}$$

Кривые рис. VIII. 10 построены для значений $\alpha = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$, $\alpha_1 = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

Из рассмотрения кривых рис. VIII. 10 можно сделать несколько интересных заключений.

1. Кривая $Q_0 = \text{const}$, соответствующая $\alpha = \infty$ или $\alpha_1 = 0$, практически очень мало отличается от прямой. Величина $p^*(\tau)$, которую в этом случае можно трактовать так же, как безразмерное фильтрационное сопротивление, возрастает со временем практически по логарифмическому закону.

2. Кривые с параметрами α, соответствующими второму случаю, при $\tau \geqslant 10^4$, очень мало отличаются от прямой $Q_0 = \text{const}$.

3. Кривые с параметром α_1, соответствующие третьему случаю, имеют экстремум.

Если задано давление $p_0(t)$, то расчет усложняется, так как для $V_0(t)$ получим из (VIII. 6. 30) обыкновенное дифференциальное уравнение, содержащее ϱ в виде параметра, который должен быть найден из дополнительного уравнения

$$\frac{\varkappa V_0(t)}{R_0^2} = \frac{dV_0(t)}{dt}\left[\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho\right], \qquad \text{(VIII. 6. 40)}$$

$$p_0(t) = \frac{\mu}{2\pi kh}\left(\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho - 1\right)\frac{dV_0(t)}{dt}. \qquad \text{(VIII. 6. 41)}$$

В этом случае проще всего поступить так. Разделим (VIII. 6. 40) на (VIII. 6. 41):

$$\frac{\varkappa V_0(t)}{R_0^2 p_0(t)} = \frac{2\pi kh}{\mu}\,\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho - 1}. \qquad \text{(VIII. 6. 42)}$$

Так как $p_0(t)$ известно, то, дифференцируя (VIII. 6. 42) по времени, для $\varrho(t)$ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{\varkappa}{R_0^2}\frac{p_0(t)V_0'(t)-V_0(t)p_0'(t)}{p_0^2(t)}=$$

$$=\frac{2\pi kh}{\mu}\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}\right]\frac{d\varrho}{dt}, \quad \text{(VIII. 6. 43)}$$

или, учитывая (VIII. 6. 41) и (VIII. 6. 40),

$$\frac{\varkappa}{R_0^2}\left\{\frac{1}{p_0(t)}\frac{2\pi khp_0(t)}{\mu\left(\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{p_0'(t)}{p_0^2(t)}\frac{2\pi kh}{\mu}\frac{R_0^2p_0(t)}{\varkappa}\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}\right\}=$$

$$=\frac{2\pi kh}{\mu}\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}\right]\frac{d\varrho}{dt},$$

или

$$\frac{\varkappa}{R_0^2}\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}-\frac{p_0'(t)}{p_0(t)}\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}=$$

$$=\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}\right]\frac{d\varrho}{dt}. \quad \text{(VIII. 6. 44)}$$

Для удобства уравнение (VIII. 6. 44) можно представить в безразмерном виде, вводя безразмерное время $\tau=\frac{\varkappa t}{R_0^2}$

$$\frac{d\varrho}{dt}=\frac{d\varrho}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{\varkappa}{R_0^2}\frac{d\varrho}{d\tau}, \quad \frac{p_0'(t)}{p_0(t)}=\frac{d\ln p}{dt}=\frac{d\ln p}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}=\frac{\varkappa}{R_0^2}\frac{d\ln p}{d\tau}. \quad \text{(VIII. 6. 45)}$$

Подставляя в (VIII. 6. 44), получаем

$$\frac{1}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}-\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}\frac{d\ln p}{d\tau}=$$

$$=\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}\right]\frac{d\varrho}{d\tau}$$

или

$$1-\left[\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho\right]\frac{d\ln p}{d\tau}=$$
$$=\left\{\frac{d}{d\varrho}\left[\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}\left[\frac{1}{\varrho-1}-\frac{\ln\varrho}{(\varrho-1)^2}\right]\right\}\frac{d\varrho}{d\tau}. \quad \text{(VIII. 6. 46)}$$

В общем случае при $p(t)\neq\text{const}$ уравнение (VIII. 6. 46) приходится интегрировать численно. При $p(t)=\text{const}$ оно интегрируется в квадратурах:

$$\tau=\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho-$$
$$-\int_1^{\varrho}\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}\left[\frac{1}{\varrho-1}-\frac{\ln\varrho}{(\varrho-1)^2}\right]d\varrho. \quad \text{(VIII. 6. 47)}$$

При $\varrho=1$ подынтегральная функция в (VIII. 6. 47), как легко убедиться равна нулю:

$$\lim_{\varrho\to 1}\frac{\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho-1}\left[\frac{1}{\varrho-1}-\frac{\ln\varrho}{(\varrho-1)^2}\right]=$$
$$=\frac{\left[\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}\right]-\left[\frac{\varrho}{2(\varrho-1)}\ln\varrho\right]'_{\varrho=1}}{\frac{1}{\varrho}-\frac{\ln\varrho}{(\varrho-1)^2}}\left[\frac{1}{\varrho-1}-\frac{\ln\varrho}{(\varrho-1)^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{\varrho}}{1}\right)_{\varrho\to 1}=0.$$

При достаточно больших значениях ϱ ($\varrho>10$), как следует из формул (VIII. 6. 47) и (VIII. 6. 32), функции $\tau(\varrho)$ по уравнениям (VIII. 6. 32) для $Q_0(t)=\text{const}$ и (VIII. 6. 47) для $p_0=\text{const}$ практически совпадают.

Для удобства численного интегрирования уравнения (VIII. 6. 46) перепишем его в виде

$$\frac{d\tau}{d\varrho}=\frac{\omega_1(\varrho)}{\omega_2(\varrho,\tau)},$$
$$\omega_1(\varrho)=\frac{2\varrho+1}{12}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ln\varrho}{\varrho-1}\right)-\frac{\left[\frac{1}{12}(\varrho^2+\varrho)+\frac{1}{3}-\frac{\varrho\ln\varrho}{2(\varrho-1)}\right]\left(1-\frac{\ln\varrho}{\varrho}\right)}{(\varrho-1)\left(\frac{\varrho\ln\varrho}{\varrho-1}-1\right)},$$
$$\omega_2(\varrho,\tau)=1-\left[\frac{\varrho^2+\varrho}{12}+\frac{1}{3}-\frac{\varrho\ln\varrho}{2(\varrho-1)}\right]\frac{d\ln p}{d\tau}; \quad \text{(VIII. 6. 48)}$$

При $p=\text{const}$ это уравнение переходит в (VIII. 6. 47).

На рис. VIII. 11 для иллюстрации приведено несколько кривых, получен-

ных по результатам расчетов на быстродействующей электронной счетной машине «Урал», произведенных В. А. Томельгасом, для следующих законов зависимости $p(\tau)$:

а) уменьшения давления нагнетания $p(\tau)$ по экспоненциальному закону $p = p_0 e^{-\alpha\tau}$;

б) уменьшения давления нагнетания $p(\tau)$ по линейному закону $p = p_0(1-\alpha_1\tau)$.

Для значений $\alpha = 10^{-4}$, 10^{-5}, 10^{-6} и $\alpha_1 = 10^{-4}$, 10, 10^{-5}, 10^{-6} были получены сначала зависимости $\varrho(\tau)$, затем при помощи их построены кривые изменения

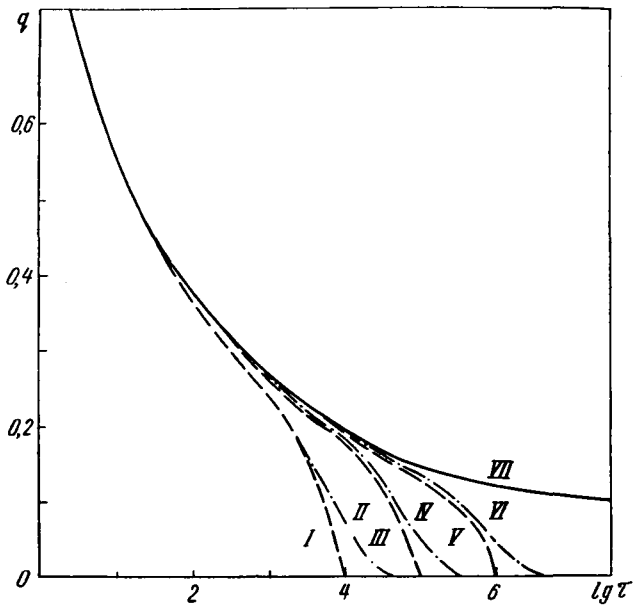


Рис. VIII. 11. Графики зависимости дебита от времени при притоке к скважине конечного радиуса в неограниченном пласте при различных законах изменения депрессии.

I — $p(\tau) = p_0(1-10^{-4}\tau)$; *II* — $p(\tau) = p_0 e^{-10^{-4}\tau}$; *III* — $p(\tau) = p_0(1-10^{-5}\tau)$; *IV* — $p(\tau) = p_0 e^{-10^{-5}\tau}$; *V* — $p(\tau) = p_0(1-10^{-6}\tau)$; *VI* — $p(\tau) = p_0 e^{-10^{-6}\tau}$; *VII* — $p(\tau) = \text{const}$.

безразмерного дебита нагнетания $q(\tau)$, показанные на рис. VIII. 11, по следующей формуле:

$$q(\tau) = \frac{\mu Q(t)}{2\pi kh p_0} = \frac{p(t)/p(0)}{\frac{\varrho}{\varrho-1}\ln\varrho - 1}. \qquad \text{(VIII. 6. 49)}$$

Из рис. VIII. 11 видно, что для значения $\lg\tau < 3$ все кривые практически совпадают между собой. Это указывает на то, что для рассматриваемых законов изменения давления величина $q(\tau)$ вначале практически не зависит от характера изменения давления.

Построения кривых рис. VIII. 9 — VIII. 11 и все связанные с ними вычисления были произведены аспирантом кафедры общей и подземной гидравлики МИНХ и ГП им. акад. И. М. Губкина Лан Чжан-сином.

II. Нагнетание маловязкого газа в водоносный пласт, $Q_{ст} = 0$, $p_{ст} = 0$. Более полное решение этой задачи дано в § 3 главы X.

Эта задача относится к случаю $R_0 = R_0(t) \neq \text{const}$ и для двух упругих жидкостей была рассмотрена в точной постановке Н. Н. Веригиным для условий «поршневого» вытеснения [23]. Ниже дано решение с учетом неполноты вытеснения для случая, когда давление p_0 на границе газа и вытесняемой воды постоянно. Пренебрегая радиусом скважины по сравнению с областью, занятой газом, получаем

$$V_0(t) = m\,\bar{\sigma}\pi R_0^2(t)\,h, \qquad \text{(VIII. 6. 50)}$$

где $\bar{\sigma} < 1$ — суммарный коэффициент вытеснения, средний по объему, занятому газом, зависящий от фазовых проницаемостей газа и воды и от степени вытеснения по мощности. Последняя зависит от характера неоднородности пласта по вертикали и определяется в зависимости от капиллярных характеристик.

Для ориентировочных расчетов, основанных на имеющейся совокупности лабораторных и натурных наблюдений, можно принять $\bar{\sigma} \approx 0{,}10 \div 0{,}14$.

Из формул (VIII. 6. 17) и (VIII. 6. 25), учитывая, что $p_0 = \text{const}$, $R_0(0) = 0$, имеем

$$\frac{\mu\varkappa}{2\pi kh} V_0(t) - p_0 \frac{R_0^2(t)}{2} = \frac{\mu Q_0(t)}{2\pi kh}\left[\frac{1}{12} R_1^2(t) + \frac{1}{12} R_0(t) R_1(t) + \frac{1}{3} R_0^2(t) - \right.$$

$$\left. - \frac{R_1(t) R_0^2(t)}{2[R_1(t) - R_0(t)]} \ln \frac{R_1(t)}{R_0(t)}\right] = \frac{\mu Q_0(t) R_0^2(t)}{2\pi kh} \times$$

$$\times\left[\frac{1}{12}(\varrho^2 + \varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho - 1)} \ln \varrho\right]. \qquad \text{(VIII. 6. 51)}$$

Сокращая на $\dfrac{\mu R_0^2(t)}{2\pi kh}$ и учитывая (VIII. 6. 50), получаем

$$\varkappa m\,\bar{\sigma}\pi h - \frac{1}{2} p_0 \frac{2\pi kh}{\mu} = Q_0(t)\left[\frac{1}{12}(\varrho^2 + \varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho - 1)} \ln \varrho\right] \qquad \text{(VIII. 6. 52)}$$

или, подставляя в (VIII. 6. 52) значение Q_0 из (VIII. 6. 18) с учетом (VIII. 6. 24),

$$\varkappa m\,\bar{\sigma}\pi h - \frac{p_0}{2} \frac{2\pi kh}{\mu} = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{p_0}{\dfrac{\varrho}{\varrho - 1} \ln \varrho - 1}\left[\frac{1}{12}(\varrho^2 + \varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho - 1)} \ln \varrho\right],$$

$$\varkappa m\,\bar{\sigma}\pi h = \frac{2\pi kh}{\mu} p_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{\dfrac{1}{12}(\varrho^2 + \varrho) + \dfrac{1}{3} - \dfrac{\varrho}{2(\varrho - 1)} \ln \varrho}{\dfrac{\varrho}{\varrho - 1} \ln \varrho - 1}\right]. \qquad \text{(VIII. 6. 53)}$$

Из (VIII. 6. 53) следует, что при $p_0 = \text{const}$, $\varkappa m\,\bar{\sigma}\pi h = \text{const}$, $\varrho = \text{const}$ и, следовательно, согласно (VIII. 6. 18) и (VIII. 6. 24) $Q_0(t) = Q_0 = \text{const}$ и далее наряду с (VIII. 6. 50)

$$V_0(t) = m\,\bar{\sigma}\pi R_0^2(t)\,h = Q_0 t. \qquad \textbf{(VIII. 6. 54)}$$

Найдем ϱ и связь между p_0 и Q_0, считая Q_0 заданным. Формулу (VIII. 6. 53) теперь можно представить, учитывая (VIII. 6. 18) и (VIII. 6. 24), так:

$$\varkappa m \bar{\sigma} \pi h = \frac{2\pi kh}{\mu} \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \left(\frac{\varrho}{\varrho - 1} \ln \varrho - 1 \right) \left[\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{12}(\varrho^2 + \varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho - 1)} \ln \varrho}{\frac{\varrho}{\varrho - 1} \ln \varrho - 1} \right] =$$

$$= Q_0 \left[\frac{\varrho}{2(\varrho - 1)} \ln \varrho - \frac{1}{2} + \frac{1}{12}(\varrho^2 + \varrho) + \frac{1}{3} - \frac{\varrho}{2(\varrho - 1)} \ln \varrho \right] =$$

$$= Q_0 \left[\frac{1}{12}(\varrho^2 + \varrho) - \frac{1}{6} \right]. \qquad \text{(VIII. 6. 55)}$$

Параметр ϱ определяется из квадратного уравнения $\varrho^2 + \varrho - 2 - \frac{12 \varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0} = 0$,

$$\varrho = \sqrt{2{,}25 + \frac{12 \varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0}} - \frac{1}{2}. \qquad \text{(VIII. 6. 56)}$$

Обычно параметр $\varkappa m \bar{\sigma} \pi h / Q_0$ выражается числом порядка сотен и тысяч. В этом случае

$$\varrho \approx \sqrt{\frac{12 \varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0}} \qquad \text{(VIII. 6. 56а)}$$

и из (VIII. 6. 18), (VIII. 6. 24)

$$p_0 = \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \left(\frac{\varrho}{\varrho - 1} \ln \varrho - 1 \right) \approx \frac{\mu Q_0}{2\pi kh} \left[\ln \sqrt{\frac{12 \varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0}} - 1 \right] =$$

$$= \frac{\mu Q_0}{4\pi kh} \left(\ln \frac{12 \varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0} - 2 \right) = \frac{\mu Q_0}{4\pi kh} \left(\ln \frac{\varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0} + 0{,}49 \right). \qquad \text{(VIII. 6. 57)}$$

Представляет интерес сравнить формулу (VIII. 6. 57) с решением по более грубому методу последовательной смены стационарных состояний и с точным решением [24]. По методу последовательной смены стационарных состояний вместо (VIII. 6. 51), учитывая (VIII. 6. 28), будем иметь:

$$\frac{\mu \varkappa}{2\pi kh} V_0(t) - p_0 \frac{R_0^2(t)}{2} = \frac{\mu Q_0 R_0^2(t)}{2\pi kh} \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho^2 - 1}{2} - \ln \varrho \right), \qquad \text{(VIII. 6. 58)}$$

где ϱ определено формулой (VIII. 6. 29).

Согласно (VIII. 6. 18) и (VIII. 6. 27)

$$p_0 = \frac{Q_0 \mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_1}{R_0} = \frac{Q_0 \mu}{2\pi kh} \ln \varrho. \qquad \text{(VIII. 6. 59)}$$

Учитывая (VIII. 6. 56), из (VIII. 6. 58) и (VIII. 6. 59) получаем

$$\varkappa m \bar{\sigma} \pi h = \frac{2\pi kh}{\mu} p_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho^2 - 1}{2} - \ln \varrho \right) / \ln \varrho \right] = Q_0 \frac{\varrho^2 - 1}{4},$$

откуда

$$\varrho^2 - 1 - \frac{4\varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0} = 0,$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{4\varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0} + 1} \approx \sqrt{\frac{4\varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0}}. \qquad \text{(VIII. 6. 60)}$$

Подставляя в (VIII. 6. 59), получаем

$$p_0 = \frac{Q_0 \mu}{2\pi kh} \ln \sqrt{\frac{4\varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0}} = \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \left(\ln \frac{\varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0} + \ln 4 \right) =$$

$$= \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \left(\ln \frac{\varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0} + 1{,}38 \right), \qquad \text{(VIII. 6. 61)}$$

что, вообще говоря, при обычных значениях параметра $\frac{\varkappa m \bar{\sigma} \pi h}{Q_0}$ порядка тысяч сравнительно мало отличается от (VIII. 6. 57). Точное решение для случая «поршневого» вытеснения воды маловязким газом приведено в [24]. Можно показать, на чем мы не останавливаемся, что с учетом неполноты вытеснения, т. е. с введением коэффициента $\bar{\sigma}$, точное решение будет иметь вид:

$$p_0 = -\frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} e^{\alpha} \operatorname{Ei}(-\alpha), \qquad \text{(VIII. 6. 62)}$$

где

$$-\operatorname{Ei}(-\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-u}\, du}{u}$$

интегральная показательная функция;

$$\alpha = \frac{Q_0}{4\varkappa\pi m \bar{\sigma} h}. \qquad \text{(VIII. 6. 63)}$$

При больших значениях параметра $\frac{\varkappa\pi m \bar{\sigma} h}{Q_0}$ величина α весьма мала (порядка сотых долей единицы) и $e^{\alpha} \approx 1$, $-\operatorname{Ei}(-\alpha) \approx \ln \frac{1}{\alpha} - 0{,}577$.

Подставляя в (VIII. 6. 62), получаем

$$p_0 = \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \left(\ln \frac{\varkappa\pi m \bar{\sigma} h}{Q_0} + \ln 4 - 0{,}577 \right) =$$

$$= \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \left(\ln \frac{\varkappa\pi m \bar{\sigma} h}{Q_0} + 0{,}805 \right), \qquad \text{(VIII. 6. 64)}$$

т. е. между значениями, даваемыми формулами (VIII. 6. 57) и (VIII. 6. 61), но ближе к формуле (VIII. 6. 57).

§ 7. Некоторые методы определения параметров пластов и скважин при упругом режиме фильтрации

Формула (VIII. 3. 9) была выведена в предположении, что в начальный момент давление было всюду постоянным и равным p_0.

Пусть теперь $p(r, 0) = f(r)$, причем ограничимся случаем, когда начальное распределение давления $f(r)$ стационарно и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 f(r) = \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df}{dr} = 0.$$

Положим

$$p(r, t) = p_1(r, t) + f(r).$$

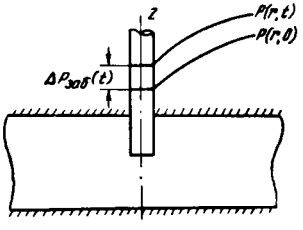


Рис. VIII. 12. График изменения забойного давления после прекращения притока.

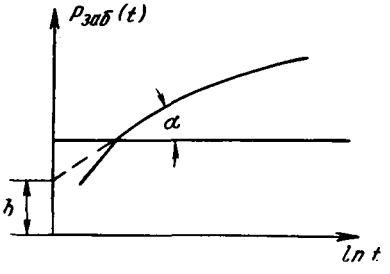


Рис. VIII. 13. График восстановления забойного давления в координатах $p_{заб}(t)$, $\ln t$.

Очевидно, что с учетом сделанного предположения

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial t} = \varkappa \nabla^2 p_1,$$

т. е. если начальное стационарное распределение давления $f(r)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то можно пользоваться формулой (VIII. 3. 9), но отсчет давления вести от стационарного состояния (а не от p_0).

Предположим, что произошла мгновенная остановка притока в скважину, ранее эксплуатируемую с дебитом Q_0 при стационарном режиме. После остановки скважины забойное давление $p_{заб}$ начнет повышаться.

Пусть радиус скважины — действительный или приведенный — равен r_c. Будем пользоваться формулой (VIII. 3. 23), справедливой по истечении короткого времени с момента остановки скважины.

Очевидно, что мгновенная остановка скважины эквивалентна уменьшению расхода на Q_0. Давление будем отсчитывать от начального стационарного состояния. Тогда согласно (VIII. 2. 63) имеем (рис. VIII. 12)

$$\Delta p = p_{заб}(t) - p_{заб}(0) = \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \ln \frac{2{,}25 \varkappa t}{r_c^2} = \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh}\left(\ln \frac{2{,}25 \varkappa}{r_c^2} + \ln t\right). \quad \text{(VIII. 7. 1)}$$

График восстановления давления имеет вид, показанный на рис. VIII. 13, причем его средний прямолинейный участок отвечает формуле (VIII. 7. 1). Из рассмотрения этого графика следует, что отрезок b, отсекаемый на оси ор-

динат при продолжении прямолинейного участка, и угол наклона α к оси абсцисс удовлетворяют уравнениям

$$b = \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \ln \frac{2{,}25\varkappa}{r_c^2} = \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh} \ln \frac{2{,}25\, kK}{m \mu r_c^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q_0 \mu}{4\pi kh}. \qquad \text{(VIII. 7. 2)}$$

Из этих выражений можно определить величины $\varkappa/r_c^2$ и kh/μ. Основное условие применимости формулы (VIII. 7. 1) заключается в предположении мгновенной остановки притока в скважину. В действительности обычно всегда имеется некоторый свободный объем, занятый газом, вследствие чего остановка притока происходит не мгновенно.

Миллер и другие авторы [25] показали, что в реальных условиях прямолинейный участок (рис. VIII. 13) может за счет указанных обстоятельств появиться лишь через значительный промежуток времени. Так как длительная остановка скважины нежелательна, были развиты методы определения параметров пласта по наблюдениям неустановившихся режимов, учитывающие не мгновенную остановку скважины. Теория одного из этих методов рассмотрена ниже [25, 26].

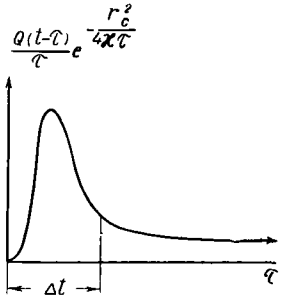


Рис. VIII. 14.

Для случая не мгновенной остановки скважины воспользуемся формулой (VIII. 3. 10), в которой под $Q(t)$ будем подразумевать величину

$$Q(t) = Q_0(0) - Q_0(t),$$

т. е. изменение расхода в процессе остановки скважины.

Согласно формуле (VIII. 3. 10), в которой полагаем $a = 0$, получаем

$$\Delta p = \frac{\mu}{4\pi kh} \int_0^t \frac{Q(t-\tau)}{\tau} e^{-\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau}} d\tau. \qquad \text{(VIII. 7. 3)}$$

График подынтегральной функции имеет вид, представленный на рис. VIII. 14. Особенность этого графика — резкая пика — локализована внутри малого интервала времени Δt.

Так как расход реальной скважины за малый интервал времени можно считать постоянным, то благодаря большой величине $\varkappa$ уже при достаточно малых τ можно считать

$$e^{-\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau}} = 1^1. \qquad \text{(VIII. 7. 4)}$$

---

[1] Величина $\frac{1}{\tau} e^{\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau}}$ достигает максимума, как легко видеть, при $\tau = \frac{1}{4\varkappa} r_c^2$. Если положить $r_c = 10$ *см*, $\varkappa = 10^3$ *см*^{2}/*сек*, то $\tau_{\text{экстр}} = 0{,}025$ *сек*. Достаточно положить $\tau = 2$ *сек*, чтобы (VIII. 7. 4) выполнялось с большой степенью точности.

Формулу (VIII. 7. 3) можно представить в виде

$$\Delta p = \frac{\mu}{4\pi kh}\left[\int_0^{\Delta t}\frac{1}{\tau}Q(t-\tau)\,e^{-\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau}}d\tau+\int_{\Delta t}^{t}\frac{1}{\tau}Q(t-\tau)\,e^{-\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau}}d\tau\right]\approx$$

$$\approx\frac{\mu}{4\pi kh}\left[Q(t)\int_0^{\Delta t}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau}}d\tau+\int_{\Delta\tau}^{t}\frac{1}{\tau}Q(t-\tau)\,d\tau\right], \quad \text{(VIII. 7. 5)}$$

где Δt — малый интервал времени, после которого можно считать справедливым (VIII. 7. 4).

Вводя подстановку

$$u=\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau},$$

получаем

$$\int_0^{\Delta t}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{r_c}{4\varkappa\tau}}d\tau=\int_{\frac{r_c^2}{4\varkappa\Delta t}}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du=-\operatorname{Ei}\left(-\frac{r_c^2}{4\varkappa\Delta t}\right)\approx\ln\frac{2{,}25\,\varkappa\Delta t}{r_c^2}$$

(если Δt порядка 1 *сек*). Тогда (VIII. 7. 5) можно представить в виде

$$\Delta p=\frac{\mu}{4\pi kh}\left[Q(t)\ln\frac{2{,}25\,\varkappa}{r_c^2}+Q(t)\ln\Delta t+\int_{\Delta t}^{t}\frac{Q(t-\tau)}{\tau}d\tau\right]. \quad \text{(VIII. 7. 6)}$$

Для устранения неопределенности в выборе Δt заметим, что

$$\ln\Delta t=\int_1^{\Delta t}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Тогда можно написать

$$Q(t)\ln\Delta t=Q(t)\int_1^{\Delta t}\frac{d\tau}{\tau}\approx\int_1^{\Delta t}\frac{Q(t-\tau)}{\tau}d\tau.$$

Подставляя это выражение в (VIII. 7. 6) получаем

$$\Delta p=\frac{\mu}{4\pi kh}\left[Q(t)\ln\frac{2{,}25\,\varkappa}{r_c^2}+\int_1^{t}\frac{Q(t-\tau)}{\tau}d\tau\right] \quad \text{(VIII. 7. 7)}$$

или, вводя подстановку $t-\tau=\tau'$,

$$\Delta p=\frac{\mu}{4\pi kh}\left[Q(t)\ln\frac{2{,}25\,\varkappa}{r_c^2}+\int_0^{t-1}\frac{Q(\tau)}{t-\tau}d\tau\right]. \quad \text{(VIII. 7. 8)}$$

Интеграл в (VIII.7.7) или (VIII.7.8) всегда можно вычислить с любой точностью. Можно, например, воспользоваться формулой

$$J(t)=\int_0^{t-1}\frac{Q(\tau)}{t-\tau}\,d\tau=\int_0^{\tau_1}+\int_{\tau_1}^{\tau_2}+\ldots+\int_{\tau_{n-1}}^{t-1}=\bar{Q}_1\ln\frac{t}{t-\tau_1}+\bar{Q}_2\ln\frac{t-\tau_1}{t-\tau_2}+\ldots,$$

где $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2,\ldots$ — средние значения $Q(\tau)$ в интервалах $0-\tau_1$, $\tau_1-\tau_2,\ldots$, $\tau_{n-1}-(t-1)$.

Представим (VIII.7.8) в виде

$$\frac{\Delta p}{Q(t)}=\frac{\mu}{4\pi kh}\left[\ln\frac{2{,}25\varkappa}{r_c^2}+\varphi(t)\right], \qquad \text{(VIII.7.9)}$$

где

$$\varphi(t)=\frac{1}{Q(t)}\int_0^{t-1}\frac{Q(\tau)}{t-\tau}\,d\tau. \qquad \text{(VIII.7.10)}$$

Вычисляя $\varphi(t)$ из фактического (экспериментального) материала и строя график (рис. VIII.15) в координатах $\frac{\Delta p}{Q(t)}$, $\varphi(t)$, мы должны получить прямую линию, откуда по отрезку a, отсекаемому на оси ординат, и углу α наклона к оси абсцисс можно определить величины μ/kh и $\varkappa/r_c^2$.

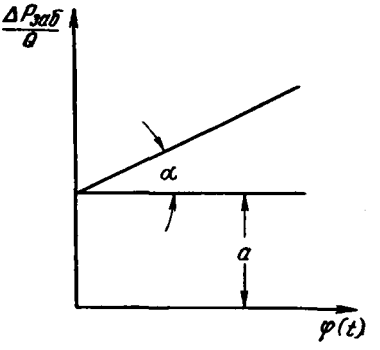


Рис. VIII.15.

При мгновенном прекращении притока $Q(\tau)=\text{const}$

$$\int_0^{t-1}\frac{d\tau}{t-\tau}=\ln t,$$

и формула (VIII.7.9) переходит в формулу (VIII.7.1).

Рассмотрим скважину, показанную на рис. VIII.16, *а*; p_1 — затрубное давление, p_2 — буферное давление. Положим, что экспериментально определены графики подъема давлений $p_1(t)$, $p_2(t)$ (рис. VIII.16, *б*) и известны площади f_1 и f_2 кольцевого сечения и внутренней трубы. Пусть расход $Q_0(t)$ вытекает из пласта в скважину, v_1 и v_2 — скорости подъема жидкости соответственно в затрубном пространстве и трубах. Тогда

$$Q_0(t)=f_1v_1+f_2v_2=f_1\frac{dH_1}{dt}+f_2\frac{dH_2}{dt}, \qquad \text{(VIII.7.11)}$$

где H_1 и H_2 — высота уровней (рис. VIII.16).

Считая, что движение в колонне труб происходит без гидравлических потерь, и предполагая объемный вес γ известным и постоянным по высоте, получаем

$$H_1=\frac{p_{заб}-p_1}{\gamma}, \qquad H_2=\frac{p_{заб}-p_2}{\gamma}.$$

Тогда (VIII. 7. 11) можно переписать в виде

$$Q_0(t)=\frac{1}{\gamma}\left[f_1\left(\frac{dp_{\text{заб}}}{dt}-\frac{dp_1}{dt}\right)+f_2\left(\frac{dp_{\text{заб}}}{dt}-\frac{dp_2}{dt}\right)\right]. \quad \text{(VIII. 7. 12)}$$

Неудобство использования формулы (VIII. 7. 12) для подстановки результата в (VIII. 7. 9) заключается в необходимости дифференцировать экспериментальные кривые, что обычно сопряжено с ошибками.

Введем в рассмотрение импульс депрессии

$$J(t)=\int_0^t \Delta p_{\text{заб}}(t)\,dt. \quad \text{(VIII. 7. 13)}$$

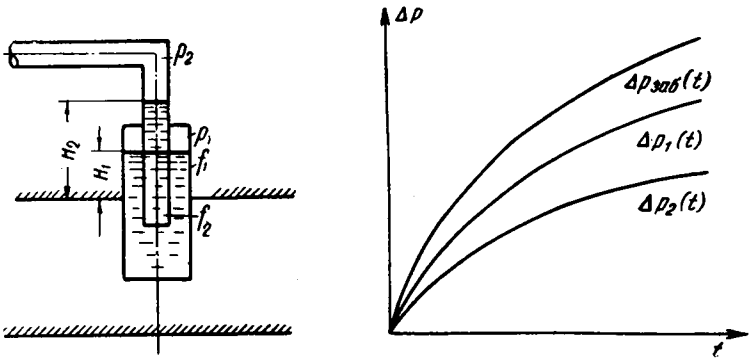


Рис. VIII. 16.

Пользуясь формулой (VIII. 7. 3), импульс депрессии можно представить в виде

$$J(t)=\frac{\mu}{4\pi kh}\int_0^t\int_0^t \frac{Q(t-\tau)}{\tau}\,e^{-\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau}}\,d\tau dt=$$

$$=\frac{\mu}{4\pi kh}\int_0^t \frac{e^{-\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau}}}{\tau}\,d\tau\int_0^t Q(t-\tau)\,dt. \quad \text{(VIII. 7. 14)}$$

Обозначим объем, вытекший из пласта в скважину,

$$V(t)=\int_0^t Q(\tau)\,d\tau.$$

Вводя подстановку $t-\tau=\tau'$, получаем

$$\int_0^t Q(t-\tau)\,dt=\int_{-\tau}^{t-\tau} Q(\tau')\,d\tau'=V(t-\tau), \quad \text{(VIII. 7. 15)}$$

так как $V(-\tau)=0$, ибо $Q(t)=0$ при $t<0$ (по условию отсчет дебита ведется от стационарного состояния). Подставляя (VIII. 7. 15) в (VIII. 7. 14), получаем

$$J(t)=\frac{\mu}{4\pi kh}\int_0^t \frac{\dot V(t-\tau)}{\tau}\, e^{-\frac{r_c^2}{4\varkappa\tau}}\, d\tau, \qquad \text{(VIII. 7. 16)}$$

т. е. согласно (VIII. 7. 3) импульс депрессии связан с отобранным объемом так же, как депрессия с дебитом. Следовательно, после аналогичных рассуждений можно написать вместо формулы (VIII. 7. 9)

$$\frac{J(t)}{V(t)}=\frac{\mu}{4\pi kh}\left[\ln\frac{2{,}25\varkappa}{r_c^2}+\Psi(t)\right], \qquad \text{(VIII. 7. 17)}$$

где

$$\Psi(t)=\frac{1}{V(t)}\int_0^{t-1}\frac{V(\tau)}{t-\tau}\, d\tau.$$

Для формулы (VIII. 7. 17) можно построить график, аналогичный графику на рис. VIII. 15, причем теперь дифференцировать экспериментальные кривые уже не нужно. В координатах $\Psi(t)$, $J(t)/V(t)$ должна получиться прямая линия.

Так как $Q(t)$ отсчитывается от стационарного состояния, т. е. $Q(t)=Q_0(0)-Q_0(t)$, то

$$V(t)=Q_0(0)\,t-\int_0^t Q_0(t)\,dt=Q_0(0)\,t-V_0(t).$$

Формула (VIII. 7. 17) была непосредственно проверена и подтверждена И. Д. Умрихиным при помощи специально поставленных лабораторных экспериментов [26, 27].

Выше были описаны методы, основанные на наблюдениях неустановившегося притока к одной скважине в предположении, что пласт неограничен. Этого условия, конечно, в действительности нет. Однако в начальной стадии неустановившегося процесса притока к одной скважине влияние границ пласта практически не сказывается и пласт можно считать неограниченным.

В некоторых случаях может оказаться желательным оценить размеры зоны влияния вокруг скважины, за пределами которой возмущение, вызванное нарушением стационарного притока к скважине, практически не сказывается [28]. В этом случае можно исходить из общих известных формул Маскета для плоскорадиального неустановившегося притока упругой жидкости к скважине в ограниченном пласте радиусом $R_к$, когда на окружности $r=R_к$ предполагается $p(R_к, t)=p_к=\text{const}$, а на скважине $r=r_c$ задан закон изменения забойного давления или отбора жидкости [Лт. I. 11; 1,7].

Формулы Маскета относятся к чисто радиальному неустановившемуся притоку, когда давление в любой точке пласта есть функция расстояния r и времени t, $p=p(r, t)$. Если форма области вокруг скважины некруговая, то давление, естественно, будет зависеть также от полярного угла θ и указанные формулы Маскета для радиального течения не применимы, так как в этом случае $p=p(r, \theta, t)$ и течение двухразмерное. Однако нетрудно показать из уравнений и движения и неразрывности, что формулы Маскета сохраняют свою силу для средних вдоль любой окружности r давлений $\bar p=\bar p(r, t)$, где

$$\bar p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(r, \theta, t)\,d\theta=\bar p(r, t). \qquad \text{(VIII. 7. 18)}$$

Действительно, учитывая правила дифференцирования определенного интеграла по параметру, для объемного расхода Q через любую окружность r имеем, считая k, μ, h постоянными:

$$Q(r, t) = \int_0^{2\pi} -\frac{k}{\mu}\frac{\partial p(r, \theta, t)}{\partial r} rh\, d\theta = -\frac{kh}{\mu}\int_0^{2\pi}\frac{\partial p(r, \theta, t)}{\partial r} r\, d\theta =$$

$$= -\frac{kh}{\mu}\int_0^{2\pi}\frac{\partial p(r, \theta, t)}{\partial \ln r}\, d\theta = -\frac{kh}{\mu}\frac{\partial}{\partial \ln r}\int_0^{2\pi} p(r, \theta, t)\, d\theta =$$

$$= -\frac{kh}{\mu}\frac{\partial (2\pi \overline{p})}{\partial \ln r} = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial \overline{p}(r, t)}{\partial r} 2\pi rh, \qquad \text{(VIII. 7. 19)}$$

т. е. объемный расход Q при нерадиальном движении выражается через среднее вдоль окружности давление $\overline{p} = \overline{p}(r, t)$ точно так же, как и при радиальном. Отсюда немедленно получается, что $\overline{p}(r, t)$ удовлетворяет основному уравнению неустановившегося плоско-радиального течения упругой жидкости (VIII. 1. 8)

$$\varkappa\left[\frac{\partial^2 \overline{p}(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \overline{p}(r, t)}{\partial r}\right] = \frac{\partial \overline{p}(r, t)}{\partial t} \qquad \text{(VIII. 7. 20)}$$

и все решения Маскета для ограниченного кругового пласта и радиального течения при расчетах $\overline{p}(r, t)$, таким образом, оказываются справедливыми.

Иногда встречаются возражения против законности использования этих формул Маскета при определении параметров областей пласта, выделенных вокруг скважин, на том основании, что контур областей может быть некруговым [1]. В свете высказанных выше соображений эти возражения являются несостоятельными, так как на скважине измеряется именно $\overline{p}(r_c, t)$, а под постоянным контурным давлением $p_к$ на удаленном контуре $R_к$ вполне возможно подразумевать $\overline{p}(R_к) = \text{const}$.

Выше были указаны методы, основанные на наблюдениях неустановившегося притока к одной скважине. Если имеется возможность параллельно произвести наблюдения за изменением давления в соседних пьезометрических скважинах, то, разумеется, рамки информации о пласте, его фильтрационных характеристиках существенно расширяются [Лт. I. 15, 16; 1].

В настоящее время существует ряд различных методов определения параметров пласта, основанных на наблюдениях неустановившихся фильтрационных процессов [Лт. 1. 15, 16; 1]. Описание и анализ этих методов выходят за рамки настоящей книги и поэтому здесь не приводятся.

Укажем только идею метода, предложенного Г. И. Баренблаттом и развитого в работе [29], основанного на применении преобразования Лапласа к линейному уравнению теплопроводности, к которому относится исходное дифференциальное уравнение упругого режима фильтрации.

Метод интегральных преобразований, одним из которых является преобразование Лапласа, в настоящее время широко применяется для решения различных задач математической физики [Лт. V. 5, 6]. Напомним определение преобразования Лапласа.

Пусть дана некоторая функция $u(x, y, z, t)$. Преобразованием Лапласа функции $u(x, y, z, t)$ по переменной t называется интеграл

$$\overline{u} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x, y, z, t)\, dt = \overline{u}(x, y, z, s), \qquad \text{(VIII. 7. 21)}$$

где s — параметр преобразования. В общем случае величина s комплексна.

Пусть исходная функция u, обычно называемая оригиналом, зависит только от одной координаты и времени $u = u(x, t)$ и удовлетворяет некоторому линейному уравнению с частными производными, например уравнению (VIII. 1. 8), которое надлежит проинтегрировать при определенных начальных и граничных условиях того или иного вида, также линейных. Очевидно, преобразованная по Лапласу функция $\bar{u}$, называемая изображением, определенная выше интегралом (VIII. 7. 21), также удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению, но уже обыкновенному, интегрирование которого выполняется обычно значительно проще, нежели исходного в частных производных. Преобразованное уравнение и преобразованные начальные и граничные условия будут содержать параметр преобразования s, но, очевидно, не будут содержать переменной t. В результате решения преобразованной задачи получается решение для изображения $\bar{u} = \bar{u}(x, s)$. Переход от изображения к оригиналу выполняется при помощи специальной формулы преобразования или при помощи таблиц изображений, если найденное изображение в них содержится. Таблицы изображений приведены во многих руководствах по операционному исчислению [Лт. V. 5, 6].

Метод определения параметров пласта по наблюдениям изменения давления в скважинах в период неустановившихся режимов притока, предложенный Г. И. Баренблаттом, заключается в нахождении их изображений по Лапласу

$$\Delta\bar{p}_c(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,\Delta p_c(t)\,dt \qquad \text{(VIII. 7. 22)}$$

при помощи графического или численного интегрирования.

Строго говоря, для этого нужно знать $\Delta p_c(t)$ на интервале времени от нуля до бесконечности, что, конечно, нереально. Однако, выбрав параметр s вещественным положительным и достаточно большим, так как $\Delta p_c(t)$ — ограниченная функция, изображение можно найти интегрированием в пределах $0 - t_0$, где t_0 — момент, до которого $\Delta p_c(t)$ достаточно надежно известна из опыта; действительно,

$$\Delta\bar{p}_c(s) = \int_0^{t_0} e^{-st}\,\Delta p_c(t)\,dt + \int_{t_0}^\infty e^{-st}\,\Delta p_c(t)\,dt. \qquad \text{(VIII. 7. 23)}$$

Если пределы изменения $\Delta p_c(t)$ известны и можно указать максимум $|\Delta p_c(t)| < |\Delta p_c(t)|_{\max}$, то всегда можно выбрать достаточную величину s, чтобы вторым интегралом можно было бы пренебречь, так как

$$\int_{t_0}^\infty e^{-st}\,\Delta p_c(t)\,dt < \int_{t_0}^\infty e^{-st}\,|\Delta p_c(t)|_{\max}\,dt =$$

$$= -|\Delta p_c(t)|_{\max}\frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_{t_0}^\infty = \frac{e^{-st_0}}{s}|\Delta p_c(t)|_{\max}.$$

Должным выбором s последнюю величину можно сделать сколь угодно малой.

После нахождения указанным образом изображений экспериментально найденных в процессе наблюдения величин используются формулы для изображений, полученные из решения преобразованного уравнения теплопроводности. Эти формулы содержат параметр s и искомые физические константы пласта $\frac{kh}{\mu}$, $\varkappa$, приведенные радиусы скважин.

Искомые физические константы предлагается определять непосредственно по этим формулам, не переходя от изображений к оригиналам. Замена обработки

исходных кривых $\Delta p_c\,(t)$ — оригиналов — обработкой их изображений $\Delta p_c\,(s)$, полученных указанным выше способом, и составляет сущность предложенного Г. И. Баренблаттом метода определения параметров пласта. Дальнейшее развитие этого метода с примерами практического использования приведено в работах С. Н. Бузинова, И. Н. Быкова и И. Д. Умрихина [30] и В. А. Максимова [29].

§ 8. Краткие сведения о нестационарной фильтрации газов

Как указывалось выше, в случае идеального газа уравнение состояния описывается уравнением Клапейрона $\frac{p}{\gamma} = RT$, а в случае реальных газов — уравнением $\frac{p}{\gamma} = zRT$, где поправочный коэффициент z, зависящий от давления и температуры, примерно имеет вид, представленный на рис. VIII. 17. Будем считать $z = 1$, $\frac{p}{\gamma} = \frac{p_{ат}}{\gamma_{ат}}$, т. е. будем предполагать газ идеальным, а процесс изотермическим.

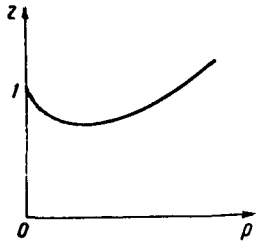


Рис. VIII. 17. График зависимости коэффициента сверхсжимаемости газа от давления.

Тогда из (II. 2. 18) для функции Лейбензона будет

$$P = \frac{\gamma_{ат}}{2p_{ат}} \frac{p^2}{2}. \qquad \text{(VIII. 8. 1)}$$

Дифференциальное уравнение (II. 2. 19) нестационарной фильтрации газа имеет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \varkappa(p)\,\nabla^2 P,\ \varkappa(p) = \frac{kp}{m\mu}; \qquad \text{(VIII. 8. 2)}$$

Мы получили уравнение, сходное с уравнением (VIII. 1. 8) для упругой капельной жидкости, но для газа коэффициент пьезопроводности $\varkappa(p) = \frac{kp}{m\mu}$ уже не постоянный, а зависит от давления.

Уравнение нестационарной фильтрации газа в трубке тока переменного сечения (рис. VIII. 18) имеет, как нетрудно показать, следующий вид:

$$\varkappa(p)\left[\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} + \frac{f'(s)}{f(s)}\frac{\partial P}{\partial s}\right] = \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad \text{(VIII. 8. 3)}$$

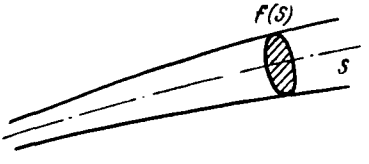


Рис. VIII. 18.

При $f(s) = \text{const}$

$$\varkappa(p)\frac{\partial^2 P}{\partial s^2} = \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad \text{(VIII. 8. 4)}$$

В полярных координатах для плоско-радиального движения $s = r$, $f(r) = 2\pi rh$ и уравнение (VIII. 8. 3) принимает вид:

$$\varkappa(p)\left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}\right) = \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad \text{(VIII. 8. 5)}$$

Л. С. Лейбензон решал уравнение (VIII. 8. 2) методом последовательных приближений (Лт. I. 6, 7), не останавливаясь на вопросах сходимости. Класс автомодельных решений был указан П. Я. Кочиной и Г. И. Баренблаттом (Лт. II. 2; 31).

Рассмотрим одномерное движение в неограниченной области, для которой нет характерных размеров и будем считать, что движение определяется параметром $\xi = x^{\alpha} t^{\beta}$. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{dP}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \beta x^{\alpha} t^{\beta-1}\frac{dP}{d\xi}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} t^{\beta}\frac{dP}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{d^2P}{d\xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \frac{dP}{d\xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} =$$

$$= \alpha^2 x^{2\alpha-2} t^{2\beta}\frac{d^2P}{d\xi^2} + \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} t^{\beta}\frac{dP}{d\xi}.$$

Подставляя эти значения в (VIII. 8. 2) и учитывая, что $P = P(x, t)$ для одномерного прямолинейного движения, получаем

$$\beta x^{\alpha} t^{\beta-1}\frac{dP}{d\xi} = \varkappa(P)\left[\alpha^2 x^{2\alpha-2} t^{2\beta}\frac{d^2P}{d\xi^2} + \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} t^{\beta}\frac{dP}{d\xi}\right]$$

или, сокращая на $x^{2\alpha-2} t^{2\beta}$,

$$\varkappa(P)\left[\alpha^2\frac{d^2P}{d\xi^2} + \alpha(\alpha-1) x^{-\alpha} t^{-\beta}\frac{dP}{d\xi}\right] = \beta x^{2-\alpha} t^{-(1+\beta)}\frac{dP}{d\xi}. \qquad \text{(VIII. 8. 6)}$$

Для того чтобы (VIII. 8. 6) было обыкновенным дифференциальным уравнением, необходимо

$$x^{2-\alpha} t^{-(1+\beta)} = f(x^{\alpha} t^{\beta}) = f(\xi).$$

Положим $2 - \alpha = k\alpha$, $-(1+\beta) = k\beta$, т. е. $x^{2-\alpha} t^{-(1+\beta)} = x^{k\alpha} t^{k\beta} = \xi^k$, откуда

$$\alpha = -2\beta.$$

Полагая $\alpha = 1$, получаем определяющий параметр ξ в виде

$$\xi = xt^{-\frac{1}{2}},$$

а (VIII. 8. 6) примет вид:

$$\varkappa(P)\frac{d^2P}{d\xi^2} + \frac{1}{2}\xi\frac{dP}{d\xi} = 0. \qquad \text{(VIII. 8. 7)}$$

Для интегрирования (VIII. 8. 7) необходимо задать значение $P(\xi)$ в двух точках (для определения констант интегрирования).

Все автомодельные задачи связаны с граничными условиями вида $x = 0$, $r = 0$, $\xi = 0$; $t = 0$, $\xi = \infty$ и никакого решения для конечной области (контур, поверхность скважины) не получается. Но автомодельные решения служат эталоном точности приближенных методов, в том числе методов линеаризации, и в этом их большое принципиальное значение.

Когда $\varkappa(p) = \text{const}$ (в уравнениях для капельной жидкости), возмущения распространяются по пласту мгновенно. Это свойство линейного уравнения теплопроводности. При фильтрации газа, когда $\varkappa = \varkappa(p) \neq \text{const}$, как показано Г. И. Баренблаттом, скорость распространения возмущения будет уже в некоторых случаях конечной. Линеаризация, таким образом, дает бесконечную скорость распространения возмущения, хотя в остальном она обычно дает хорошее приближение к точному решению.

В последнее время был предпринят ряд попыток численных решений нелинейных уравнений нестационарной фильтрации газа на быстродействующих электронных вычислительных машинах [32, 33]. Следует указать попутно, что отмеченный выше факт конечной скорости распространения возмущений в этих численных расчетах не был отмечен. Это обстоятельство еще раз подтверждает, что современные мощные вычислительные средства не могут, да и не должны заменять аналитическое исследование в тех случаях, когда оно оказывается возможным.

Напишем уравнение нестационарной фильтрации газа (VIII. 8. 2) в таком виде:

$$\frac{k}{m\mu}\nabla^2 P = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{d\gamma}{dP}\frac{\partial P}{\partial t}$$

или

$$\frac{dP}{d\gamma}\frac{k}{m\mu}\nabla^2 P = \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad \text{(VIII. 8. 8)}$$

Подберем так уравнение состояния газа $\gamma = \gamma(p)$, чтобы уравнение (VIII. 8. 8) стало линейным [34], т. е. пусть

$$\frac{dP}{d\gamma} = \beta = \text{const}.$$

Тогда по определению функции Лейбензона

$$\frac{\gamma(p)\,dp}{d\gamma} = \beta,$$

откуда

$$\ln\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{1}{\beta}(p - p_0).$$

Таким образом, заменяя прямую линию $\gamma = \frac{\gamma_{ат}}{p_{ат}}\,p$ экспонентой, получаем

$$\gamma = \gamma_0\, e^{\frac{p - p_0}{\beta}}. \qquad \text{(VIII. 8. 9)}$$

График уравнения (VIII. 8. 9) показан на рис. VIII. 19. На этом рисунке прямая — график уравнения состояния для идеального газа $\gamma = \frac{\gamma_0}{p_0} p$.

Таким образом, дифференциальное уравнение фильтрации газа примет вид:

$$\frac{k\beta}{m\mu} \nabla^2 P = \frac{\partial P}{\partial t}. \qquad \text{(VIII. 8. 10)}$$

Если $\gamma = \gamma_0 e^{\frac{p-p_0}{\beta}}$, то функция Лейбензона имеет вид:

$$P = \int \gamma \, dp = \gamma_0 \beta \, e^{\frac{p-p_0}{\beta}} = \beta\gamma + \text{const}. \qquad \text{(VIII. 8. 11)}$$

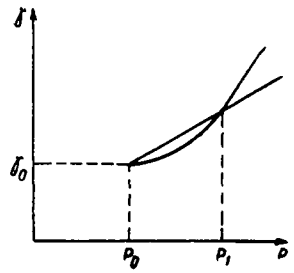


Рис. VIII. 19.

Если известны пределы изменения давления p_1 и p_2 и объемного веса γ_1 и γ_2, то можно оценить величину β из уравнений

$$\gamma_1 = \gamma_0 e^{\frac{p_1-p_0}{\beta}}, \quad \gamma_2 = \gamma_0 e^{\frac{p_2-p_0}{\beta}},$$

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = e^{\frac{p_1-p_2}{\beta}}, \quad \beta = \frac{p_1-p_2}{\ln \frac{\gamma_1}{\gamma_2}}. \qquad \text{(VIII. 8. 12)}$$

Для идеальных газов можно приближенно считать [34]

$$\frac{kp}{m\mu} \approx \frac{kp_{\text{ср}}}{m\mu} = \varkappa = \text{const}, \qquad \text{(VIII. 8. 13)}$$

т. е. как для упругой капельной жидкости.

При сопоставлении с точными решениями Г. И. Баренблатта и П. Я. Кочиной найдено, что можно считать $p_{\text{ср}} \approx p_{\min} + 0{,}7\,(p_{\max} - p_{\min})$ — для линейной фильтрации, $p_{\min}$, $p_{\max}$ — минимальное и максимальное давления в пласте; $p_{\text{ср}} \approx p_{\text{к}}$ — для радиальной фильтрации.

Уравнение (VIII. 8. 2) для газа во многих случаях так или иначе сводится к уравнению теплопроводности, и задача нестационарной фильтрации сводится к интегрированию уравнения теплопроводности, когда на некоторой граничной поверхности $F(x, y, z) = 0$ известно давление p и задано начальное распределение давления $p(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$. Одномерная задача часто сводится к решению одномерного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

при начальных и граничных условиях:

$$t = 0; \quad p(x, 0) = f(x),$$
$$x = 0, \quad p(0, t) = \varphi_1(t),$$
$$x = l, \quad p(l, t) = \varphi_2(t).$$

Общие решения указанных линеаризованных задач приведены в руководствах по теории теплопроводности (Лт. VII. 31, 35). Эти решения часто весьма громоздки, но принципиально вполне допускают выполнение численных расчетов. Граничные условия для давления могут заменяться условиями для производных (когда задан дебит), а также могут иметь вид: $ap + b\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Как указывалось выше, в последнее время был предпринят ряд попыток численного интегрирования нелинейных уравнений нестационарной фильтрации газа при помощи быстродействующих электронных вычислительных устройств. В основе большинства методов численного интегрирования лежит замена дифференциальных уравнений конечно-разностными соотношениями, содержащими значения неизвестной функции или функций в заданном числе точек в заданные моменты времени. При этом дифференциалы заменяются малыми конечными приращениями (шагами) и должна быть, вообще говоря, доказана сходимость процесса, т. е. что при стремлении шага к нулю мы будем приближаться к точному решению.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений, как правило, сходимость расчетного конечно-разностного процесса удается доказать сравнительно простыми средствами [37], хотя и здесь в ряде случаев в зависимости от вида уравнений могут возникнуть осложнения.

Значительно сложнее обстоит дело с дифференциальными уравнениями в частных производных, особенно нелинейными, теория которых разработана пока еще далеко не достаточно, в гораздо меньшей степени, нежели классических линейных уравнений математической физики. Результаты численных расчетов некоторых задач нестационарной фильтрации газов приведены в [32, 33].

В работе В. Ф. Баклановской [38] рассмотрены теоретические вопросы, связанные с применением метода сеток для численного решения уравнений одномерной нестационарной фильтрации газа.

В ряде случаев задачи нестационарной фильтрации газов могут быть эффективно решены приближенными методами, применяемыми в теории фильтрации упругой жидкости — методом последовательной смены стационарных состояний (§ 4, 5) и более точным методом интегральных соотношений.

Лан Чжан-син выполнил расчеты интерференции батарей газовых скважин при нестационарном режиме при помощи метода эквивалентных фильтрационных сопротивлений (§ 5, гл. IV) [39, 40], причем внутреннее фильтрационное сопротивление, обусловленное конечным расстоянием между скважинами в батарее, предполагалось постоянным, а внешнее, зависящее от времени, определялось методом интегральных соотношений. Обоснованием практического постоянства внутреннего фильтрационного сопротивления является то обстоятельство, что после начала притока к скважинам условные воронки депрессии, распространяющиеся вокруг каждой скважины (первая

фаза нестационарного процесса), быстро смыкаются и в ближайшей окрестности батареи скважин весьма быстро устанавливается практически стационарный характер распределения давления.

Большой практический интерес представляют задачи вытеснения газа жидкостью и жидкости газом, возникающие в связи с разработкой газовых месторождений при водонапорном режиме, закачкой газа в нефтяные пласты и сооружением подземных газохранилищ в водоносных пластах.

Некоторые точные автомодельные решения этих задач приведены в работах А. Х. Мирзаджанзаде и В. В. Мустафаева [41] и М. В. Филинова [42]. Из этих решений следует, что ввиду крайне малой вязкости газа по сравнению с вязкостью жидкости во многих случаях можно вообще пренебрегать вязкостью газа, т. е. считать давление в газовой области практически постоянным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щелкачев В. Н. Упругий режим пластовых водонапорных систем. Гостоптехиздат, 1948.
2. Маскет М. Движение однородной жидкости в пористой среде. Пер. с англ. Гостоптехиздат, 1949.
3. Jacob C. E. On the flow of Water in an Elastic Artesian Aquifer. Trans. Amer. Geophysical Union, 1940, p. 11.
4. Щелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. Докл. АН СССР, т. 52, № 2, 1946.
5. Баренблатт Г. И., Крылов А. П. Об упруго-пластическом режиме фильтрации. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1955.
6. Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти. Пер. с англ. Гостоптехиздат, 1953.
7. Кристеа Н. Подземная гидравлика, т. II. Пер. с румынского. Гостоптехиздат, 1962.
8. Таблицы интегральной показательной функции. Математические таблицы Ин-т точной механики и вычислительной техники АН СССР, 1954.
9. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Гостехиздат, 1953.
10. Хейн А. Л. Некоторые вопросы теории неустановившегося притока жидкости и газа к скважинам с меридионально-симметричной конструкцией забоя. Труды ВНИИ, вып. V, Гостоптехиздат, 1954.
11. Нумеров С. Н. О неустановившейся фильтрации в полосообразном пласте к прямолинейной цепочке совершенных скважин. Изв. АН СССР, ОТН, № 1, 1958.
12. Сухарев М. Г. Метод приближенного расчета интерференции скважин при упругом режиме. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, № 6, 1959.
13. Швидлер М. И. К вопросу об интерференции скважин при упругом режиме фильтрации. Труды УфНИИ, вып. III, 1958.
14. Лембке К. Э. Движение грунтовых вод и теория водосборных сооружений. Журнал Министерства путей сообщений, № 2, 1886; № 17—19, 1887.
15. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. Гостехиздат, 1948.
16. Чарный И. А., Розенберг М. Д. Взаимодействие скважин при упругом режиме фильтрации жидкости. Труды МНИ им. Губкина, № 12, 1953.
17. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. Гостоптехиздат, 1949.

18. Чарный И. А. Метод последовательной смены стационарных состояний и его приложения к задачам нестационарной фильтрации жидкостей и газов. Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 1949.

19. Пирвердян А. М. Приближенное решение задач о фильтрации жидкости при упругом режиме. Докл. АН Азерб. ССР, т. VI, № 1, 1950.

20. Соколов Ю. Д. Об одной задаче теории неустановившихся движений грунтовых вод. Украин. матем. журнал, т. V, № 2, 1953.

21. Баренблатт Г. И. О приближенном решении задач одномерной нестационарной фильтрации в пористой среде. Прикл. матем. и механ., т. XVIII, вып. 3, 1954.

22. Чарный И. А. Основы подземной гидравлики. Гостоптехиздат, 1956.

23. Веригин Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1952.

24. Филинов М. В., Чарный И. А. Приближенный метод расчета нагнетания газа в водоносный пласт и его сравнение с некоторыми точными решениями. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, № 1, 1959.

25. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. Гостоптехиздат, 1959.

26. Чарный И. А., Умрихин И. Д. Об одном методе определения параметров пластов по наблюдениям неустановившегося притока к скважинам. Изд. МНИ им. Губкина, Углетехиздат, 1957.

27. Умрихин И. Д. Теоретические и экспериментальные исследования нестационарного притока к скважинам при упругом режиме фильтрации. Диссертация. МИНХ и ГП, 1958.

28. Чарный И. А. Определение некоторых параметров пластов при помощи кривых восстановления забойного давления. Нефт. хоз., № 3, 1955.

29. Бан А., Богомолова А. Ф., Максимов В. А., Николаевский В. Н., Оганджанянц В. Г., Рыжик В. М. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. Гостоптехиздат, 1962.

30. Бузинов С. Н., Быков И. Н., Умрихин И. Д. Определение места перетока между пластами по данным исследований. Газовая промышленность, № 9, 1962.

31. Баренблатт Г. И. Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде. Прикл. матем. и механ., т. XVI, вып. 1952.

32. Jenkins R. and Aronofsky J. S. J. of Appl. Mech. ASME, vol. 20, No. 2, 1953, pp. 210—214.

33. Минский Е. М., Малых А. С. Применение быстродействующих счетных машин к задачам разработки газовых месторождений. Газовая промышленность, № 6, 1961.

34. Чарный И. А. О методах линеаризации нелинейных уравнений типа уравнений теплопроводности. Изв. АН СССР, ОТН, № 6, 1951.

35. Carslaw H. S. and Jaeger J. C. Conduction of Heat in Solids, Oxford at the Clarendon Press, 1960.

36. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. II. Физматгиз, 1960.

37. Бут Э. Д. Численные методы. Пер. с англ. Физматгиз, 1959.

38. Баклановская В. Ф. Численное решение одной задачи нестационарной фильтрации Ж. Вычисл. матем. и матем. физика, № 3, 1961.

39. Лан Чжан-синь. Решение задачи о нестационарной фильтрации газа в пласте переменной мощности. Газовая промышленность, № 7, 1961.

40. Лан Чжан-синь. Расчет истощения газового пласта, дренируемого батареей скважин. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, № 3, 1962.

41. Мирзаджанзаде А. Х., Мустафаев В. В. О вытеснении газа водой в пористой среде. Докл. АН Азерб. ССР, № 1, 1958.

42. Филинов М. В. О нагнетании газа в водоносный пласт. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 4, 1960.

ГЛАВА IX

ФИЛЬТРАЦИЯ СМЕСЕЙ НЕСКОЛЬКИХ ЖИДКОСТЕЙ

§ 1. Вводные замечания. Основные уравнения фильтрации двухфазной жидкости

Выше были рассмотрены различные задачи фильтрации, в которых жидкость — несжимаемая или сжимаемая — предполагалась однородной. В действительности во многих случаях картина течения гораздо сложнее, так как в пористой среде может двигаться не одна однородная жидкость, а несколько жидкостей с различными физико-химическими характеристиками — вязкостями, плотностями и т. д. Например, в нефтяных пластах, разрабатываемых при водонапорном режиме, вода обычно не заполняет полностью область, ранее занятую нефтью. В этой области происходит одновременно движение двух жидкостей — вторгшейся воды и оставшейся, постепенно вымываемой нефти. Еще более сложная картина наблюдается, когда присутствует выделяющийся из нефти растворенный или добавленный извне газ. В этом случае область движения одновременно занята тремя компонентами или фазами — нефтью, газом и водой. Процесс течения еще усложняется, если происходят химические реакции или фазовые превращения — конденсация или испарение — между компонентами смеси, движущейся в пористой среде.

Гидродинамика многокомпонентных систем является одним из наиболее трудных и сложных, относительно мало еще исследованным разделом механики сплошных сред, связанным с физико-химией и термодинамикой поверхностных явлений.

Многие важные технические и теоретические задачи, в том числе рассмотренные в известной книге В. Г. Левича [1], относятся к гидродинамике многофазных сред. Можно указать, например, задачи о движении паро- и газожидкостных смесей в трубах и различных аппаратах, вопросы гидро- и пневмотранспорта, конструирования и расчета фильтров различного назначения и множество других.

Теоретическое исследование процессов движения многокомпонентных сред крайне затрудняется далеко не всегда ясным механизмом

происходящих при этом явлений. В тех же случаях, когда в той или иной степени принимаемая модель процесса может считаться обоснованной или вероятной, получается столь сложная система исходных дифференциальных уравнений, например, при фильтрации сжимаемой многокомпонентной смеси, что возникающие математические затруднения заставляют искать обходные пути или идти на существенные иногда упрощения.

В современных задачах нефтедобычи с фильтрацией многокомпонентных жидкостей связан один из основных вопросов — вопрос о повышении коэффициента нефтеотдачи нефтяных месторождений, разрабатываемых при помощи искусственных методов поддержания пластового давления — закачкой воды или другого вытесняющего нефть агента в пласт.

Известно, что при вытеснении нефти водой в пласте остается обычно 30—35%, а иногда и еще бóльшая часть всего количества нефти, первоначально содержащейся в пласте. При современном размахе нефтедобывающей промышленности в нашей стране и за рубежом повышение нефтеотдачи хотя бы на 1% равнозначно введению в разработку одного или нескольких крупных нефтяных месторождений. Поэтому последнее десятилетие характеризуется все возрастающим числом — многими сотнями исследований по вопросам повышения нефтеотдачи как в нашей стране, так и за рубежом. Подавляющая часть этих работ носит характер лабораторных и промысловых экспериментальных исследований, иногда с учетом, а чаще без соблюдения необходимых критериев подобия, которые для задач многофазной фильтрации были впервые установлены Д. А. Эфросом [2].

При движении смесей нескольких жидкостей скорости компонентов, как правило, не одинаковы. В ранних исследованиях смесь рассматривалась как некоторая однородная среда, все компоненты которой характеризуются одинаковыми кинематическими и динамическими параметрами — скоростью, давлением и плотностью в каждом элементе объема. В дальнейшем по мере уточнения физической картины движения оказалось необходимым учесть различие скоростей, а в некоторых случаях и давлений составляющих смесь фаз в каждом элементе объема.

Давления фаз, вообще говоря, не равны друг другу вследствие поверхностного натяжения, существующего на границе фаз. В первом приближении иногда пренебрегают капиллярными эффектами и считают давления фаз одинаковыми.

Различие скоростей компонентов смеси объясняется примерно так, как указывалось в § 7 главы VII, где рассматривалась задача устойчивости движения водо-нефтяного контакта: при движении многокомпонентной смеси в трубах или пористой среде, считая для простоты давления фаз одинаковыми, вследствие вязкости и трения образуется градиент давления $-dp/dx$, x — направление течения.

Нетрудно видеть, как было показано Л. С. Лейбензоном [3], что каждая элементарная частица какого-либо i-го компонента смеси объемом dV_i будет находиться при этом под действием элементарной объемной силы, обусловленной градиентом давления, равной $(-dp/dx)\,dV_i$. Если вязкости и плотности компонентов различны, то, очевидно, разные частицы под действием этой силы, не говоря о других причинах, будут двигаться с неодинаковыми скоростями. Это соответственно усложняет теоретическое исследование.

В задачах движения, в том числе фильтрации, многокомпонентной жидкости появляются новые неизвестные, подлежащие определению — насыщенности или концентрации. Под насыщенностью σ_i данным компонентом номера i обычно подразумевают часть объема пор, занимаемого этим компонентом. Величины σ_i подлежат определению наряду с другими неизвестными функциями — давлениями и скоростями.

Относительно наиболее разработаны и применяются в настоящее время теории феноменологического характера, в основе которых лежат некоторые опытные данные. Одна из таких теорий, которую можно рассматривать в качестве первого приближения, изложена ниже.

Экспериментально установлено, что при движении смеси нескольких жидкостей (многофазные системы) закон Дарси может в широких пределах считаться справедливым для каждой фазы в отдельности. Для трубки тока с сечением $S(x)$ при отсутствии массовых сил закон Дарси можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{k_1(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n)}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial x}S(x), \\ Q_2 &= -\frac{k_2(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n)}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial x}S(x), \qquad \text{(IX.1.1)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Q_n &= -\frac{k_n(\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n)}{\mu_n}\frac{\partial p_n}{\partial x}S(x), \end{aligned}$$

где Q_i — расход i-й фазы; σ_i — насыщенность порового пространства i-й фазой, т. е. часть объема пор, занятая этой фазой; $k_i(\sigma_1,\ldots)$ — фазовая проницаемость i-й фазы, являющаяся функцией ряда параметров: насыщенностей, $\operatorname{grad} p$, капиллярных характеристик, структуры порового пространства, степени цементирования и т. д. (Лт. VII. 26; 2); $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — давления каждой фазы соответственно. Как упоминалось, вообще говоря, они не равны друг другу из-за капиллярных эффектов. Наибольшее влияние на фазовую проницаемость оказывают насыщенности, поэтому в дальнейшем будем предполагать, как обычно делается, что фазовые проницаемости k_i зависят только от насыщенностей. Очевидно, что $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n = 1$.

Рассмотрим одномерное движение двухфазной жидкости в пористой среде, так как только для этого случая имеется сколь-либо разработанная теория, основы которой даны в работе Баклея и Леверетта [4] для некоторых наиболее простых условий.

Для двухфазной жидкости $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ или $\sigma_2 = 1 - \sigma_1$, т. е. насыщенность первой фазой однозначно определяет насыщенность второй фазой и все величины, зависящие от насыщенности, в том числе и проницаемости k_1, k_2, могут быть представлены как функции насыщенности первой фазы. В дальнейшем под σ будем подразумевать насыщенность первой вытесняющей фазой.

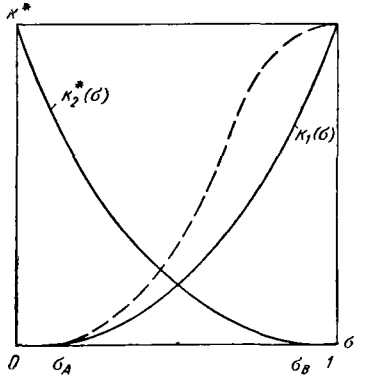


Рис. IX. 1. Графики фазовых проницаемостей.

На рис. IX. 1 приведены типовые кривые относительных фазовых проницаемостей для двухфазной смеси.

На этом графике показаны безразмерные относительные фазовые проницаемости

$$k_1^*(\sigma) = \frac{k_1(\sigma)}{k}, \quad k_2^*(\sigma) = \frac{k_2(\sigma)}{k},$$

где k — проницаемость для однородной жидкости; σ_A — связанная компонента первой фазы (для воды обычно около 20%).

Движение этой фазы может происходить только, если $\sigma > \sigma_A$. Для второй фазы связанная компонента равна $1 - \sigma_B$. Пунктир на рис. IX. 1 относится к случаю, когда первая фаза является газом.

Как указывалось, относительные фазовые проницаемости зависят от разных факторов, но в основном от насыщенности. В работах Д. А. Эфроса (Лт. VII. 26), Д. А. Эфроса и В. П. Оноприенко [5] показано, что фазовые проницаемости, вообще говоря, зависят от безразмерных параметров π_1, π_2 до определенного значения их величины,

$$\pi_1 = \alpha/\Delta p \sqrt{\frac{k}{m}} < 0{,}6; \quad \pi_2 = \alpha/k\,|\operatorname{grad} p| \geqslant 0{,}5 \cdot 10^6,$$

где Δp — капиллярная разность давлений; α — коэффициент межфазного поверхностного натяжения на границе фаз.

При выполнении указанных неравенств фазовые проницаемости практически зависят только от σ. Левереттом, а также в работах [6, 7] было установлено, что различие вязкостей фаз на величинах $k_1^*(\sigma)$ и $k_2^*(\sigma)$ не отражается. Следует отметить, однако, работу Оде [8], где указывается, что при весьма малой проницаемости и при большом отношении вязкостей вязкости фаз могут заметно влиять на величины фазовых проницаемостей.

Мы тем не менее будем исходить, как это принято, из условия, что фазовые проницаемости являются однозначными функциями насыщенностей. Это дает возможность построить теорию, удовлетворительно согласующуюся с большинством опытных данных и позволяющую производить технические расчеты движения многофазных жидкостей в пористой среде.

На основании ряда осредненных данных Чэнь Чжун-сян [9] предложил следующие эмпирические приближенные формулы зависимости фазовых проницаемостей от насыщенности:
для воды и нефти (σ — водонасыщенность)

$$k_1^*(\sigma) = 0,\ 0 \leqslant \sigma < 0{,}2;\ k_1^*(\sigma) = \left(\frac{\sigma - 0{,}2}{0{,}8}\right)^{3,5},\ 0{,}2 \leqslant \sigma \leqslant 1;$$
$$k_2^*(\sigma) = \left(\frac{0{,}85 - \sigma}{0{,}85}\right)^{2,8}(1 + 2{,}4\,\sigma),\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 0{,}85;\ k_2^*(\sigma) = \quad \text{(IX.1.2)}$$
$$= 0,\ 0{,}85 \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

Для газа и воды (σ — газонасыщенность)

$$k_1^*(\sigma) = 0,\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 0{,}1;\ k_1^*(\sigma) = \left(\frac{\sigma - 0{,}1}{0{,}9}\right)^{3,5}[1 + 3(1 - \sigma)],$$
$$0{,}1 \leqslant \sigma \leqslant 1; \qquad \text{(IX.1.3)}$$
$$k_2^*(\sigma) = \left(\frac{0{,}8 - \sigma}{0{,}8}\right)^{3,5},\ 0 \leqslant \sigma \leqslant 0{,}8;\ k_2^*(\sigma) = 0,\ 0{,}8 \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

Последними формулами можно пользоваться также при оценочных расчетах совместной фильтрации газа и нефти.

При отсутствии взаимного торможения жидкостей кривые относительных фазовых проницаемостей превращаются в диагонали прямоугольника, так как в этом случае относительные фазовые проницаемости должны равняться насыщенностям.

Давления p_1 и p_2, вообще говоря, не равны друг другу из-за капиллярных эффектов. Их разность $p_1 - p_2$ будет зависеть от поверхностного натяжения. Как известно,

$$p_1 - p_2 = p_к = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad \text{(IX.1.4)}$$

(формула Лапласа), где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны менисков контактной поверхности; α — поверхностное натяжение; $p_к$ — капиллярное давление или капиллярный скачок.

Большее давление будет на стороне не смачивающей твердые зерна породы жидкости.

Радиусы кривизны R_1 и R_2 зависят от степени внедрения вытесняющей жидкости в область, занятую вытесняемой, т. е. в основном от насыщенности. Поэтому на практике капиллярное давление считается известной экспериментальной функцией насыщенности

(Лт. VIII. 6). Типовая зависимость $p_к(\sigma)$ показана на рис. IX. 2 (σ — водонасыщенность). Вид кривой $p_к(\sigma)$ зависит от характеристик жидкостей и геометрической структуры пористой среды.

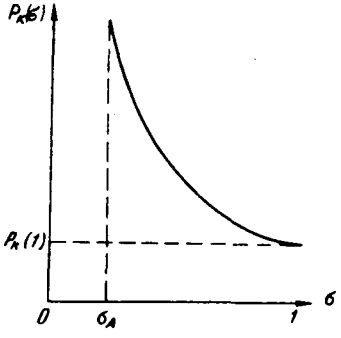


Рис. IX. 2. График зависимости капиллярного давления от насыщенности.

По кривым капиллярного давления часто при помощи формулы Лапласа (IX. 1. 4) рассчитывается распределение радиусов размеров пор (Лт. I. 3, 9). Следует отметить, что само понятие радиуса поры является в значительной мере условным, так как реальная пористая среда имеет несравненно более сложную геометрическую структуру.

Для кривой $p_к(\sigma)$ Леверетт [Лт. I. 3] предложил безразмерную функцию $J(\sigma)$:

$$J(\sigma) = \frac{1}{\alpha} p_к(\sigma) \cos\theta \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad (IX.1.5)$$

где θ — статический краевой угол между жидкостями и породой; α — коэффициент межфазного натяжения в *дин/см*; $p_к(\sigma)$ — капиллярное давление в *дин/см*^{2}; k — проницаемость пористой среды для однородной жидкости в *см*^{2}; m — пористость.

Вид кривых Леверетта показан на рис. IX. 3 (σ — водонасыщенность). Кривая *1* относится к впитыванию в грунт, кривая *2* — к дренажу под действием тяжести, т. е. соответственно к вытеснению грунтового воздуха жидкостью и замещению жидкости воздухом при осушении.

Различие в виде кривых указывает на гистерезисный характер капиллярных явлений в пористых средах, природа которого еще не может считаться в полной мере исследованной. По всей вероятности, связь радиусов кривизны капиллярных менисков с насыщенностью только условно может считатьея однозначной из-за неоднородной геометрической структуры реальных пористых сред. Можно пред-

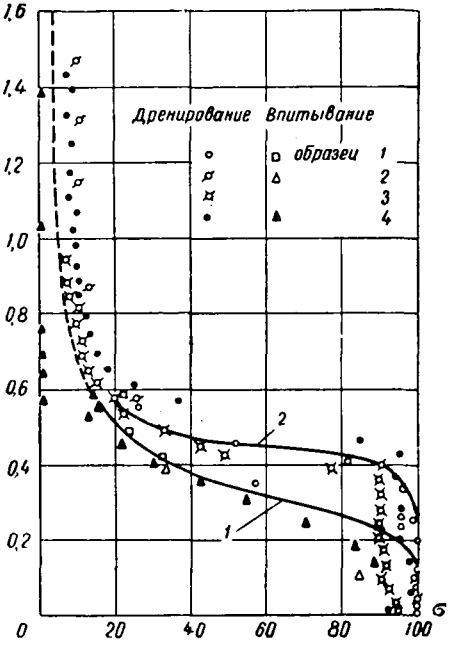


Рис. IX. 3. Графики функции Леверетта.

полагать, что эта связь зависит от направления вытеснения и первоначального заполнения пористой среды вытесняемой фазой.

По кривой $J(\sigma)$ можно легко определить $p_к(\sigma)$ из формулы

$$p_к(\sigma) = J(\sigma)\,\alpha\sqrt{\frac{m}{k}}\cos\theta. \quad \text{(IX. 1. 6)}$$

Более поздние исследования показали, что для различных пористых сред графики Леверетта $J(\sigma)$ сохраняют свой характер, но количественно колеблются в некоторых пределах. На рис. IX. 4 приведены кривые $J(\sigma)$, где σ — водонасыщенность, заимствованные из книги [Лт. I. 9].

Взаимное торможение жидкостей, согласно которому относительные фазовые проницаемости не равны соответствующим насыщенностям, обусловлено в первую очередь капиллярными эффектами. Для упрощения расчетов, однако, часто считают $p_1 = p_2$, т. е. пренебрегают капиллярным скачком $p_к(\sigma)$. В этом случае капиллярность косвенно учитывается самим видом опытных кривых $k_1^*(\sigma)$ и $k_2^*(\sigma)$.

Для вывода уравнения неразрывности в случае одномерного движения рассмотрим баланс первой фазы. Предположим, что две жидкости являются несжимаемыми, взаимно нерастворимыми и химически друг с другом не реагирующими. В элемент объема длиной dx за время dt втекает объемное количество первой жидкости, равное $Q_1 dt$, и вытекает

$$\left(Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x}dx\right)dt.$$

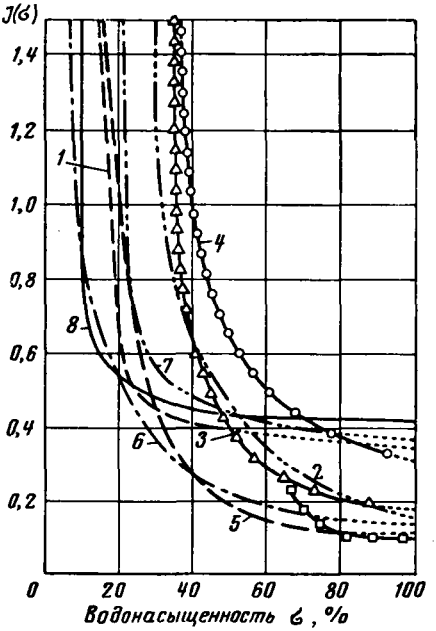


Рис. IX. 4. Кривые капиллярного давления (по Розе и Брусу).

№ кривой	Пласт	Породы	lim J (σ) σ → 1
1	Хоукинс	Вудбайн	0,374
2	Рангели	Вебер	0,151
3	Эл Робл	Морено	0,180
4	Кинзелла	Викинг	0,315
5	Кетье	Дис	0,116
6	Лидук	Девон	0,114
7	Алундум * (сцементированный)	—	0,371
8	Леверетт (несцементированный)	—	0,419

* Алундум — искусственный корунд.

Насыщенность рассматриваемого элемента при этом меняется от σ до $\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t}dt$, и так как объем порового пространства равен

$mS(x)\,dx$, то, приравнивая накопление жидкости изменению насыщенности, помноженному на этот объем, получаем

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = -mS(x)\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \qquad \text{(IX.1.7)}$$

Для второй фазы аналогично получаем

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} = -mS(x)\frac{\partial (1-\sigma)}{\partial t} = mS(x)\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \qquad \text{(IX.1.8)}$$

Складывая (IX.1.7) и (IX.1.8), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}(Q_1 + Q_2) = 0$$

или

$$Q_1 + Q_2 = Q(t). \qquad \text{(IX.1.9)}$$

Последнее равенство показывает, что объемный расход двухфазной несжимаемой смеси от x не зависит.

В общем случае при наличии массовых сил, пользуясь законом Дарси, зависимостью капиллярного скачка $p_к$ от насыщенности и уравнениями неразрывности, получаем следующую систему уравнений:

$$Q_1 = -\frac{kk_1^*(\sigma)}{\mu_1}\left(\frac{\partial p_1}{\partial x} - \varrho_1 X\right)S(x);\quad Q_2 = -\frac{kk_2^*(\sigma)}{\mu_2}\left(\frac{\partial p_2}{\partial x} - \varrho_2 X\right)S(x),$$

$$p_1 - p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = p_к(\sigma),$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = -mS(x)\frac{\partial \sigma}{\partial t},\quad \frac{\partial Q_2}{\partial x} = mS(x)\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \qquad \text{(IX.1.10)}$$

где X — проекция ускорения массовых сил на направление течения x.

Так как число неизвестных (p_1, p_2, Q_1, Q_2, σ) равно пяти, то уравнения (IX.1.10) образуют замкнутую систему.

Без принципиальных затруднений решается задача установившегося движения двухфазной смеси, когда расходы, давления и насыщенности не зависят от времени. Из уравнений неразрывности следует, что в этом случае расходы Q_1 и Q_2 постоянны. Из системы (IX.1.10) получаем два уравнения для производных:

$$-\frac{dp_1}{dx} = \frac{Q_1}{\dfrac{kk_1^*(\sigma)}{\mu_1}S(x)} - \varrho_1 X,$$

$$-\frac{dp_2}{dx} = p_к'(\sigma)\frac{d\sigma}{dx} - \frac{dp_1}{dx} = \frac{Q_2}{\dfrac{kk_2^*(\sigma)}{\mu_2}S(x)} - \varrho_2 X$$

или

$$-\frac{dp_1}{dx}=\frac{Q_2}{\dfrac{kk_2^*(\sigma)}{\mu_2}S(x)}-\varrho_2 X-p_к'(\sigma)\frac{d\sigma}{dx}.$$

Откуда при $p_к'(\sigma)\neq 0$ для σ получаем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$p_к'(\sigma)\frac{d\sigma}{dx}=(\varrho_1-\varrho_2)X+\frac{1}{kS(x)}\left[\frac{\mu_2 Q_2}{k_2^*(\sigma)}-\frac{\mu_1 Q_1}{k_1^*(\sigma)}\right]. \quad \text{(IX. 1. 11)}$$

Интегрируя это уравнение, что легко выполняется при $X=0$, найдем $\sigma=\sigma(x)$, после чего можно из уравнений движения определить давления p_1 и p_2. Общий случай установившегося движения двух- и трехфазной смесей в пренебрежении капиллярностью рассмотрен Маскетом (Лт. VII. 6). Теория установившегося движения газированной нефти кратко изложена в § 8.

§ 2. Теория Баклея — Леверетта

Баклей и Леверетт [4] рассмотрели двухфазную фильтрацию при отсутствии капиллярного давления без учета массовых сил для случая $S(x)=S=\text{const}$.

В этом случае согласно (IX. 1. 10) имеем следующие уравнения:

$$w_1=-\frac{kk_1^*(\sigma)}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x},\quad w_2=-\frac{kk_2^*(\sigma)}{\mu_2}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \text{(IX. 2. 1)}$$

$$-\frac{\partial w_1}{\partial x}=m\frac{\partial \sigma}{\partial t},\quad \frac{\partial w_2}{\partial x}=m\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad \text{(IX. 2. 2)}$$

$$\frac{\partial (w_1+w_2)}{\partial x}=0,\ w_1+w_2=w(t), \quad \text{(IX. 2. 3)}$$

где w_1 и w_2 — скорости фильтрации соответственно первой и второй фаз.

Положим, что суммарная скорость фильтрации является постоянной, т. е.

$$w_1+w_2=w=\text{const}.$$

Из уравнений (IX. 2. 1) и (IX. 2. 3) получим

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{w}{k\left[\dfrac{k_1^*(\sigma)}{\mu_1}+\dfrac{k_2(\sigma)}{\mu_2}\right]}. \quad \text{(IX. 2. 4)}$$

Подставляя значение $-\dfrac{\partial p}{\partial x}$ из уравнений (IX. 2. 4) в первое уравнение (IX. 2. 1), получаем

$$w_1=wf(\sigma), \quad \text{(IX. 2. 5)}$$

где $f(\sigma)$ — так называемая функция Баклея — Леверетта:

$$f(\sigma) = \frac{\mu_0 k_1^*(\sigma)}{\mu_0 k_1^*(\sigma) + k_2^*(\sigma)}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \qquad \text{(IX. 2. 6)}$$

Из формулы (IX. 2. 5) определим $\frac{\partial w_1}{\partial x}$ и подставим в первое уравнение неразрывности (IX. 2. 2). Получим

$$wf'(\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial x} + m\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \qquad \text{(IX. 2. 7)}$$

Уравнение (IX. 2. 7) есть квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, которое обычно интегрируется методом характеристик [Лт. VII. 1].

Напишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую уравнению в частных производных (IX. 2. 7):

$$\frac{dx}{wf'(\sigma)} = \frac{dt}{m} = \frac{d\sigma}{0}.$$

Независимая система ее первых интегралов есть

$$\sigma = C_1, \quad x - \frac{wf'(\sigma)}{m}t = C_2$$

(m принято постоянным).

Решение уравнения (IX. 2. 7) имеет вид:

$$x = x(\sigma, 0) + \frac{wt}{m}f'(\sigma), \qquad \text{(IX. 2. 8)}$$

где $x(\sigma, 0)$ — начальное распределение насыщенности при $t = 0$.

Зная положение точки с насыщенностью σ в момент $t = 0$, можно из (IX. 2. 8) определить ее положение в любой момент времени $t > 0$.

Из формулы (IX. 2. 8)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w}{m}f'(\sigma). \qquad \text{(IX. 2. 9)}$$

Таким образом, $\frac{w}{m}f'(\sigma)$ есть скорость распространения насыщенности заданной величины σ.

Вид кривых $f(\sigma)$ и $f'(\sigma)$ представлен на рис. IX. 5.

Из этого графика видно, что $f'(\sigma)$ не является монотонной. Иначе говоря, существуют две насыщенности σ и σ_1 (рис. IX. 5), из которых одна может быть произвольной, распространяющиеся с одной и той же скоростью $\frac{w}{m}f'(\sigma) = \frac{w}{m}f'(\sigma_1)$. Отсюда следует согласно (IX. 2. 9) и рис. IX. 5, что, начиная с некоторого момента времени, распределение насыщенности может оказаться многозначным

(рис. IX. 6) аналогично, например, волнам Римана конечной амплитуды, которые изучаются в теории ударных волн [Лт. II. 13; 10].

Очевидно, многозначность σ физически невозможна. Это говорит о том, что в зоне движения двухфазной жидкости образуются скачки. Многозначность в волновых задачах механики сплошных сред обычно означает возможность существования разрывов или скачков искомых функций. В данном случае многозначность также устраняется введением скачка насыщенности.

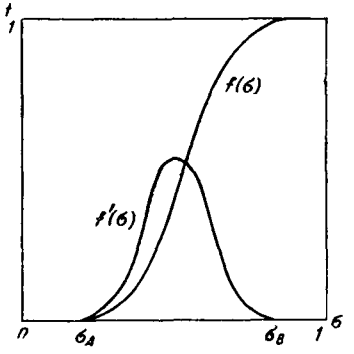


Рис. IX. 5.

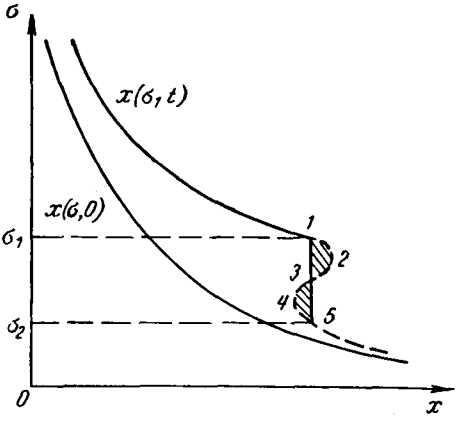


Рис. IX. 6. Устранение многозначности распределения насыщенности введением скачка.

На рис. IX. 6 для иллюстрации показано физически возможное, т. е. однозначное, распределение насыщенности σ $(x, 0)$ или, что то же, x (σ, 0) в момент $t = 0$. Пусть для простоты $w = \text{const}$. Тогда согласно формуле (IX. 2. 8) и рис. IX. 6 дальнейшее распределение насыщенности σ (x, t) можно получить, сместив ординаты σ точек начальной кривой вправо на величины $\frac{wt}{m} f'(\sigma)$. В зависимости от величин σ сечения с большей начальной насыщенностью согласно графику f' (σ) рис. IX. 5 могут обогнать сечения с меньшими начальными насыщенностями и график σ (x, t), полученный в результате указанного выше перемещения ординат σ вправо, может оказаться в некоторой своей части неоднозначным, что изображено участком *1—2—3—4—5* кривой σ (x, t).

В зоне этого участка одному и тому же значению x соответствуют три значения σ: σ_1, σ_3 и σ_5, что физически абсурдно — в каждом сечении, естественно, в каждый момент времени должна существовать только одна вполне определенная насыщенность. Можно показать, о чем будет сказано ниже, что положение скачка (прямая

1—3—5) должно определяться по аналогии с соответствующей задачей газовой динамики [11] из условия равенства площадей сегментов *1—2—3* и *3—4—5* по обе стороны скачка, т. е. прямой *1—3—5* [Лт. VIII. 29; 12].

В действительности, конечно, математический скачок насыщенности не имеет места — существует некоторая конечная длина δ (рис. IX. 7), на которой насыщенность падает от значения σ_Φ до нуля перед фронтом. Однако эта иногда называемая стабилизированной зоной длина δ, размеры которой зависят от не рассматриваемых здесь капиллярных эффектов, обычно мала по сравнению с возрастающей со временем зоной смеси *1* + *2* (рис. IX. 7) и в ряде случаев остается постоянной. Излагаемая ниже теория дает вполне удовлетворительные результаты для зоны смеси *1* + *2*. Рассмотрение же насыщенности на участке δ требует учета капиллярной разности давлений, о чем будет сказано в § 6.

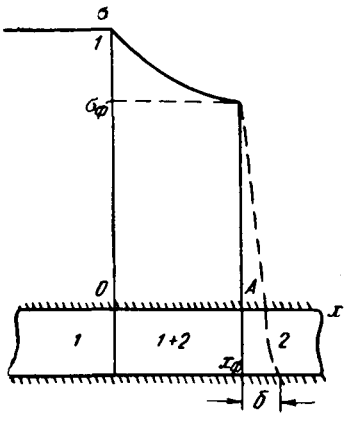


Рис. IX. 7. Распределение насыщенности при вытеснении в пористой среде.

Переходная зона δ аналогична толщине скачка уплотнения в газе. Как известно [Лт. II. 13; 11], в газе толщина ударной волны равна обычно нескольким длинам свободного пробега молекул и практически может рассматриваться, как равная нулю.

В нашем случае двухфазной фильтрации мы принимаем $\delta = 0$ для упрощения последующего анализа.

Баклей и Леверетт не указали аналогию этой задачи с задачей Римана, но они правильно дали метод определения координаты скачка из условий материального баланса.

Пусть жидкость *1* начинает вытеснять жидкость *2* (рис. IX. 7).

Объем первой фазы в переходной зоне *OA* определяется следующей формулой:

$$V_1 = m \int_0^{x_\Phi} \sigma \, dx, \qquad \text{(IX. 2. 10)}$$

где x_Φ — координата фронта или скачка.

Начальный объем первой фазы в этой зоне

$$V_1(0) = \int_0^{x_\Phi} m \, \sigma(x, 0) \, dx.$$

В момент времени t объем первой фазы в этой зоне будет

$$V_1(t) = \int_0^{x_\Phi} m\sigma(x, t)\,dx.$$

Далее, в течение времени t через начальную границу $x = 0$ втекает первая жидкость, объемное количество которой будет равно $w_1 t = wt$. При этом предполагается $S(x) = S = 1$.

Очевидно, что

$$wt = \int_0^{x_\Phi} m\sigma(x, t)\,dx - \int_0^{x_\Phi} m\sigma(x, 0)\,dx. \qquad \text{(IX.2.11)}$$

Для простоты пусть $V_1(0) = 0$, т. е. в начальный момент времени участок OA полностью заполнен второй жидкостью. Тогда имеем

$$wt = \int_0^{x_\Phi} m\sigma(x, t)\,dx. \qquad \text{(IX.2.12)}$$

В этом случае формула (IX.2.8) примет вид:

$$x = \frac{wt}{m} f'(\sigma). \qquad \text{(IX.2.13)}$$

Из (IX.2.13) имеем

$$dx = \frac{wt}{m} f''(\sigma)\,d\sigma. \qquad \text{(IX.2.14)}$$

Подставляя (IX.2.14) в (IX.2.12), получаем

$$wt = \int_{\sigma_0}^{\sigma_\Phi} \sigma wt f''(\sigma)\,d\sigma = wt\,[\psi(\sigma_\Phi) - \psi(\sigma_0)],$$

где

$$\psi(\sigma) = \int \sigma f''(\sigma)\,d\sigma = \sigma f'(\sigma) - f(\sigma) + \text{const};$$

σ_Φ — фронтовая насыщенность; σ_0 — насыщенность в сечении $x = 0$, т. е. в нашем случае $\sigma_0 = 1$.

Учитывая согласно (IX.2.6), что $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$, получаем

$$wt = wt\,[\sigma_\Phi f'(\sigma_\Phi) - f(\sigma_\Phi) + 1]$$

или

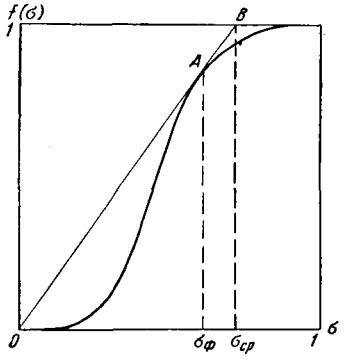
$$\sigma_\Phi f'(\sigma_\Phi) - f(\sigma_\Phi) = 0. \qquad \text{(IX.2.15)}$$

Фронтовая насыщенность σ_Φ определяется этой формулой. Среднюю насыщенность $\sigma_{ср}$ в переходной зоне можно определить по формуле

$$\sigma_{ср} = \frac{wt}{mx_\Phi} = \frac{1}{f'(\sigma_\Phi)}. \qquad \text{(IX.2.16)}$$

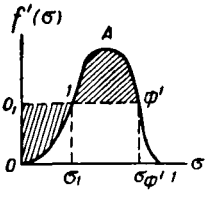
Легко видеть, что фронтовую насыщенность и среднюю насыщенность можно определить геометрически следующим образом.

Проведем из начала координат касательную к кривой $f(\sigma)$. Величины σ для точки касания A и точки B суть фронтовая насыщенность и средняя насыщенность соответственно (рис. IX. 8, *а*).



а

Нетрудно видеть, что найденная таким образом фронтовая насыщенность $\sigma_ф$ (рис. IX. 8, *а*) совпадает с насыщенностью, которая получится, если устра-



б

Рис. IX. 8.

нить двузначность функции $f'(\sigma)$ сечением $O_1Ф'$ (рис. IX. 8, *б*), определяемым из условия равенства заштрихованных площадей OO_1IO и $1AФ'1$. Действительно, из рис. IX. 8, *б* следует

$$S_{1\,AФ'\,1} = \int_{\sigma_1}^{\sigma_{Ф'}} f'(\sigma)\,d\sigma - (\sigma_{Ф'} - \sigma_1) f'(\sigma_{Ф'}) =$$

$$= f(\sigma_{Ф'}) - f(\sigma_1) - (\sigma_{Ф'} - \sigma_1) f'(\sigma_{Ф'}), \qquad (*)$$

$$S_{OO_1IO} = \sigma_1 f'(\sigma_{Ф'}) - \int_0^{\sigma_1} f'(\sigma)\,d\sigma = \sigma_1 f'(\sigma_{Ф'}) - f(\sigma_1). \qquad (**)$$

Сравнивая правые части этих формул, получаем

$$f(\sigma_{Ф'}) = \sigma_{Ф'} f'(\sigma_{Ф'}), \qquad (***)$$

что совпадает с формулой (IX. 2. 15). Таким образом, $\sigma_Ф = \sigma_{Ф'}$, что и требовалось доказать.

При обычных кривых относительных фазовых проницаемостей средняя насыщенность $\sigma_{ср}$, как правило, значительно меньше единицы. Поэтому, например, в процессах вытеснения нефти водой для достаточно полного извлечения нефти из пласта на единицу объема добытой нефти нужно затратить в несколько раз больше объемов воды.

Из формулы (IX. 2. 16) и рис. IX, 8, *а* для функции $f(\sigma)$ следует, что фронтовая насыщенность $\sigma_Ф = \sigma_A$ и средняя насыщенность $\sigma_{ср} =$

$= \sigma_B$ возрастают с уменьшением отношения вязкостей $\mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}$. Таким образом, эффективность вытеснения возрастает с ростом вязкости вытесняющей жидкости и уменьшением вязкости вытесняемой. Имеются указания, что применение пен, повышающих вязкость воды, нагнетаемой в нефтяной пласт, значительно увеличивает нефтеотдачу.

Как видно из рис. IX, 8, *а*, σ_Φ и $\sigma_{ср}$ сравнительно близки. Это дает основание для приближенных расчетов в первом приближении вообще принять насыщенность в зоне смеси везде постоянной и равной $\sigma_{ср}$, а также принимать при этом в расчетах вытеснения фазовые проницаемости $k_1^*(\sigma)$ и $k_2^*(\sigma)$ постоянными в зоне смеси, равными $k_1^*(\sigma_{ср})$ и $k_2^*(\sigma_{ср})$. Расчеты по точной теории и указанному выше упрощенному способу введения эквивалентной средней насыщенности удовлетворительно, как правило, согласуются, особенно при отсутствии массовых сил и постоянном сечении $S = \text{const}$. Более подробно эта задача рассмотрена Чэнь Чжун-сяном [9].

Введение эквивалентной насыщенности, часто применяемое в практических расчетах, позволяет свести расчет вытеснения с учетом фазовых проницаемостей к гораздо более простой схеме, приближающейся к схеме поршневого вытеснения [13].

В последнее время для интенсификации нефтедобычи начинают применять в качестве вытесняющего нефть агента какую-либо растворимую в нефти жидкость или газ, обычно пропан. Теория вытеснения взаимно растворимых жидкостей в трубах и пористых средах значительно сложнее изложенной выше теории Баклея — Леверетта и соответственно в меньшей степени разработана. Этому вопросу посвящен ряд сравнительно недавно выполненных исследований [Лт. VIII. 29; 45, 46], дающих возможность установить качественные и в известной степени количественные характеристики этого процесса.

При фильтрации взаимно растворимых жидкостей капиллярный скачок давления резко уменьшается и относительные фазовые проницаемости стремятся к соответствующим насыщенностям. При этом интенсивность вытеснения нефти значительно повышается.

Учитывая, однако, довольно высокую стоимость пен и растворимых вытесняющих агентов, выбирать тот или иной агент следует после достаточно тщательных технико-экономических расчетов.

§ 3. Общие соображения о движении скачков насыщенности

Пусть имеется начальный скачок насыщенности. Он может быть либо бесконечно малым и распределение насыщенности непрерывным, либо конечным с насыщенностями σ_1 и σ_2 (рис. IX. 9). Так как расход Q_1 зависит от насыщенности (в частности, он будет разным по

обе стороны сечения A, совпадающего со скачком), то скачок начнет двигаться, а вся кривая $\sigma = \sigma(x)$ деформироваться.

В дальнейшем этот скачок может либо «размазываться», либо сохраняться.

Применим закон сохранения массы движущихся фаз. Пусть за время dt скачок переместится на dx. Прирост объема первой фазы в объеме, пройденном скачком, будет (рис. IX. 9).

$$mS(x)(\sigma_1 - \sigma_2)\,dx.$$

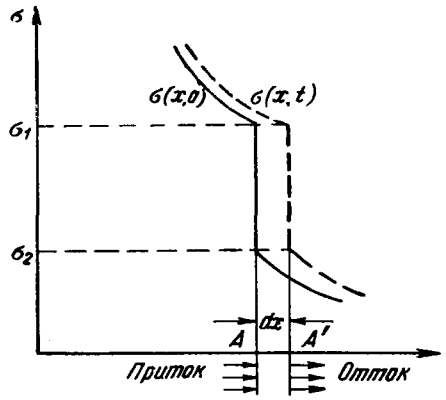


Рис. IX. 9.

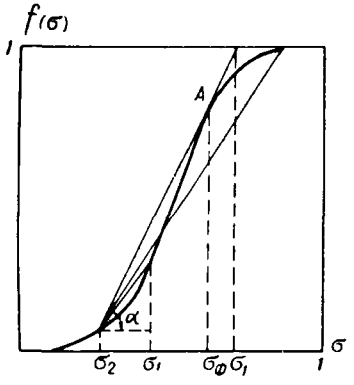


Рис. IX. 10.

Очевидно, что этот прирост равен $[Q_1(\sigma_1) - Q_1(\sigma_2)]\,dt$, откуда

$$mS(x)(\sigma_1 - \sigma_2)\,dx = [Q_1(\sigma_1) - Q_1(\sigma_2)]\,dt. \qquad \text{(IX. 3. 1)}$$

Из (IX. 3. 1) и (IX. 2. 5) следует, что скорость движения скачка для случая, когда скачки не «размазываются», равна

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}\,\frac{w_1(\sigma_1) - w_1(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{w}{m}\operatorname{tg}\alpha, \qquad \text{(IX. 3. 2)}$$

где угол α (рис. IX. 10) образован секущей, соединяющей точки $f(\sigma_1)$ и $f(\sigma_2)$ с осью абсцисс.

Объемная скорость скачка, т. е. объем пор, проходимый скачком в единицу времени, равна

$$v = mS(x)\,u = \frac{Q_1(\sigma_1) - Q_1(\sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} = Q\operatorname{tg}\alpha. \qquad \text{(IX. 3. 3)}$$

В предельном случае $\sigma_1 \to \sigma_2 \to \sigma$, т. е. в случае бесконечно малого скачка, получим скорость распространения заданной насыщенности, что совпадает с формулой (IX. 2. 9):

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{w}{m} f'(\sigma).$$

Формулы (IX. 3. 1.) и (IX. 3. 2) аналогичны известным уравнениям Гюгонио-Рэнкина, выражающим закон сохранения массы на фронте скачка уплотнения [Лт. II. 13; 10, 11].

Так как физический скачок (в отличие от математического) имеет малую, но конечную толщину δ, внутри которой насыщенность меняется от σ_1 до σ_2 непрерывным образом, то через некоторый промежуток времени благодаря тому, что скорость распространения фиксированной насыщенности зависит от своего значения σ, кривая на рис. IX. 11 примет вид, показанный пунктиром. Следовательно, скачок должен двигаться с максимальной скоростью, соответствующей скорости распространения некоторой промежуточной насыщенности σ_Φ, $\sigma_2 \leqslant \sigma_\Phi < \sigma_1$, т. е. со скоростью

$$u = \frac{1}{m} \frac{w_1(\sigma_\Phi) - w_1(\sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2}. \qquad \text{(IX. 3. 4)}$$

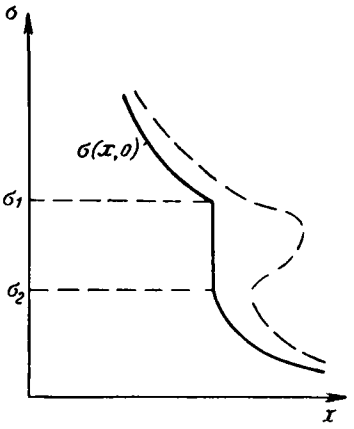


Рис. IX. 11.

При $\sigma_\Phi < \sigma_1$, σ_Φ — значение насыщенности, при которой секущая, соединяющая точки $f(\sigma_2)$ и $f(\sigma_\Phi)$, совпадает с касательной к кривой $f(\sigma)$ в точке $f(\sigma_\Phi)$ (см. рис. IX. 10).

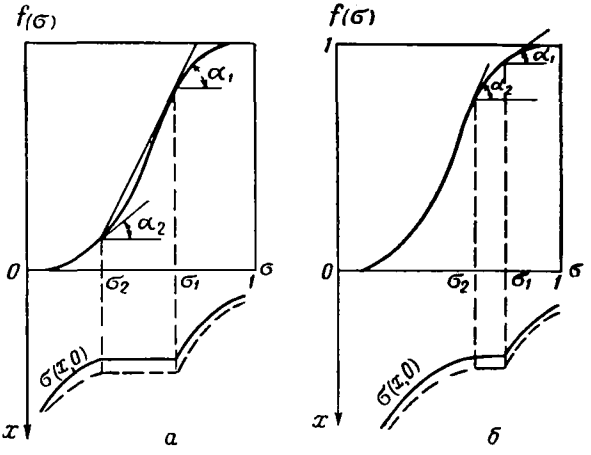


Рис. IX. 12.

Если первоначально (при возникновении скачка) было $\sigma_1 > \sigma_\Phi$, то часть фронта «размажется» и фронтовая насыщенность станет σ_Φ. Если первоначально было $\sigma_1 < \sigma_\Phi$, то фронтовая насыщенность

будет определяться значением σ_1 (рис. IX. 10). Обозначим углы, составляемые касательной к кривой $f(\sigma)$ с осью абсцисс в точках σ_1 и σ_2, через α_1 и α_2 (рис. IX. 12).

Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то скорость распространения насыщенности σ_1 больше скорости распространения меньшей насыщенности σ_2. Тогда скачок не может «размазываться», и он сохранится (рис. IX. 12, *а*).

Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то скорость распространения большей насыщенности σ_1 меньше скорости распространения меньшей насыщенности σ_2. В этом случае скачок «размазывается» (рис. IX. 12, *б*).

Из рис. IX. 10 и IX. 12 видно, в зависимости от того, в каком диапазоне насыщенностей существовал начальный скачок, он либо «размазывается», либо сохраняется.

§ 4. Одномерная фильтрация двухфазной жидкости в трубке тока переменного сечения без учета массовых сил

Пренебрегая капиллярным давлением и массовыми силами, согласно (IX. 2. 7) имеем

$$Q(t) f'(\sigma) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + mS(x) \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0. \qquad \text{(IX. 4. 1)}$$

Уравнения характеристик имеют вид:

$$\frac{dx}{Q(t) f'(\sigma)} = \frac{dt}{mS(x)} = \frac{d\sigma}{0}. \qquad \text{(IX. 4. 2)}$$

Отсюда получим первый частный интеграл

$$\sigma = C_1. \qquad \text{(IX. 4. 3)}$$

Из (IX. 4. 2) имеем

$$\frac{mS(x)}{Q(t)} \frac{dx}{dt} = f'(\sigma). \qquad \text{(IX. 4. 4)}$$

Введем функции

$$\Omega(x) = \int_{x_0}^{x} mS(x)\, dx \text{ — поровый объем,} \qquad \text{(IX. 4. 5)}$$

$$V(t) = \int_{t_0}^{t} Q(t)\, dt \text{ — закачиваемый объем,} \qquad \text{(IX. 4. 6)}$$

где x_0 — произвольное начальное сечение; t_0 — произвольный начальный момент времени.

Тогда

$$\frac{d\Omega}{dV} = f'(\sigma). \qquad \text{(IX. 4. 7)}$$

Из (IX. 4. 3) и (IX. 4. 4) получим решение уравнения (IX. 4. 1) в виде

$$\Omega = \Omega_0 + [V(t) - V_0] f'(\sigma). \qquad \text{(IX. 4. 8)}$$

Уравнение (IX. 4. 8) аналогично уравнению для распределения насыщенности в пласте при двухфазной фильтрации в трубке тока постоянного сечения с постоянной скоростью w:

$$x(\sigma, t) = x(\sigma, 0) + \frac{wt}{m} f'(\sigma).$$

Пусть $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\Omega_0 = V_0 = 0$, т. е. в начальный момент времени $t = 0$ левая часть пласта полностью заполнена первой фазой, а правая часть — второй фазой (рис. IX. 13). Тогда формула (IX. 4. 8) примет вид:

$$\Omega = Vf'(\sigma), \qquad \text{(IX. 4. 9)}$$

где $V = V(t)$ — закачанный объем; $\Omega = \Omega(\sigma)$ — объем пор, ограниченный начальным сечением, где $\sigma = 1$, и сечением с заданной насыщенностью σ.

Из (IX. 4. 9) $\Omega/V = f'(\sigma)$.

Предположим, что первая жидкость есть вода, вытесняющая вторую жидкость — нефть. Из (IX. 4. 9) следует, что нефтеотдача определяется закачанным объемом воды, причем темп закачки на нее не влияет. Следует подчеркнуть, что этот вывод справедлив только при пренебрежении капиллярностью.

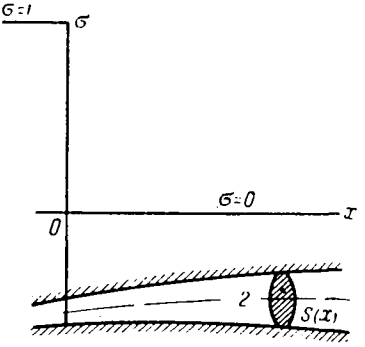


Рис. IX. 13.

Многочисленные экспериментальные данные показывают, что в действительности нефтеотдача, вообще говоря, зависит от темпа вытеснения, хотя изложенная выше теория дает качественно, а в ряде случаев и количественно вполне правильную картину распределения насыщенностей, давлений и скоростей по крайней мере по порядку величин. В одних случаях нефтеотдача увеличивается при повышении темпа нагнетания воды, в других — при уменьшении в зависимости от гидрофильности или гидрофобности пористой среды и величины межфазного натяжения между нефтью и водой. Последняя может регулироваться добавлением поверхностно-активных веществ, чему в последнее время уделяется большое внимание. Ряд весьма интересных экспериментальных данных по этим вопросам приведен, в частности, в работах М. М. Кусакова, Ш. К. Гиматуддинова и в недавней работе А. Е. Евгеньева [14], а также в [Лт. I. 5]. Как упоминалось выше, вопросы нефтедобычи требуют дальнейших исследований, которые в настоящее время интенсивно продолжаются как в СССР, так и за рубежом.

Вернемся к нашей задаче.

Согласно (IX. 3. 3) для скачка имеется следующее уравнение:

$$mS(x)\frac{dx}{dt} = \frac{Q_1(\sigma_2) - Q_1(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1}, \qquad \text{(IX. 4. 10)}$$

где $mS(x)\frac{dx}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}$ — объемная скорость скачка. Согласно (IX.2.5) $Q_1 = Qf(\sigma)$. Уравнение (IX.4.10) может быть представлено в виде

$$\frac{d\Omega}{dV} = \frac{f(\sigma_2) - f(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1}. \qquad \text{(IX.4.11)}$$

При $\sigma_1 \to \sigma_2$ равенство (IX.4.11) переходит, как и должно быть, в (IX.4.9).

Определим среднюю насыщенность в переходной зоне.

В каждый момент времени объем первой фазы V_1 равен

$$V_1 = \int_0^{x_\Phi} \sigma m S(x)\,dx = \int_0^{\Omega_\Phi} \sigma\,d\Omega = \sigma_\Phi\Omega_\Phi - \int_1^{\sigma_\Phi} \Omega\,d\sigma =$$

$$= \sigma_\Phi\Omega_\Phi - \int_1^{\sigma_\Phi} Vf'(\sigma)\,d\sigma = \sigma_\Phi\Omega_\Phi - \Omega_\Phi[f(\sigma_\Phi) - 1]/f'(\sigma_\Phi). \qquad \text{(IX.4.12)}$$

Средняя насыщенность $\sigma_{ср}$ будет равна

$$\sigma_{ср} = \frac{V_1}{\Omega_\Phi} = \sigma_\Phi + [1 - f(\sigma_\Phi)]\Big/ f'\,\sigma_\Phi = \frac{1}{f'(\sigma_\Phi)}. \qquad \text{(IX.4.13)}$$

Формула (IX.4.13) вполне совпадает с формулой (IX.2.16).

Рассмотрим фильтрацию двухфазной жидкости в пласте с заданным давлением на концах.

Пусть пласт вначале в левой части был полностью заполнен первой фазой, а в правой части — второй фазой. В сечении раздела $x = 0$ и на конце пласта $x = l$ заданы давления $p_0(t)$ и $p_l(t)$. Под действием перепада давлений $\Delta p_{0-l} = p_0(t) - p_l(t)$ первая жидкость вытесняет вторую жидкость и в пласте образуется переходная зона. Фронт движения первой фазы x_Φ продвигается с течением времени (рис. IX.14).

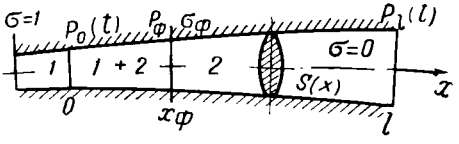


Рис. IX.14.

Движение жидкостей в пласте описывается уравнением типа Дарси

$$Q_1 = -\frac{kk_1^*(\sigma)}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x}S(x),$$
$$Q_2 = -\frac{kk_2^*(\sigma)}{\mu_2}\frac{\partial p}{\partial x}S(x). \qquad \text{(IX.4.14)}$$

Суммарный расход

$$Q(t) = Q_1 + Q_2 = -kS(x)(c_1 + c_2)\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \text{(IX.4.15)}$$

где

$$c_1 = \frac{k_1^*(\sigma)}{\mu_1}, \quad c_2 = \frac{k_2^*(\sigma)}{\mu_2}.$$

Из (IX.4.15) получим

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{Q(t)}{kS(x)(c_1+c_2)}. \qquad \text{(IX.4.16)}$$

Интегрируя уравнение (IX.4.16) по области, занятой смесью, получаем перепад между начальной границей $x=0$ и фронтом x_Φ:

$$p_0(t) - p_\Phi(t) = \frac{Q(t)}{k}\int_0^{x_\Phi} \frac{dx}{S(x)(c_1+c_2)}. \qquad \text{(IX.4.17)}$$

Интегрируя (IX.4.16) по области, занятой чистой второй фазой, получаем перепад между фронтом и концом пласта:

$$p_\Phi(t) - p_l(t) = \frac{Q(t)\mu_2}{k}\int_{x_\Phi}^{l} \frac{dx}{S(x)}. \qquad \text{(IX.4.18)}$$

Складывая (IX.4.17) и (IX.4.18), получаем

$$p_0(t) - p_l(t) = \frac{Q(t)}{k}\left[\int_0^{x_\Phi} \frac{dx}{S(x)(c_1+c_2)} + \mu_2\int_{x_\Phi}^{l} \frac{dx}{S(x)}\right], \qquad \text{(IX.4.19)}$$

причем $p_0(t) - p_l(t)$ — известная функция времени t.

Для двухфазной фильтрации имеется соотношение

$$\frac{\Omega}{V} = f'(\sigma), \qquad \text{(IX.4.20)}$$

где

$$\Omega = \int_0^x mS(x)\,dx, \qquad \text{(IX.4.21)}$$

$$V = \int_0^t Q(t)\,dt. \qquad \text{(IX.4.22)}$$

Из (IX.4.20) и (IX.4.21) имеем обратную функцию

$$x = x(\Omega) = x[Vf'(\sigma)]. \qquad \text{(IX.4.23)}$$

Тогда

$$dx = x'[Vf'(\sigma)]Vf''(\sigma)\,d\sigma, \qquad \text{(IX.4.24)}$$

так как в последнем соотношении t — фиксированный параметр,

$$S(x) = S[x(\Omega)] = S\{x[Vf'(\sigma)]\}. \qquad \text{(IX.4.25)}$$

Подставим все это в уравнение (IX.4.19). Учитывая, что

$$\frac{dV}{dt} = Q(t),\ p_0(t) - p_l(t) = \Delta p_{0-l},$$

получаем

$$\Delta p_{0-l} = \frac{1}{k}\frac{dV}{dt}\left\{V\int_1^{\sigma_\Phi}\frac{x'[Vf'(\sigma)]f''(\sigma)\,d\sigma}{S\{x[Vf'(\sigma)]\}(c_1+c_2)} + \right.$$

$$\left. + \mu_2\int_{x_\Phi}^{l}\frac{dx}{S(x)}\right\}. \qquad \text{(IX.4.26)}$$

Итак, мы получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\Delta p_{0-l} = \Delta p_{0-l}(t) = \Phi\left(V, \frac{dV}{dt}\right) = \frac{dV}{dt}\Psi(V), \qquad \text{(IX.4.27)}$$

где

$$\Psi(V) = \frac{1}{k}\left\{V\int_1^{\sigma_\Phi}\frac{x'[Vf'(\sigma)]f''(\sigma)\,d\sigma}{S\{x[Vf'(\sigma)]\}(c_1+c_2)} + \mu_2\int_{x_\Phi}^{l}\frac{dx}{S(x)}\right\}.$$

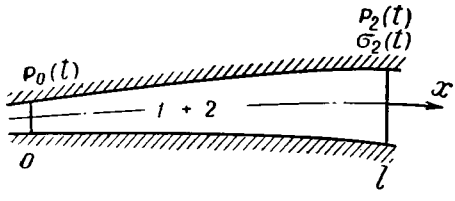


Рис. IX. 15.

При этом начальное условие имеет вид $V = 0$ при $t = 0$, а σ_Φ остается постоянной.

Формулой (IX.4.26) можно пользоваться до момента прихода фронта к концу пласта, т. е. когда $x_\Phi \leqslant l$. Рассмотрим вторую фазу двухфазной фильтрации после достижения фронтом конца пласта (рис. IX. 15):

$$\Delta p_{0-l} = p_0(t) - p_l(t) = \frac{Q(t)}{k}\int_0^{l}\frac{dx}{S(x)(c_1+c_2)}. \qquad \text{(IX.4.28)}$$

Из формулы (IX.4.23) получим

$$l = x[Vf'(\sigma_l)], \qquad \text{(IX.4.29)}$$

где σ_l — насыщенность в конце пласта, являющаяся функцией V.

Подставляя (IX. 4. 24), (IX. 4. 25), (IX. 4. 29) в уравнение (IX. 4. 28), получаем

$$\Delta p_{0-l}(t) = \frac{1}{k}\frac{dV}{dt} V \int_1^{\sigma_l} \frac{x'\,[Vf'(\sigma)]\,f''(\sigma)\,d\sigma}{S\{x\,[Vf'(\sigma)]\}(c_1+c_2)}. \quad \text{(IX. 4. 30)}$$

Интегрирование уравнений (IX. 4. 27) и (IX. 4. 30) не вызывает никаких принципиальных затруднений и сопряжено только с численным или графическим выполнением квадратур. Некоторые задачи рассмотрены в работах [9, 15, 16].

§ 5. Одномерная фильтрация двухфазной жидкости с произвольными массовыми силами

Одномерное движение двухфазной жидкости с произвольными массовыми силами без учета капиллярного давления описывается следующими формулами

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{kk_1^*(\sigma)}{\mu_1}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \varrho_1 X\right) S(x), \\ Q_2 &= -\frac{kk_2^*(\sigma)}{\mu_2}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \varrho_2 X\right) S(x), \end{aligned} \quad \text{(IX. 5. 1)}$$

где X — проекция ускорения массовых сил на направление течения x.

Считая жидкости несжимаемыми, уравнения неразрывности можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial Q_1}{\partial x} &= mS(x)\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \\ -\frac{\partial Q_2}{\partial x} &= mS(x)\frac{\partial (1-\sigma)}{\partial t}. \end{aligned} \quad \text{(IX. 5. 2)}$$

Из (IX. 5. 2), как мы уже имели раньше,

$$\frac{\partial (Q_1+Q_2)}{\partial x} = 0,\ Q_1 + Q_2 = Q(t). \quad \text{(IX. 5. 3)}$$

Выразим расход Q_1 через $Q(t)$:

$$Q(t) = -k(c_1+c_2)\frac{\partial p}{\partial x} S(x) + kS(x)X(\varrho_1 c_1 + \varrho_2 c_2), \quad \text{(IX. 5. 4)}$$

где

$$c_1 = \frac{k_1^*(\sigma)}{\mu_1},\ c_2 = \frac{k_2^*(\sigma)}{\mu_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{-Q(t) + kS(x)X(\varrho_1 c_1 + \varrho_2 c_2)}{kS(x)(c_1+c_2)}. \quad \text{(IX. 5. 5)}$$

Из (IX.5.5) и (IX.5.1) получим

$$Q_1 = -kc_1\left[\frac{-Q(t)+kS(x)X(\varrho_1c_1+\varrho_2c_2)}{kS(x)(c_1+c_2)} - \varrho_1 X\right]S(x) =$$

$$= \frac{c_1Q(t)}{c_1+c_2} + \frac{c_1c_2}{c_1+c_2}k\Delta\varrho\, XS(x) = f(\sigma)Q(t) + f_1(\sigma)v(x)S(x) =$$

$$= Q_1(x,\ t,\ \sigma), \qquad \text{(IX.5.6)}$$

где

$$f(\sigma) = \frac{c_1}{c_1+c_2} = \frac{\mu_0 k_1^*(\sigma)}{\mu_0 k_1^*(\sigma)+k_2^*(\sigma)}, \qquad \text{(IX.5.7)}$$

$$f_1(\sigma) = \frac{\mu_1 c_1 c_2}{c_1+c_2} = \frac{k_1^*(\sigma)\,k_2^*(\sigma)}{\mu_0 k_1^*(\sigma)+k_2^*(\sigma)}; \qquad \text{(IX.5.8)}$$

$$v(x) = \frac{k\Delta\varrho\, X}{\mu_1};\ \Delta\varrho = \varrho_1 - \varrho_2; \qquad \text{(IX.5.9)}$$

$v(x)$ — величина, имеющая размерность скорости.

В поле сил тяжести (рис. IX.16, *а*)

$$X = -g\sin\alpha\ (g = 9{,}81\ м/сек^2),$$

$$v = \frac{k\Delta\varrho\, gi}{\mu_1} = \frac{k\Delta\gamma\, i}{\mu_1}, \qquad \text{(IX.5.10)}$$

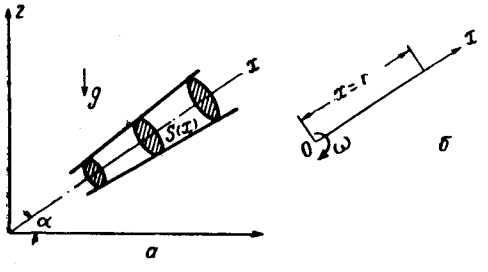


Рис. IX.16.

где α — угол наклона оси x к горизонту; $i = \sin\alpha$.

В поле центробежных сил (рис. IX.16, *б*)

$$X = \omega^2 x,$$

где ω — угловая скорость вращения относительно начала координат; $x = r$ — радиус вращения;

$$v(x) = \frac{k\Delta\varrho\omega^2 r}{\mu_1}.$$

Подставляя значения Q_1 из уравнения (IX.5.6) в первое уравнение неразрывности (IX.5.2), получаем

$$mS(x)\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 0$$

или

$$mS(x)\frac{\partial\sigma}{\partial t} + [Q(t)f'(\sigma) + v(x)S(x)f_1'(\sigma)]\frac{\partial\sigma}{\partial x} +$$

$$+ [v'(x)S(x) + S'(x)v(x)]f_1(\sigma) = 0. \qquad \text{(IX.5.11)}$$

Напишем систему дифференциальных уравнений характеристик для уравнения (IX.5.11):

$$\frac{dt}{mS(x)} = \frac{dx}{Q(t)f'(\sigma)+v(x)S(x)f_1'(\sigma)} = \frac{-d\sigma}{[v'(x)S(x)+S'(x)v(x)]f_1(\sigma)}. \quad \text{(IX.5.12)}$$

Если решение уравнений (IX. 5. 12) однозначно, то имеет место непрерывность в зоне смеси, если же решение многозначно, то существуют скачки. Для скачков должно соблюдаться следующее условие. Пусть в течение времени dt фронт продвигается на dx (рис. IX. 17). В участке dx начальное содержание первой фазы равно $mS(x)\,dx\,\sigma_2$. За время dt приток через левое сечение равен $Q_1(x, t, \sigma_\Phi)\,dt$. Через то же время конечное содержание первого компонента равно $mS(x)\,dx\,\sigma_\Phi$, а отток через правое сечение $Q_1(x+dx, t, \sigma_2)\,dt$. Очевидно, $dx = u\,dt$, где u — скорость фронта.

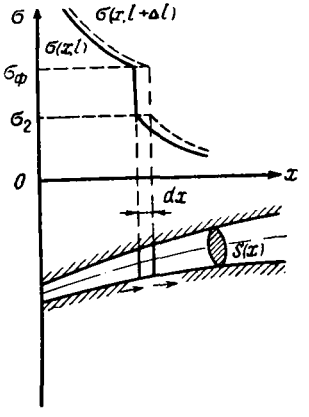


Рис. IX. 17.

Напишем уравнение сохранения массы в виде формулы, выражающей положение: начальное содержание фазы плюс ее приток равно конечному содержанию фазы плюс ее отток:

$$mS(x)\,dx\,\sigma_2 + Q_1(x, t, \sigma_\Phi)\,dt = mS(x)\,dx\,\sigma_\Phi + Q_1(x+dx, t, \sigma_2)\,dt. \quad \text{(IX.5.13)}$$

После преобразования уравнения (IX.5.13) получим

$$mS(x)\frac{dx}{dt} = \frac{Q_1(x, t, \sigma_\Phi) - Q_1(x+dx, t, \sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2}, \quad \text{(IX.5.14)}$$

$$Q_1(x+dx, t, \sigma_2) = Q_1(x, t, \sigma_2) + \frac{\partial Q_1(x, t, \sigma_2)}{\partial x}dx. \quad \text{(IX.5.15)}$$

Член $\frac{\partial Q_1(x, t, \sigma_2)}{\partial x}dx$ — бесконечно малая первого порядка и ею можно пренебречь. Тогда получим условие на фронте в виде

$$mS(x)\frac{dx}{dt} = \frac{Q_1(x, t, \sigma_\Phi) - Q_1(x, t, \sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2}. \quad \text{(IX.5.16)}$$

Рассмотрим закон движения некоторой геометрической точки («наблюдателя»)

$$x = x(t) \quad \text{(IX.5.17)}$$

и определим по формуле полного дифференциала те изменения насыщенности $d\sigma$ и $\frac{d\sigma}{dt}$, которые регистрирует этот наблюдатель:

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma}{\partial t} dt,$$
$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \qquad \text{(IX. 5. 18)}$$

Исключая $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ из (IX. 5. 18) и (IX. 5. 11), получаем

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{mS(x)\frac{d\sigma}{dt} + [v'(x) S(x) + S'(x) v(x)] f_1(\sigma)}{mS(x)\frac{dx}{dt} - [Q(t) f'(\sigma) + v(x) S(x) f_1'(\sigma)]}. \qquad \text{(IX. 5. 19)}$$

Будем искать сильный разрыв, т. е. потребуем, чтобы $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \infty$, что означает требование обращения в нуль знаменателя в (IX. 5. 19). Следовательно, на фронте должно выполняться условие

$$\left[mS(x)\frac{dx}{dt}\right]_\Phi = \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_\Phi = Q(t) f'(\sigma_\Phi) + v(x) S(x) f_1'(\sigma_\Phi). \qquad \text{(IX. 5. 20)}$$

Одновременно с этим, как это следует из (IX. 5. 16), на фронте должно выполняться соотношение

$$\left[mS(x)\frac{dx}{dt}\right]_\Phi = \left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_\Phi = \frac{Q_1(x, t, \sigma_\Phi) - Q_1(x, t, \sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2}. \qquad \text{(IX. 5. 21)}$$

Из (IX. 5. 20) и (IX. 5. 21) следует, что необходимым условием существования фронта будет равенство

$$Q(t) f'(\sigma_\Phi) + v(x) S(x) f_1'(\sigma_\Phi) = \frac{Q_1(x, t, \sigma_\Phi) - Q_1(x, t, \sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2} \qquad \text{(IX. 5. 22)}$$

или, учитывая, что из (IX. 5. 6)

$$\frac{\partial Q_1(x, t, \sigma)}{\partial \sigma} = Q(t) f'(\sigma) + v(x) S(x) f_1'(\sigma),$$

получаем

$$\frac{\partial Q_1(x, t, \sigma_\Phi)}{\partial \sigma} = \frac{Q_1(x, t, \sigma_\Phi) - Q_1(x, t, \sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2}. \qquad \text{(IX. 5. 23)}$$

Подставляя в (IX. 5. 23) вместо $Q_1(x, t, \sigma)$ его значение по формуле (IX. 5. 6), получаем условие существования фронта в виде

$$v(x) S(x)\left[f_1'(\sigma_\Phi) - \frac{f_1(\sigma_\Phi) - f_1(\sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2}\right] +$$
$$+ Q(t)\left[f'(\sigma_\Phi) - \frac{f(\sigma_\Phi) - f(\sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2}\right] = 0, \qquad \text{(IX. 5. 24)}$$

т. е. в общем случае фронтовая насыщенность зависит от $v(x)$, $S(x)$, σ_2, $Q(t)$.

Если $v(x) = 0$ или $Q(t) = 0$, то для существования фронта будем иметь соответственно условия

$$f'(\sigma_\Phi) = \frac{f(\sigma_\Phi) - f(\sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2}$$

или

$$f_1'(\sigma_\Phi) = \frac{f_1(\sigma_\Phi) - f_1(\sigma_2)}{\sigma_\Phi - \sigma_2}, \qquad \text{(IX. 5. 25)}$$

т. е. в любом из этих двух случаев фронтовая насыщенность будет зависеть только от σ_2, и если $\sigma_2 = \text{const}$, то фронтовая насыщенность σ_Φ является постоянной.

Рассмотрим следующую задачу. Дана вертикальная трубка $S = \text{const}$ (рис. IX. 18), заполненная пористой средой, с перегородкой в сечении $O—O$. Выше сечения $O—O$ находится тяжелая жидкость, например вода, ниже более легкая, например нефть или газ, который в первом приближении считается несжимаемым. В какой-то момент перегородка $O—O$ убирается. Требуется рассмотреть, как будет всплывать нефть и опускаться вода. Очевидно, что суммарный расход воды и нефти через любое сечение равен нулю: $Q(t) = 0$. Тогда из (IX. 5. 6) $Q_1 = vSf_1(\sigma)$, причем под σ будем понимать водонасыщенность. График распределения водонасыщенности в начальный момент времени представлен на рис. IX. 19 — в сечении $z = 0$ имеется начальный скачок насыщенности от 0 до 1.

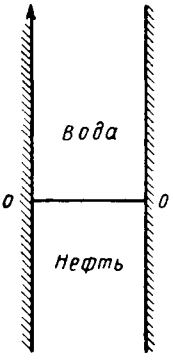


Рис. IX. 18.

Для решения задачи строим график $f_1(\sigma)$ и ее производной (рис. IX. 20). Так как $\sigma = 0$ для $z < 0$ и $\sigma = 1$ для $z > 0$, то для определения фронтовых насыщенностей из точек оси абсцисс σ рис. IX. 20 O и 1 строим касательные к кривой $f_1(\sigma)$, причем $\sigma_{\Phi 2}$ — водонасыщенность на фронте всплывающей нефти, а $\sigma_{\Phi 1}$ — водонасыщенность на фронте опускающейся воды.

Из (IX. 5. 12), в котором x заменяется через z, следует, что $z = v/mf_1'(\sigma)\,t$. Следовательно, зная $\sigma_{\Phi 1}$ и $\sigma_{\Phi 2}$, и определяя по рис. IX. 20 значения $f_1'(\sigma_{\Phi 1})$ и $f_1'(\sigma_{\Phi 2})$, можно найти положение фронтов в любой момент времени.

На рис. IX. 21 показано примерное распределение водонасыщенности в последующие моменты времени. Рассмотренная выше задача может быть использована для оценки скоростей миграции нефти и газа в наклонных водонасыщенных пластах под действием сил Архимеда. Некоторые такие оценочные расчеты приведены в работе Чэнь Чжун-сяна [9].

Перейдем к интегрированию системы (IX. 5. 12). Систему уравнений (IX. 5. 12) перепишем в виде двух соотношений:

$$\frac{dt}{mS(x)} = -\frac{d\sigma}{[v'(x)S(x)+S'(x)v(x)]f_1(\sigma)},$$
$$\frac{dx}{Q(t)f'(\sigma)+v(x)S(x)f_1'(\sigma)} = -\frac{d\sigma}{[v'(x)S(x)+S'(x)v(x)]f_1(\sigma)}. \quad \text{(IX. 5. 26)}$$

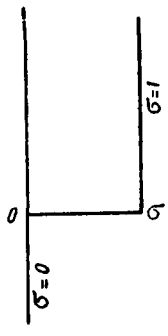


Рис. IX. 19.

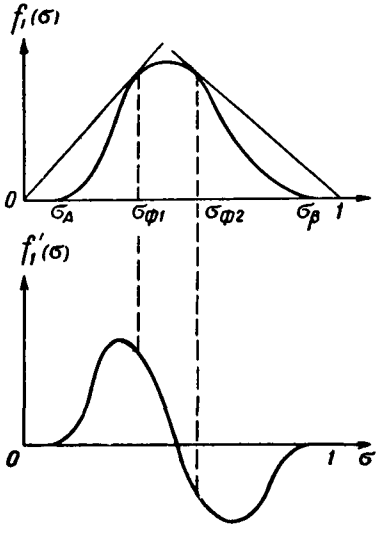


Рис. IX. 20.

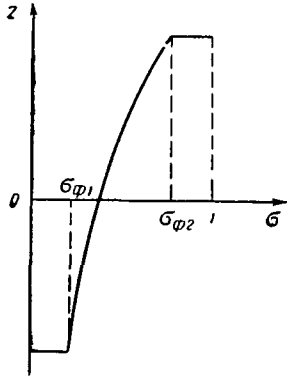


Рис. IX. 21.

Первое уравнение системы (IX. 5. 26) можно записать так:

$$\frac{dt}{d\sigma} f_1(\sigma) = -\frac{mS(x)}{[v'(x)S(x)+S'(x)v(x)]}. \quad \text{(IX. 5. 27)}$$

Введем функцию

$$\omega(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{f_1(\sigma)}. \quad \text{(IX. 5. 28)}$$

Таким образом, уравнение (IX. 5. 27) имеет вид:

$$\frac{dt}{d\omega} = F(x), \quad \text{(IX. 5. 29)}$$

где

$$F(x) = -\frac{mS(x)}{v'(x)S(x)+S'(x)v(x)}.$$

Второе уравнение системы (IX.5.26) можно записать так:

$$\frac{dx}{d\sigma} f_1(\sigma) = -\frac{Q(t) f'(\sigma) + v(x) S(x) f_1'(\sigma)}{v'(x) S(x) + S'(x) v(x)} = \Phi(\sigma, x, t) \quad \text{(IX.5.30)}$$

или, так как согласно (IX.5.28) σ — функция переменной ω,

$$\frac{dx}{d\omega} = \Phi(x, t, \sigma) = \Phi[x, t, \sigma(\omega)] = \Psi(\omega, x, t). \quad \text{(IX.5.31)}$$

Теперь имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\omega} &= \Psi(\omega, x, t), \\ \frac{dt}{d\omega} &= F(x). \end{aligned} \quad \text{(IX.5.32)}$$

В общем случае систему (IX.5.32) приходится решать численными методами. Иногда возможно и аналитическое решение.

Пусть второе уравнение системы (IX.5.32) решено относительно x:

$$x = x\left(\frac{dt}{d\omega}\right). \quad \text{(IX.5.33)}$$

Подставляя (IX.5.33) в первое уравнение системы (IX.5.32), получаем

$$\frac{dx}{d\omega} = x'\left(\frac{dt}{d\omega}\right)\frac{d^2t}{d\omega^2} = \Psi\left[\omega, x\left(\frac{dt}{d\omega}\right), t\right]. \quad \text{(IX.5.34)}$$

Окончательно получим уравнение

$$\frac{d^2t}{d\omega^2} = \Psi\left[\omega, x\left(\frac{dt}{d\omega}\right), t\right] \Big/ x'\left(\frac{dt}{d\omega}\right) = \lambda\left(\omega, t, \frac{dt}{d\omega}\right). \quad \text{(IX.5.35)}$$

Интегрируя уравнение (IX.5.35), найдем частный интеграл

$$\lambda_1(t, \omega) = C_1. \quad \text{(IX.5.36)}$$

Из этого решения согласно (IX.5.33) найдем второе частное решение:

$$x = x\left(\frac{dt}{d\omega}\right). \quad \text{(IX.5.37)}$$

Тогда общее решение уравнения (IX.5.12) имеет вид:

$$\Lambda\left[C_1, x\left(\frac{dt}{d\omega}\right)\right] = 0, \quad \text{(IX.5.38)}$$

где Λ — произвольная функция.

Исходя из начального распределения насыщенности, можно найти решение для дальнейшего распределения. Этот метод принципиально позволяет найти решение во всех случаях. Некоторые численные примеры приведены в работе Чэнь Чжун-сяна [9], который рассмотрел также случаи переменной проницаемости $k = k(x)$ в этих задачах.

Рассмотрим частные случаи.

1. $v(x) = v = \text{const}$, $Q(t) = Q = \text{const}$.

Очевидно, что в этом случае уже не нужно вводить функцию ω. Из (IX.5.12) получается система уравнений

$$\frac{dt}{d\sigma} = -\frac{mS(x)}{vS'(x) f_1(\sigma)},$$

$$\frac{dx}{d\sigma} = -\frac{Q(t) f'(\sigma) + vS(x) f_1'(\sigma)}{vS'(x) f_1(\sigma)}. \qquad \text{(IX.5.39)}$$

В этом случае можно решить систему уравнений (IX.5.12) иным способом. Перепишем (IX.5.39) в виде

$$\frac{S'(x)\,dx}{d\sigma} = -\frac{Q(t) f'(\sigma) + vS(x) f_1'(\sigma)}{v f_1(\sigma)}. \qquad \text{(IX.5.40)}$$

Из первого уравнения системы (IX.5.40) имеем

$$\frac{dt}{d\sigma} = -\frac{mS(x)}{vS'(x) f_1(\sigma)}. \qquad \text{(IX.5.41)}$$

Уравнение (IX.5.41) есть обыкновенное линейное уравнение первого порядка. Его решение имеет вид

$$\frac{dS(x)}{d\sigma} + \frac{f_1'(\sigma)}{f_1(\sigma)} S(x) + \frac{Qf'(\sigma)}{v f_1(\sigma)} = 0. \qquad \text{(IX.5.42)}$$

$$S(x) = \frac{1}{f_1(\sigma)}\left[C_1 - \frac{Q}{v} f(\sigma)\right]. \qquad \text{(IX.5.43)}$$

Уравнение (IX.5.43) есть первый частный интеграл системы уравнений (IX.5.40). Оно дает зависимость $x = x(\sigma, C_1)$.

Из второго уравнения системы (IX.5.40) получим

$$\frac{dt}{d\sigma} = -\frac{mS(x)}{vS'(x) f_1(\sigma)} = \varphi_1(\sigma), \qquad \text{(IX.5.44)}$$

откуда

$$t = \int \varphi_1(\sigma)\,d\sigma + C_2. \qquad \text{(IX.5.45)}$$

Общее решение системы уравнений (IX. 5. 40) будет

$$\Psi\left[f_1^{(\sigma)}S(x)+\frac{Q}{v}f(\sigma),\ t-\int\varphi_1(\sigma)\,d\sigma\right]=0, \qquad \text{(IX. 5. 46)}$$

где Ψ — произвольная функция.

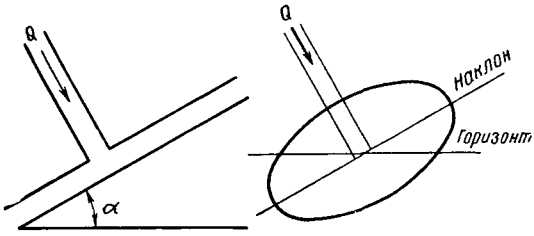


Рис. IX. 22.

2. $v(x)=v=\text{const}$, $S(x)=S=\text{const}$.

При движении в трубке тока постоянного сечения $S(x)=S=$ $=\text{const}$ система уравнений (IX. 5. 12) примет вид:

$$\frac{dt}{mS}=\frac{dx}{Q(t)f'(\sigma)+vSf_1'(\sigma)}=\frac{d\sigma}{0}. \qquad \text{(IX. 5. 47)}$$

Ее общее решение

$$\Psi\left\{\sigma,\ x-\frac{1}{mS}\left[f'(\sigma)\int Q(t)\,dt+vSf_1'(\sigma)\,t\right]\right\}=0. \qquad \text{(IX. 5. 48)}$$

Рассмотрим практический пример. Пусть пласт имеет наклон α к горизонту (рис. IX. 22). Вдоль горизонтальных линий тока $v=0$; вдоль наклонных линий тока в направлении α согласно (IX. 5. 10)

$$v=\pm\frac{k\,\Delta\gamma}{\mu_1}i,$$

где

$$i=\sin\alpha.$$

Через скважину, расположенную в центре пласта, заполненного одной жидкостью, нагнетается другая жидкость.

Пусть $Q=\text{const}$ и вначале пласт полностью заполнен одной жидкостью. Будем считать в первом приближении, что трубки тока остаются плоско-радиальными. Дифференциальное уравнение (IX. 5. 20) движения фронта имеет вид:

$$mS(x)\frac{dx}{dt}=Qf'(\sigma)+vS(x)f_1'(\sigma). \qquad \text{(IX. 5. 49)}$$

На фронте вдоль наклонных прямых $i = \pm \sin \alpha$ должно удовлетворяться условие (IX. 5. 21):

$$\left[mS(x)\frac{dx}{dt}\right]_{\Phi} = Qf'(\sigma_{\Phi}) \pm vS(x_{\Phi}) f_1'(\sigma_{\Phi}) = \frac{Q_1}{\sigma_{\Phi}} = \\ = \frac{Qf(\sigma_{\Phi}) \pm vS(x_{\Phi}) f_1(\sigma_{\Phi})}{\sigma_{\Phi}}.$$

Таким образом, имеем

$$Qf'(\sigma_{\Phi}) \pm vS(x_{\Phi}) f_1'(\sigma_{\Phi}) = \frac{Qf(\sigma_{\Phi}) \pm vS(x_{\Phi}) f_1(\sigma_{\Phi})}{\sigma_{\Phi}}. \quad \text{(IX. 5. 50)}$$

Предположим, что на фронте Q_1, v, $S(x)$ — известные функции. Задаваясь разными значениями x, по формуле (IX. 5. 6)

$$Q_1 = Qf(\sigma) \pm vS(x) f_1(\sigma)$$

при $Q = \text{const}$ можно построить зависимость Q_1 от σ (рис. IX. 23).

На рис. IX. 23 из начала координат проводим касательную к кривой $Q_1(\sigma)$. Величина σ для точки касания согласно (IX. 5. 23) есть фронтовая насыщенность, которая, таким образом, при $\alpha \neq 0$ зависит от x. Расчеты показывают, что при малых углах α и достаточных темпах нагнетания изменение фронтовой насыщенности от значения, даваемого теорией Баклея — Леверетта, т. е. при $v(x) = 0$, незначительно и его в первом приближении можно не учитывать. Если же темп нагнетания мал, то это изменение становится существенным и фронтовая насыщенность при учете гравитации, т. е. когда $v(x) \neq 0$, отличается от значения, получаемого без учета гравитации по теории Баклея — Леверетта. Некоторые расчеты движения скачков насыщенности приведены в [17], а также в работе Чэнь Чжун-сяна [9].

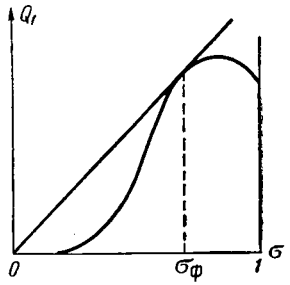


Рис. IX. 23.

Везде выше обе жидкости предполагались несжимаемыми. Точный учет сжимаемости, когда одна из фаз является газом, наталкивается на серьезные математические трудности и поэтому приходится идти на различные упрощающие допущения, например использование метода последовательной смены стационарных состояний и его разновидностей, соображений материального баланса и т. п.

§ 6. Фильтрация двухфазной жидкости с учетом капиллярного давления

Выше мы пренебрегали капиллярным давлением, т. е. считали, что $p_1 = p_2$. При этом, как отмечалось выше, капиллярные эффекты косвенно учитываются самим видом кривых фазовых проницаемостей, вообще говоря, существенно зависящих в зоне малых проницаемостей от насыщенностей. Сложный механизм процесса вытеснения одной жидкости другой в пористой среде можно представить себе следующим образом.

Поскольку реальная пористая среда характеризуется тем или иным распределением поперечных размеров поровых каналов, вытеснение начинается не одновременно во всех каналах. Когда мы говорим, что пористая среда характеризуется некоторой проницаемостью k, это в действительности означает, что k — среднее значение проницаемостей всех поровых каналов, относительно больших и малых, причем малые и большие поровые каналы характеризуются соответственно относительно меньшей и большей проницаемостью по сравнению с k — средним значением.

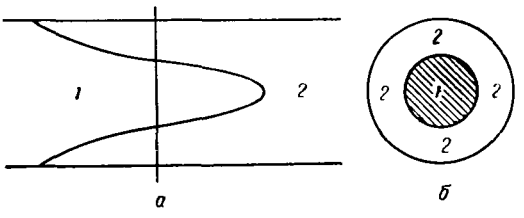


Рис. IX. 24. Схема вытеснения в круглой трубе.

Вытеснение в пористой среде можно рассматривать следующим образом. В поровых каналах с относительно большими размерами поперечных сечений вытеснение происходит приблизительно, как в трубах, ранее заполненных одной жидкостью, которая начинает вытесняться другой. Если диаметр трубы не очень мал, капиллярным скачком давлений можно в первом приближении пренебречь. При этом, учитывая к тому же ламинарный характер вытеснения, поперечное сечение трубы вытесняющей жидкостью заполняется не сразу, а постепенно — клин вытесняющей жидкости внедряется в вытесняемую примерно так, как показано на рис. IX. 24, *а*. Каждое поперечное сечение трубы одновременно занято двумя жидкостями, причем часть площади, занятая вытесняющей жидкостью, с течением времени постепенно увеличивается (рис. IX. 24, *б*). Поскольку эту часть площади можно трактовать как «насыщенность» при вытеснении из трубы, ясно, что «фазовая проницаемость», определяющая в данном случае соотношение между расходом и градиентом давления, будет зависеть от «насыщенности». В пористой среде на этот эффект непоршневого вытеснения накладывается новый эффект — обусловленное капиллярностью неодновременное начало вытеснения во всех поро-

вых каналах и несинхронный процесс развития дальнейшего вытеснения, когда оно захватило уже все поровые каналы.

Таким образом, в реальной пористой среде процесс вытеснения является крайне сложным и в должной степени еще далеко не исследованным.

В первом приближении можно построить теорию, в основе которой лежит условие об однозначной экспериментальной зависимости фазовых проницаемостей от насыщенности и пренебрежение капиллярным скачком давлений. Эта теория для одномерного движения была изложена выше. Заметим попутно, что исследование даже при этих условиях неодномерных случаев вытеснения в точной постановке с учетом преломления линий тока на подвижной границе наталкивается на непреодолимые пока математические трудности и здесь, по-видимому, остается в качестве эффективного метода только метод жестких трубок тока.

Теорией следующего приближения является также предположение об однозначной зависимости фазовых проницаемостей от насыщенностей, но уже наряду с учетом капиллярного скачка $p_к$, который задается так же, как и фазовые проницаемости, в виде известной эмпирической функции насыщенностей. Эта теория для одномерного движения кратко излагается ниже.

Рассмотрим двухфазную фильтрацию с учетом капиллярного давления, причем массовыми силами будем для простоты пренебрегать. Напомним систему исходных уравнений.

Уравнения движения двухфазной жидкости имеют вид:

$$Q_1 = -\frac{kk_1^*(\sigma)}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial x}S(x), \qquad \text{(IX.6.1)}$$

$$Q_2 = -\frac{kk_2^*(\sigma)}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial x}S(x). \qquad \text{(IX.6.2)}$$

Уравнения неразрывности

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = -mS(x)\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial x} = mS(x)\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \qquad \text{(IX.6.3)}$$

Уравнение Лапласа для расчета капиллярного давления

$$p_1 - p_2 = \alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = p_к(\sigma), \qquad \text{(IX.6.4)}$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны капиллярных менисков; α — коэффициент межфазного натяжения; $p_к(\sigma)$ — известная экспериментальная функция насыщенности.

Суммарный расход вследствие несжимаемости не зависит от x:

$$Q(t) = Q_1 + Q_2. \qquad \text{(IX.6.5)}$$

Таким образом, имеем пять неизвестных Q_1, Q_2, p_1, p_2, σ и пять уравнений.

Из уравнений (IX.6.1), (IX.6.2) и (IX.6.5) получим

$$Q(t) = kS(x)\left[-(c_1+c_2)\frac{\partial p_1}{\partial x} + c_2 p_к'(\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right], \quad \text{(IX.6.6)}$$

где

$$c_1 = \frac{k_1^*(\sigma)}{\mu_1}; \quad c_2 = \frac{k_2^*(\sigma)}{\mu_2}.$$

Найдем из уравнения (IX.6.6) $-\frac{\partial p_1}{\partial x}$:

$$-\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{Q(t)}{kS(x)(c_1+c_2)} - \frac{c_2}{c_1+c_2} p_к'(\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad \text{(IX.6.7)}$$

Подставляя $-\frac{\partial p_1}{\partial x}$ из (IX.6.7) в уравнение (IX.6.1), получаем

$$Q_1 = \frac{c_1 Q}{c_1+c_2} - kS(x)\frac{c_1 c_2}{c_1+c_2} p_к'(\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad \text{(IX.6.8)}$$

Из (IX.6.8) определим $\partial Q_1/\partial x$ и подставим его в уравнение неразрывности (IX.6.3). Получаем

$$-\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{c_1}{c_1+c_2}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x}Q(t) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{c_1 c_2}{c_1+c_2}kS(x)p_к'(\sigma)\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right] = mS(x)\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad \text{(IX.6.9)}$$

Уравнение (IX.6.9) представляет собой сложное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с частными производными. Точные решения этого уравнения были получены для некоторых сравнительно простых случаев. В качестве примера укажем на задачу о так называемой стабилизированной зоне вблизи фронта вытеснения [18].

При вытеснении одной жидкости другой, как указывалось выше, скачок насыщенности локализован на некоторой длине δ, которая иногда остается неизменной. В работе [18] показано, что размер δ теоретически равен бесконечности, однако практически длина δ весьма мала и внутри зоны смеси распределение насыщенности хорошо описывается теорией Баклея — Леверетта. Некоторые точные автомодельные решения уравнения (IX.6.9) найдены для капиллярной пропитки В. М. Рыжиком (Лт. VIII.29) и радиального вытеснения Чэнь Чжун-сяном [9].

Имеются также попытки численного решения уравнения (IX.6.9) для некоторых частных случаев при помощи быстродействующих электронных вычислительных машин [45], однако в должной степени эта задача еще не может считаться исследованной и здесь предстоит большая работа.

С. Н. Бузинов [19] рассмотрел частный случай, когда вторая жидкость уже не двигается (остаточная насыщенность), а двигается только первая вытесняющая жидкость.

По условию $Q_2 = 0$, и тогда $Q = Q_1$, причем движение предполагается установившимся. Из уравнения (IX. 6. 2)

$$k_2^*(\sigma)\frac{\partial p_2}{\partial x} = 0.$$

Здесь могут быть два случая:

$$k_2^*(\sigma) = 0$$

или

$$\frac{\partial p_2}{\partial x} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда $\frac{\partial p_2}{\partial x} = 0$ или согласно (IX. 6. 4)

$$\frac{dp_2}{dx} = \frac{dp_1}{dx} - p_к'(\sigma)\frac{d\sigma}{dx} = 0,$$

откуда

$$\frac{dp_1}{dx} = p_к'(\sigma)\frac{d\sigma}{dx}. \qquad \text{(IX. 6. 10)}$$

Подставим $\frac{dp_1}{dx}$ из (IX. 6. 10) в (IX. 6. 1). Получим

$$Q_1 = Q = -\frac{kk_1^*(\sigma)}{\mu_1} p_к'(\sigma)\frac{d\sigma}{dx} S(x). \qquad \text{(IX. 6. 11)}$$

Разделяя переменные и интегрируя (IX. 6. 11), будем иметь

$$Q\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{S(x)} = \frac{k}{\mu_1}\int_{\sigma}^{\sigma_0} k_1^*(\sigma)\, p_к'(\sigma)\, d\sigma, \qquad \text{(IX. 6. 12)}$$

где σ_0 — насыщенность в сечении x_0.

Эту константу σ_0 нужно найти как-то из других соображений, например из условия минимума поверхностной энергии, учитывая распределение размеров пор по радиусам. С. Н. Бузинов показал, что при широких пределах изменения σ_0 полученное распределение остаточной насыщенности изменяется незначительно [12].

§ 7. Фильтрация трехфазной смеси

Фильтрация смеси трех жидкостей исследована экспериментально и теоретически в гораздо меньшей степени, нежели предыдущие задачи движения двухфазной жидкости. Фильтрация трехфазной смеси имеет большое практическое значение, так как в нефтяных пластах в ряде случаев имеется совместное дви-

жение нефти, свободного газа и воды. Теория движения трехфазной смеси может быть построена как естественное обобщение теории Баклея — Леверетта.

Для простоты ограничимся случаем одномерного движения смеси взаимно нерастворимых и химически не реагирующих несжимаемых жидкостей в трубке тока переменного сечения $S(x)$, причем капиллярностью и массовыми силами будем пренебрегать. Расходы каждой фазы могут быть записаны, как и для двухфазной жидкости, в виде

$$Q_i = -\frac{kk_i^*(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\mu_i}\frac{\partial p}{\partial x}S(x), \quad i=1, 2, 3, \qquad \text{(IX. 7. 1)}$$

где $k_i^* = k_i^*(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — относительные фазовые проницаемости, которые предполагаются известными функциями, обычно экспериментальными, насыщенностей σ_1, σ_2, σ_3 порового пространства каждой фазой; σ_i — абсолютные вязкости жидкостей, причем

$$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=1. \qquad \text{(IX. 7. 2)}$$

Проницаемости $k_i^*(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ обычно изображаются графически на треугольных диаграммах, аналогичных применяемым в металловедении для характеристики сплавов.

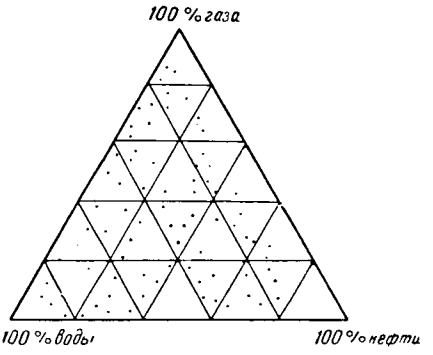


Рис. IX. 25. Треугольная диаграмма распределения насыщенности для трехкомпонентной смеси.

Принцип построения этих диаграмм следующий (рис. IX. 25). Параллельно каждой стороне равностороннего треугольника проводятся равноотстоящие прямые, которые отвечают заданному процентному содержанию соответствующей фазы, возрастающей от нуля на сторонах треугольника до 100% на противолежащих вершинах. Таким образом, каждая точка внутри треугольника, определяемая по пересечению двух прямых, параллельных каким-либо двум сторонам, отвечает вполне определенным насыщенностям σ_1, σ_2 и, следовательно, $\sigma_3 = 1 - (\sigma_1 + \sigma_2)$. На треугольниках наносятся линии одинаковых относительных проницаемостей для каждой из фаз.

На рис. IX. 26 показаны типовые диаграммы относительных фазовых проницаемостей для нефти $k_н$ (рис. IX. 26, *а*) и газа $k_г$ (рис. IX. 26, *б*) при движении смеси вода — нефть — газ, заимствованные из книги Маскета [Лт. VIII. 6], в которой содержится подробное обсуждение причин, определяющих характер и вид зависимостей $k_н^*$ $(\sigma_н, \sigma_в, \sigma_г)$ и $k_г^*$ $(\sigma_н, \sigma_в, \sigma_г)$, где $\sigma_н$, $\sigma_в$, $\sigma_г$ — насыщенности нефтью, водой и газом соответственно. Основной причиной является различная степень смачивания твердых зерен породы, причем оказывается, что проницаемость наиболее смачивающей фазы — воды — определяется практически только водонасыщенностью $\sigma_в$ и почти не зависит от нефте- и газонасыщенности $\sigma_н$ и $\sigma_г$.

Относительные фазовые проницаемости $k_н^*$, $k_в^*$ и $k_г^*$ приближенно могут быть выражены формулами

$$k_н^* = \left[\frac{0{,}85-(\sigma_г+\sigma_в)}{0{,}85}\right]^{2{,}8}[1+(2{,}4+16{,}5\,\sigma_г)\sigma_в],\ 0 \leqslant (\sigma_г+\sigma_в) \leqslant 0{,}85,$$

$$k_н^* = 0,\ 0{,}85 \leqslant (\sigma_г+\sigma_в) \leqslant 1,$$

$$k_в^* = \left(\frac{\sigma_в - 0{,}2}{0{,}8}\right), \quad 1 \geqslant \sigma_в \geqslant 0{,}2, \quad k_в^* = 0, \quad 0{,}2 \geqslant \sigma_в \geqslant 0, \tag{IX.7.3}$$

$$k_г^* = \left(\frac{\sigma_г - 0{,}1}{0{,}9}\right)^{3{,}5} [1 + 3(1 - \sigma_г)], \quad 0{,}1 \leqslant \sigma_г \leqslant 1,$$

$$k_г^* = 0, \quad 0 \leqslant \sigma_г \leqslant 0{,}1,$$

полученными Чэнь Чжун-сяном в результате обработки опытных данных, приведенных в статье [20].

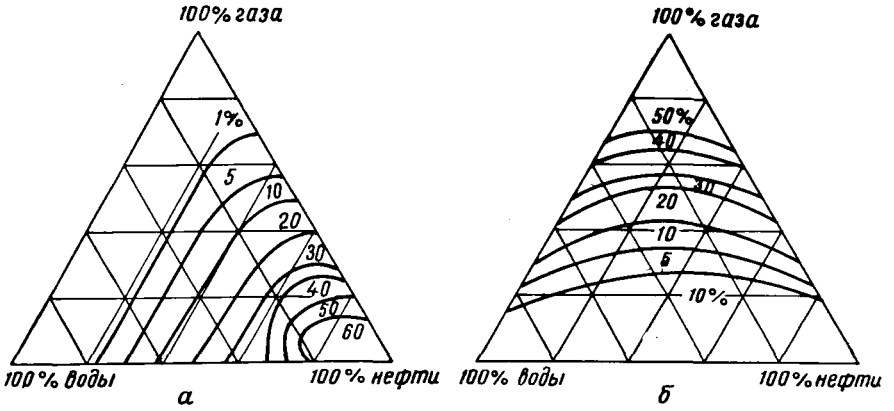


Рис. IX. 26. Фазовые проницаемости для смеси вода — нефть — газ.

К уравнениям движения добавляются уравнения неразрывности для каждой фазы, получаемые обычным путем из рассмотрения баланса объемных расходов:

$$-\frac{\partial Q_i}{\partial x} = mS(x)\frac{\partial \sigma_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{IX.7.4}$$

где m — пористость; $Q_i = Q_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

В системе (IX.7.4) независимых уравнений только два, так как $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1$. Из них следует также, что суммарный объемный расход зависит только от времени:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q(t). \tag{IX.7.5}$$

Система уравнений для трехфазной жидкости строится так же, как и для двухфазной. Складывая расходы в уравнениях движения (IX.7.1), получаем

$$Q = -kS(x)(c_1 + c_2 + c_3)\frac{\partial p}{\partial x}, \quad c_i = \frac{k_i^*(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\mu_i}, \tag{IX.7.6}$$

откуда

$$-kS(x)\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{Q}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

Подставляя в (IX.7.1), будем иметь

$$Q_1 = \frac{c_1 Q}{c_1+c_2+c_3} = Qq_1(\sigma_1, \sigma_2), \quad q_1(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{c_1}{c_1+c_2+c_3},$$
$$Q_2 = \frac{c_2 Q}{c_1+c_2+c_3} = Qq_2(\sigma_1, \sigma_2), \quad q_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{c_2}{c_1+c_2+c_3}. \tag{IX.7.7}$$

Подставляя эти значения расходов в первые два уравнения неразрывности (IX.7.4), получаем для искомых насыщенностей, за которые выбираем $\sigma_1(x, t)$, $\sigma_2(x, t)$, систему уравнений

$$-Q\frac{\partial q_i(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial x} = mS(x)\frac{\partial \sigma_i}{\partial t}, \quad i=1, 2 \tag{IX.7.8}$$

или, раскрывая левые части, окончательную основную систему уравнений

$$-Q\left[\frac{\partial q_i(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial \sigma_1}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial q_i(\sigma_1, \sigma_2)}{\partial \sigma_2}\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\right] = mS(x)\frac{\partial \sigma_i}{\partial t}, \quad i=1, 2. \tag{IX.7.9}$$

Уравнения (IX.7.9) образуют квазилинейную систему уравнений первого порядка в частных производных обычно гиперболического типа. Такие системы встречаются во многих задачах газовой динамики [10, 11, 21] и могут быть исследованы теми же методами.

Введем в рассмотрение уравнения характеристик.

Имеем

$$d\sigma_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x}dx + \frac{\partial \sigma_i}{\partial t}dt, \quad i=1, 2. \tag{IX.7.10}$$

Уравнения (IX.7.9) и (IX.7.10) образуют систему четырех линейных уравнений для частных производных $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \sigma_2}{\partial t}$. Решение этой системы проще всего произвести, исключая сначала частные производные по времени $\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}$, $\frac{\partial \sigma_2}{\partial t}$, при помощи уравнения (IX.7.10). Из (IX.7.10), (IX.7.9)

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} = \frac{d\sigma_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial x}\frac{dx}{dt},$$

$$-Q\left[\frac{\partial q_i}{\partial \sigma_1}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial \sigma_2}\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}\right] = mS(x)\left[\frac{d\sigma_i}{dt} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right], \quad i=1, 2 \tag{IX.7.11}$$

или в раскрытом виде

$$\left[-Q\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_1} + mS(x)\frac{dx}{dt}\right]\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - Q\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = mS(x)\frac{d\sigma_1}{dt},$$
$$-Q\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_1}\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \left[-Q\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2} + mS(x)\frac{dx}{dt}\right]\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = mS(x)\frac{d\sigma_2}{dt}. \tag{IX.7.12}$$

Решения системы (IX.7.12) для $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}$ будут

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{IX.7.13}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} mS(x)\dfrac{d\sigma_1}{dt} & -Q\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_2} \\ mS(x)\dfrac{d\sigma_2}{dt} & -Q\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}+mS(x)\dfrac{dx}{dt} \end{vmatrix} \tag{IX.7.14}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -Q\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}+mS(x)\dfrac{dx}{dt} & mS(x)\dfrac{d\sigma_1}{dt} \\ -Q\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_1} & mS(x)\dfrac{d\sigma_2}{dt} \end{vmatrix} \tag{IX.7.15}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -Q\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}+mS(x)\dfrac{dx}{dt} & -Q\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_2} \\ -Q\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_1} & -Q\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}+mS(x)\dfrac{dx}{dt} \end{vmatrix} \tag{IX.7.16}$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{mS(x)\left\{\left[mS(x)-\dfrac{dx}{dt}Q\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right]\dfrac{d\sigma_1}{dt}+Q\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\dfrac{d\sigma_2}{dt}\right\}}{[mS(x)]^2\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2-mS(x)Q\left(\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}+\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right)\dfrac{dx}{dt}-Q^2\left(\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_1}-\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right)}, \tag{IX.7.17}$$

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} = \frac{mS(x)\left\{\left[mS(x)\dfrac{dx}{dt}-Q\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}\right]\dfrac{d\sigma_2}{dt}+Q\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_1}\dfrac{d\sigma_1}{dt}\right\}}{[mS(x)]^2\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2-mS(x)Q\left(\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}+\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right)\dfrac{dx}{dt}-Q^2\left(\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_1}-\dfrac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}\dfrac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right)}.$$

Будем сначала искать сильные разрывы функций σ_1, σ_2, т. е. закон движения скачков насыщенности. Очевидно, в этом случае знаменатель Δ в (IX. 7. 13) должен обратиться в нуль, что дает квадратное уравнение для dx/dt:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{Q}{mS(x)}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}+\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right)\frac{dx}{dt}-\frac{Q^2}{m^2S^2(x)}\left(\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_1}-\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right)=0.$$

Решая его, получаем

$$\frac{dx}{dt}=\frac{Q}{2mS(x)}\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}+\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right)\pm\sqrt{D}\,\right], \tag{IX.7.18}$$

$$D=\left(\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}-\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right)^2+4\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_1}. \tag{IX.7.19}$$

Если ищутся слабые разрывы, т. е. непрерывные значения функций σ_1, σ_2, то одновременно обращается в нуль числитель Δ_1 или Δ_2 в (IX. 7. 13), причем нетрудно показать, что при $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = 0$ тождественно выполняется условие $\Delta_2 = 0$.

Приравнивая $\Delta_1 = 0$, получаем

$$mS(x)\frac{dx}{dt}\frac{d\sigma_1}{dt}=Q\left(\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\frac{d\sigma_1}{dt}-\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{d\sigma_2}{dt}\right)$$

или, сокращая на $\frac{d\sigma_1}{dt}$,

$$mS(x)\frac{dx}{dt} = Q\left(\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}\right). \qquad \text{(IX. 7. 20)}$$

Учитывая (IX. 7. 18), получаем

$$\frac{mS(x)}{Q}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\right) \pm \sqrt{D}\right]$$

или

$$\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2} - \frac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}\right) \mp \sqrt{D}\right]. \qquad \text{(IX. 7. 21)}$$

Последнее уравнение (IX. 7. 21) является обыкновенным дифференциальным уравнением, связывающим насыщенности σ_1 и σ_2. Оно имеет вещественные решения, если $D > 0$, т. е. когда система (IX. 7. 9) принадлежит к гиперболическому типу и имеет два вещественных семейства характеристик в плоскостях σ_1, σ_2 и x, t.

Знак подкоренного выражения в (IX. 7. 18) определяется знаком и величиной произведения $\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_1}$. При обычных видах зависимостей фазовых проницаемостей k_i^* (σ_1, σ_2, σ_3) возрастание какой-либо насыщенности σ_i соответствует возрастанию расхода соответствующей фазы Q_i и уменьшению расхода остальных двух фаз. В этом случае, с учетом (IX. 7. 7) должно быть $\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2} < 0$, $\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_1} < 0$ и $\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_1} > 0$, т. е. исходная система гиперболическая.

Можно, однако, представить себе такие условия, когда в некоторых диапазонах изменения насыщенностей произведение $\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_2}\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_1}$ будет отрицательно и все подкоренное выражение в (IX. 7. 18) или (IX. 7. 21) будет также отрицательно, а в других положительно. В этом случае исходная система (IX. 7. 9) является смешанной: в одной области эллиптического типа, в другой гиперболического, и мы приходим к весьма сложной задаче Трикоми [22], к которой, в частности, сводятся задачи трансзвуковых течений газовой динамики, когда в одних областях течения скорость дозвуковая, в других сверхзвуковая.

Этот вопрос рассматривался Ю. И. Сткляниным [24], который пришел к выводу, что в физически реальных течениях трехфазных жидкостей в пористой среде исходная система (IX. 7. 9) является гиперболической.

Из (IX. 7. 21) следует, что система (IX. 7. 9) является так называемой приводимой, так как сетка характеристик в плоскости σ_1, σ_2, получаемая обычно в результате численного интегрирования (IX. 7. 21), не зависит от условий течения, а определяется исключительно видом функций $q_1(\sigma_1, \sigma_2)$, $q_2(\sigma_1, \sigma_2)$, т. е. согласно (IX. 7. 7) видом фазовых проницаемостей. Эта сетка может быть построена раз навсегда, после чего по уравнению (IX. 7. 18) может быть построена в зависимости от начальных условий задачи сетка характеристик в плоскости x, t. Вместо плоскости x, t удобно ввести плоскость V, t:

$$V(x) = \int_0^x mS(\xi)\,d\xi,$$

где V — объем пор в трубке тока между нулевым сечением и сечением x.

Тогда уравнение (IX. 7. 18) характеристик в плоскости V, t примет вид:

$$\frac{1}{Q}\frac{dV}{dt}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial q_1}{\partial \sigma_1}+\frac{\partial q_2}{\partial \sigma_2}\pm\sqrt{D}\right]. \qquad \text{(IX. 7. 22)}$$

Сетка характеристик в плоскостях V, t и σ_1, σ_2 полностью решают задачу фильтрации трехфазной смеси.

Отметим, что вполне аналогично методом характеристик решаются задачи плоского сверхзвукового обтекания профилей и одномерных неустановившихся движений газа [10, 21].

На сильных разрывах, т. е. на скачках насыщенностей, выполняются условия материального баланса, каждой фазы, получаемые точно так же, как и для двухфазной жидкости:

$$\frac{1}{Q}\left[mS(x)\frac{dx}{dt}\right]_{\Phi}=\frac{q_1(\sigma_{1\Phi},\ \sigma_{2\Phi})-q_1(\sigma_1,\sigma_2)}{\sigma_{1\Phi}-\sigma_1}=$$
$$=\frac{q_2(\sigma_{1\Phi},\ \sigma_{2\Phi})-q_2(\sigma_1,\ \sigma_2)}{\sigma_{2\Phi}-\sigma_2}. \qquad \text{(IX. 7. 23)}$$

Индекс «ф» означает условия на фронте, т. е. на скачке насыщенности, без индекса указаны условия сейчас же перед фронтом.

Дальнейшее исследование фильтрации трехфазной жидкости, а также некоторые численные расчеты приведены в [23], а также в работе Ю. И. Стклянина [24].

Отметим, что аналогичная система уравнений получается в задаче вытеснения нефти горячей водой, рассмотренной Файерсом [44] при некоторых упрощающих предположениях.

В приближенной постановке важный практический случай фильтрации трехфазной смеси — вытеснение газированной нефти водой — был рассмотрен Д. А. Эфросом [25]. Ввиду очень малой вязкости газа растворенный газ, выделяющийся при снижении давления ниже давления насыщения, под действием градиента давления в пласте обгоняет остальные компоненты смеси — воду и нефть. При этом образуются два фронта вытеснения — в газо-нефтяной зоне, куда вода не дошла, и в водо-нефтяной, откуда свободный газ ушел. При этом в первом приближении можно рассматривать весь процесс движения в рамках теории Баклея — Леверетта для двухфазной смеси. Экспериментальное исследование этого вопроса выполнено в работах С. А. Кундина [26, 27], содержащих ряд результатов, существенно важных для практических задач проектирования разработки таких месторождений.

В частности, С. А. Кундин показал, что при вытеснении газированной нефти водой существует некоторый оптимум пластового давления ниже давления насыщения, при котором достигается наибольшая нефтеотдача.

В заключение приведем наиболее общие дифференциальные уравнения фильтрации трехфазной смеси нефть — газ — вода Маскета [Лт. VIII. 6] с учетом сжимаемости всех трех фаз и растворимости газа в нефти и воде, выписанные для стационарных условий на поверхности земли. Эти уравнения, получающиеся в результате подстановки в уравнения неразрывности для каждой фазы объемных скоростей, выражаемых согласно закону Дарси, имеют следующий вид в векторной форме при оси z, направленной вниз (∇ — обозначение оператора «набла»: $\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные векторы направлений осей x, y, z):

$$\nabla\left[\frac{s_{\text{н}}k_{\text{н}}}{\beta_{\text{н}}\mu_{\text{н}}}\nabla(p-\varrho_{\text{н}}gz)+\frac{s_{\text{в}}k_{\text{в}}}{\beta_{\text{в}}\mu_{\text{в}}}\nabla(p-\varrho_{\text{в}}gz)+\frac{s_{\text{г}}k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}}\nabla(p-\varrho_{\text{г}}gz)\right]=$$
$$=m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{s_{\text{н}}\sigma_{\text{н}}}{\beta_{\text{н}}}+\frac{s_{\text{в}}\sigma_{\text{в}}}{\beta_{\text{в}}}+\varrho_{\text{г}}\sigma_{\text{г}}\right),$$

$$\nabla\left[\frac{k_н}{\beta_н\mu_н}\nabla(p-\varrho_н gz)\right]=m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma_н}{\beta_н}\right),$$

$$\nabla\left[\frac{k_в}{\beta_в\mu_в}\nabla(p-\varrho_в gz)\right]=m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma_в}{\beta_в}\right),\quad \sigma_н+\sigma_в+\sigma_г=1, \qquad (IX.7.24)$$

где $s_в$, $s_в$ — массовые коэффициенты растворимости газа в единице объема нефти и воды; $\beta_н$, $\beta_в$ — коэффициенты изменения объема нефти и воды при подъеме нефти и воды на поверхность и снижения давления до атмосферного; $\varrho_н$, $\varrho_в$, $\varrho_г$ — плотности нефти, воды и газа.

Все указанные выше величины предполагаются известными экспериментальными функциями давления, а фазовые проницаемости для нефти, воды и газа $k_н$, $k_в$, $k_г$, как и выше, экспериментальными функциями насыщенностей порового пространства $\sigma_н$, $\sigma_в$, $\sigma_г$. Капиллярными скачками давления для простоты пренебрежено. Для четырех неизвестных функций p, $\sigma_н$, $\sigma_в$, $\sigma_г$ получается, таким образом, замкнутая система четырех уравнений.

Рассмотренный выше случай движения несжимаемой трехфазной смеси получается из этой системы, если положить $s_н = s_в = 0$, $\beta_н = \beta_в = 1$, $\varrho_н = \varrho_в = \varrho_г = \text{const}$. Частными случаями этой системы являются уравнения движения газированной нефти — двухфазной системы, которые получаются если положить $\sigma_в = 0$. Можно вполне согласиться с Маскетом, который указывает, что аналитическое решение системы (IX. 7. 24) в общем случае пока бесперспективно ввиду ее крайней сложности.

Без особых принципиальных затруднений может быть рассмотрен случай установившегося движения [Лт. VIII. 6], который для двухфазной системы впервые был исследован С. А. Христиановичем [28]. Теория С. А. Христиановича применяется при практических расчетах установившегося движения газированной жидкости и кратко изложена в § 8.

Практические расчеты неустановившегося движения газированной двухфазной жидкости обычно выполняются методом последовательной смены стационарных состояний, впервые примененным для этой задачи К. А. Царевичем [29] и развитым далее в ряде работ М. Д. Розенберга, М. М. Глоговского, В. А. Архангельского и других [30, 31].

Имеются также попытки применения быстродействующих вычислительных устройств [32].

В целом же разработка этой, пожалуй, наиболее сложной области гидродинамической теории фильтрации — фильтрации многофазных жидкостей — весьма далека от своего завершения и здесь предстоит еще очень большая работа.

§ 8. Установившееся движение газированной жидкости в пористой среде. Замечания о практических методах расчета неустановившегося движения

Выше был рассмотрен ряд задач фильтрации смесей нескольких жидкостей, компоненты которых предполагались несжимаемыми, взаимно нерастворимыми и химически не реагирующими. В реальных условиях эти предпосылки выполняются не всегда. Движение газированной нефти является примером важной практической задачи, где необходимо учитывать эффекты сжимаемости и растворимости газа в жидкости.

Как уже указывалось, теоретическое исследование задач фильтрации сжимаемых смесей с растворимыми компонентами в общем случае неустановившегося движения в точной постановке натал-

кивается на затруднения, до сего времени не преодолимые. Сравнительно просто может быть исследован рассмотренный ниже случай установившегося движения газированной жидкости.

Первые гидродинамические исследования о движении газированной жидкости в пористой среде принадлежат акад. Л. С. Лейбензону.

Л. С. Лейбензон в своих первых исследованиях рассматривал газированную нефть как некоторую смесь, характеризующуюся специальным уравнением состояния. В дальнейших работах [Лт. I. 7] Л. С. Лейбензон уже учитывал различие скоростей газа и нефти, обусловленное эффектом фазовых проницаемостей, и наметил ряд перспективных, но до сего времени недостаточно использованных путей исследования этой весьма сложной задачи.

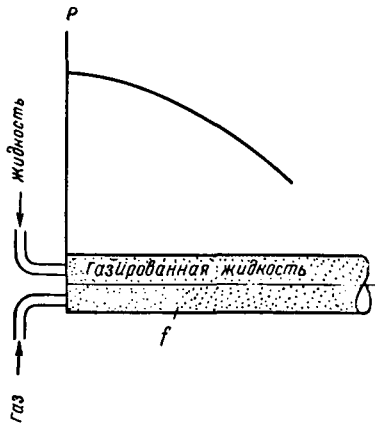


Рис. IX. 27. Схема экспериментальной установки для исследования фильтрации газированной жидкости.

Отметим, что хронологически изложенная ниже теория движения газированной жидкости была разработана значительно раньше теории Баклея — Леверетта. Первые эксперименты по определению фазовых проницаемостей для жидкости и газа были выполнены Викофом и Ботсетом еще в 1936 г. [33].

Рассмотрим стационарное движение газированной жидкости в пористой среде.

Когда давление в пласте выше давления насыщения, весь газ растворен в жидкости (свободный газ отсутствует) и жидкость вместе с растворенным газом можно рассматривать, как однородную.

Давление насыщения является физической константой нефти того или иного района. Оно обычно лежит в пределах 90—150 *ат*.

Если же давление в пласте меньше давления насыщения, то начинается выделение газа из раствора и в пористой среде движутся одновременно жидкость и свободный газ.

Рассмотрим стационарное прямолинейное движение такой газированной жидкости в пористой среде, заполняющей трубу поперечным сечением f (рис. IX. 27). Объемные расходы жидкости и газа можно определить по формуле Дарси для однородной жидкости, но считать, что проницаемость является фазовой; $k_ж$ — для жидкости, $k_г$ — для свободного газа. Расход жидкости $Q_ж$ определяется по формуле

$$Q_{ж} = -\frac{k_{ж}}{\mu_{ж}} \frac{dp}{dx} f, \qquad \text{(IX. 8. 1)}$$

где $\mu_{ж}$ — вязкость жидкости.

Объемный расход свободного газа в том же сечении при том же давлении p обозначим $Q'_{г}$. Величина $Q'_{г}$ определяется по формуле

$$Q'_{г} = -\frac{k_{г}}{\mu_{г}} \frac{dp}{dx} f, \qquad \text{(IX. 8. 2)}$$

где $\mu_{г}$ — вязкость газа. Вязкости $\mu_{ж}$, $\mu_{г}$ для простоты предполагаются постоянными, не зависящими от давления.

Опыты, которые были поставлены Викофом и Ботсетом [33], дали основание принять фазовые проницаемости для жидкости и газа $k_{ж}$ и $k_{г}$ в виде некоторых экспериментальных функций насыщенности σ порового пространства жидкостью.

Введем относительные проницаемости $k^*_{ж}$ и $k^*_{г}$:

$$k^*_{ж} = \frac{k_{ж}}{k}, \qquad k^*_{г} = \frac{k_{г}}{k}, \qquad \text{(IX. 8. 3)}$$

где k — коэффициент проницаемости пористой среды для однородной жидкости. Кривые зависимости $k^*_{ж}$ и $k^*_{г}$ приведены на рис. IX. 28. Подобные экспериментальные кривые были получены для ряда образцов пористой среды и для ряда газированных жидкостей, в том числе для газированных нефтей. Во всех случаях характер кривых оказался таким, как на рис. IX. 28. Рассматривая эти кривые, можно сделать очень важное практическое заключение, несмотря на то, что они построены по множеству опытных точек с довольно большим разбросом и являются некоторыми средними линиями:

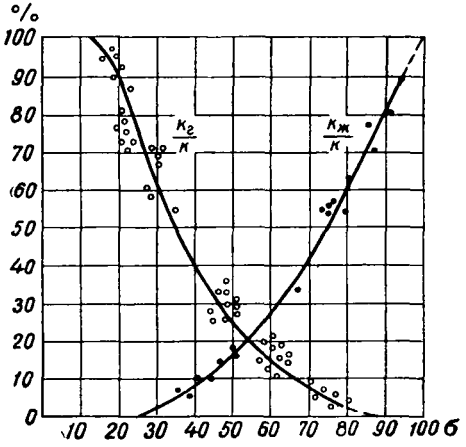


Рис. IX. 28. Относительные фазовые проницаемости для газированной жидкости.

при малом количестве газа (высокая насыщенность жидкостью) проницаемость $k^*_{ж} < 1$, т. е. малое количество свободного газа весьма сильно уменьшает проницаемость $k_{ж}$ и, следовательно, дебит жидкости. Поэтому стараются не допускать чрезмерного выделения газа на забоях скважин, так как при этом фазовая проницаемость $k_{ж}$ жидкости весьма снижается. Чтобы не допустить чрезмерного выде-

ления свободного газа, применяют методы искусственного повышения пластового давления — нагнетание газа, законтурное и внутриконтурное заводнение.

Напротив, жидкость гораздо меньше мешает двигаться газу, чем газ жидкости, так как при малых σ $k_г^* \approx 1$. Таким образом, при малых насыщенностях $k_г^*$ очень мало снижается.

Найдем суммарное количество газа, свободного и растворенного, и приведем это объемное количество газа к атмосферному давлению. Дебит жидкости $Q_ж$ содержит объем растворенного газа, который после приведения к атмосферному давлению $p_{ат}$ можно выразить уравнением

$$(Q_г)_{раствор} = \frac{sp}{\gamma_{ат}} Q_ж, \qquad (IX.8.4)$$

где s — коэффициент растворимости газа в жидкости.

Коэффициент $s\left[\frac{кГ}{м^3 \cdot ат}\right]$ — весовое количество газа, которое растворяется в единице объема жидкости при повышении давления на 1 *ат*. Таким образом, $spQ_ж$ — вес растворенного газа, а $\frac{sp}{\gamma_{ат}} Q_ж$ — приведенный к атмосферному давлению его объем. Здесь и ниже p означает абсолютное давление.

Подставляя в уравнение (IX.8.4) значение $Q_ж$ из (IX.8.1), получаем

$$(Q_г)_{раствор} = -\frac{sp}{\gamma_{ат}} \frac{k_ж}{\mu_ж} \frac{dp}{dx} f. \qquad (IX.8.5)$$

Найдем объемный дебит свободного газа, приведенный к атмосферному давлению. Согласно уравнению (IX.8.2) получим

$$(Q'_г)_{ат} = Q'_г \frac{p}{p_{ат}} = -\frac{p}{p_{ат}} \frac{k_г}{\mu_г} \frac{dp}{dx} f. \qquad (IX.8.6)$$

Теперь можно найти полное объемное количество газа $(Q_г)_{ат}$, которое будет выделяться в единицу времени на устье скважины при снижении давления до атмосферного. Это будет сумма

$$(Q_г)_{ат} = (Q_г)_{раствор} + (Q'_г)_{ат} \qquad (IX.8.7)$$

или, учитывая уравнения (IX.8.5) и (IX.8.6),

$$(Q_г)_{ат} = -\frac{dp}{dx} f \frac{p}{p_{ат}} \left(\frac{sp_{ат}}{\gamma_{ат}} \frac{k_ж}{\mu_ж} + \frac{k_г}{\mu_г} \right). \qquad (IX.8.8)$$

Найдем газовой фактор. Под газовым фактором подразумевается отношение приведенного к атмосферному давлению дебита газа к дебиту жидкости. Согласно уравнениям (IX.8.8) и (IX.8.1) получим

$$Г = \frac{(Q_г)_{ат}}{Q_ж} = \frac{p}{p_{ат}} \left(\frac{sp_{ат}}{\gamma_{ат}} + \frac{k_г}{k_ж} \frac{\mu_ж}{\mu_г} \right). \qquad (IX.8.9)$$

Последнюю формулу можно представить еще в таком виде:

$$\Gamma = \frac{p}{p_{ат}} \frac{\mu_ж}{\mu_г} \left(\frac{k_г}{k_ж} + \frac{p_{ат} s \mu_г}{\gamma_{ат} \mu_ж} \right). \qquad (IX.8.10)$$

Рассмотрим более подробно уравнение (IX. 8. 10). В круглые скобки входит отношение $k_г/k_ж$, которое может быть найдено из экспериментальных кривых рис. IX. 28. Это отношение является известной функцией насыщенности σ, т. е.

$$k_г/k_ж = \psi(\sigma). \qquad (IX.8.11)$$

Функция $\psi(\sigma)$ имеет примерно вид кривой, показанной на рис. IX. 29. Второе слагаемое $p_{ат} s \mu_г/\gamma_{ат}\mu_ж$ зависит от констант жидкости и газа — от растворимости и вязкостей. Обозначим

$$\frac{p_{ат} s \mu_г}{\gamma_{ат}\mu_ж} = \alpha. \qquad (IX.8.12)$$

Очевидно, α безразмерно.

Тогда выражение для газового фактора можно записать так:

$$\frac{\mu_г}{\mu_ж} \Gamma = \frac{p}{p_{ат}} [\psi(\sigma) + \alpha]. \qquad (IX.8.13)$$

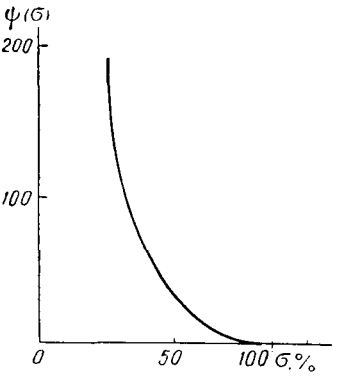


Рис. IX. 29.

Будем рассматривать установившееся движение. При установившемся движении газовый фактор всюду в пласте будет одинаков. Если бы движение было неустановившееся, газовый фактор в разных местах пласта был бы различен. Если же движение стационарно, то газовый фактор вдоль каждой струйки будет постоянной величиной. Все изложенное выше преследовало одну цель — установить связь между давлением и насыщенностью. Эта связь и дается формулой (IX. 8. 13). Обозначим

$$\frac{\mu_г}{\mu_ж} \Gamma = \xi. \qquad (IX.8.14)$$

При $\Gamma = \text{const}$ ξ также постоянно. Тогда из формулы (IX. 8. 13)

$$\frac{p}{p_{ат}} = \frac{\xi}{\psi(\sigma) + \alpha}. \qquad (IX.8.15)$$

Обозначим

$$\frac{p}{\xi\, p_{ат}} = p^* = \frac{1}{\psi(\sigma) + \alpha} = p^*(\sigma), \qquad (IX.8.16)$$

где $p^*(\sigma)$ — известная функция насыщенности.

График зависимости $p^* = p^*(\sigma)$ может быть легко построен по исходным кривым фазовых проницаемостей (см. рис. IX. 28) и формуле (IX. 8. 16). Он имеет примерно вид, показанный на рис. IX. 30.

При расчетах стационарного движения газированной нефти наиболее интересной величиной является $Q_ж$ — расход жидкости. Поскольку газовый фактор известен, согласно формуле (IX. 8. 9) определяем расход газа: $(Q_г)_{ат} = \Gamma Q_ж$. Формулу (IX. 8. 1) для $Q_ж$, учитывая (IX. 8. 3), можно представить в виде

$$Q_ж = -\frac{kk^*_ж(\sigma)}{\mu_ж}\frac{dp}{dx}f. \qquad (IX.8.17)$$

В этом уравнении $k^*_ж$ (σ) — известная функция насыщенности и, кроме того, как мы видели, давление p — также однозначная согласно формуле (IX. 8. 16) функция насыщенности.

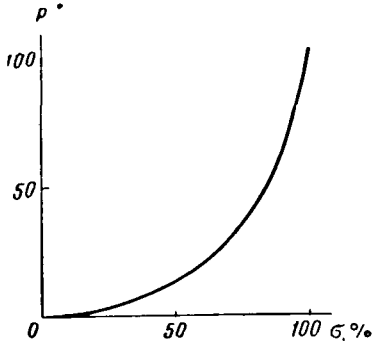


Рис. IX. 30.

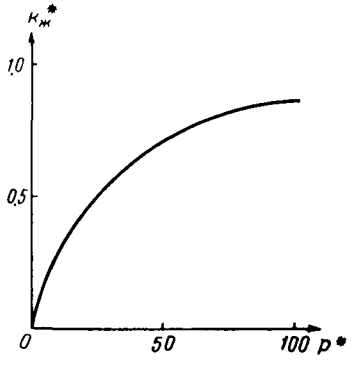


Рис. IX. 31.

Таким образом, насыщенность σ является параметром, связывающим зависимости $k_ж(\sigma)$ и $p = p(\sigma)$. Зная эти зависимости из рис. IX. 28 и формулы (IX. 8. 16), легко построить зависимость $k^*_ж(\sigma) = k^*_ж[\sigma(p^*)] = k^*_ж(p^*)$, т. е. связать фазовую проницаемость $k^*_ж$ с давлением p. График зависимости $k_ж = k^*_ж(p^*)$ представлен на рис. IX. 31.

Теперь, когда установлена однозначная зависимость $k^*_ж = k^*_ж(p^*)$, вводим новую функцию H, полный дифференциал которой равен $k^*_ж dp$. Эта функция имеет размерность давления и называется функцией Христиановича:

$$dH = k^*_ж dp. \qquad (IX.8.18)$$

Теперь уравнение (IX. 8. 17) можно записать более просто:

$$Q_ж = -\frac{k}{\mu_ж}\frac{dH}{dx}f. \qquad (IX.8.19)$$

Уравнение (IX. 8. 19) ничем не отличается от обычного закона Дарси, но только роль давления играет функция H.

Следовательно, для установившегося движения газированной жидкости сохраняются все формулы для движения однородной несжимаемой жидкости с заменой давления на функцию Христиановича.

Функция Христиановича H определяется из уравнения

$$H = \int k_{ж}^{*} dp + \text{const}. \quad \text{(IX.8.20)}$$

Для вычисления функции H можно поступить следующим образом. Согласно уравнениям (IX.8.18) и (IX.8.16)

$$dH = k_{ж}^{*} dp = \xi\, p_{ат} k_{ж}^{*} dp^{*} = \\ = \xi\, p_{ат} dH^{*}, \quad \text{(IX.8.21)}$$

где дифференциал безразмерной функции dH^{*} равен

$$dH^{*} = k_{ж}^{*} dp^{*}, \quad \text{(IX.8.22)}$$

$$H^{*} = \int_{0}^{p^{*}} k_{ж}^{*} dp^{*}. \quad \text{(IX.8.23)}$$

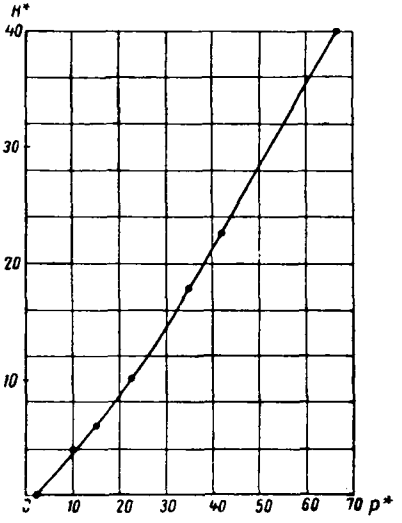


Рис. IX. 32.

Зависимость $H^{*} = H^{*}(p^{*})$ строится по графику рис. IX. 31 графическим интегрированием по уравнению (IX. 8. 23). Она была впервые построена Б. Б. Лапуком и имеет вид, показанный на рис. IX. 32.

К. А. Царевич [29] составил подробные таблицы, позволяющие определить значения функции H^{*} при разных значениях α для сцементированных и несцементированных песков.

Таким образом, получаем возможность использовать при расчетах стационарного движения газированной нефти все формулы для движения однородной несжимаемой жидкости, в которых давление должно быть заменено функцией Христиановича H. Согласно формуле (IX. 8. 21)

$$H = \xi\, p_{ат} H^{*}. \quad \text{(IX.8.24)}$$

Например, дебит жидкости из скважины, находящейся в центре кругового пласта, равен согласно формуле Дюпюи

$$Q_{ж} = \frac{2\pi kh}{\mu_{ж}} \frac{H_{к} - H_{с}}{\ln \dfrac{R_{к}}{r_{с}}}. \quad \text{(IX.8.25)}$$

Функция H здесь будет распределена так же, как давление при фильтрации однородной несжимаемой жидкости: для радиального

движения — по закону логарифмической кривой, для прямолинейного движения — по линейному закону.

Последовательность расчетов такова. Зная контурные давления $p_с$, $p_к$ и газовый фактор $Г$, по формуле (IX. 8. 16) находят $P^*_с$, $p^*_к$ и затем из графика (рис. IX. 32) $H^*_с$, $H^*_к$.

Зная $H^*_с$, $H^*_к$, из уравнения (IX. 8. 24) находят $H_с$, $H_к$, после чего все элементы движения определяются без затруднений. Для ускорения и облегчения расчетов можно также воспользоваться таблицами К. А. Царевича [29].

Эту довольно трудоемкую методику расчетов [Лт. I. 12] можно еще более упростить. Обратим внимание, что в широком диапазоне зависимость $H^*(p^*)$ согласно графику рис. IX. 32 изображается почти прямой линией. С достаточной точностью можно принять

$$H^* = Ap^* + B, \qquad \text{(IX. 8. 26)}$$

где A и B — постоянные.

Параметр A является угловым коэффициентом прямой, B — свободным членом.

Тогда разность $H_к - H_с$, входящую во все выражения для дебитов, можно легко выразить через разность давлений $p_к - p_с$. Согласно уравнениям (IX. 8. 26) и (IX. 8. 21) получим

$$H_к - H_с = \xi\, p_{ат}\,(H^*_к - H^*_с) = A\,\xi\, p_{ат}\,(p^*_к - p^*_с)$$

или, учитывая уравнение (IX. 8. 16),

$$H_к - H_с = A\xi\, p_{ат}\,\frac{p_к - p_с}{\xi\, p_{ат}}\,A = (p_к - p_с). \qquad \text{(IX. 8. 27)}$$

Формула (IX. 8. 27) показывает, что для приближенных расчетов газированную жидкость можно рассматривать как фиктивную однородную несжимаемую жидкость, движущуюся в пласте, в котором параметр kh/μ следует заменить величиной Akh/μ. Из графика рис. IX. 32 $A \approx 0{,}65$.

В дальнейшем этот прием сведения установившегося движения газированной жидкости к движению фиктивной однородной несжимаемой жидкости был использован и развит М. М. Глоговским и М. Д. Розенбергом [30]. Ими было показано, что параметр A в довольно широких пределах удовлетворительно описывается формулой

$$A \approx 0{,}944 - 21{,}43\,\alpha, \qquad \text{(IX. 8. 28)}$$

где α определено уравнением (IX. 8. 12). При этом предполагается условие

$$0{,}2 \leqslant \frac{p_с}{p_к} \leqslant 1.$$

Таким образом, практические расчеты стационарного движения газированной жидкости можно производить, пользуясь этой заменой, что чрезвычайно облегчает их выполнение.

Методика расчета установившегося движения газированной жидкости с учетом зависимости от давления исходных физических величин — вязкости, растворимости и усадки (изменение объема жидкости при снижении давления от пластового до атмосферного) — была развита в ряде последующих работ М. Д. Розенберга, Л. А. Зиновьевой, А. А. Боксермана и других [34, 35].

Остановимся очень коротко на результатах, относящихся к неустановившемуся движению газированной жидкости. Неустановившееся движение газированной жидкости является наименее разработанной задачей. Некоторые авторы решают ее методом материального баланса, связывая среднее пластовое давление с насыщенностью и отбором из всего месторождения в целом [Лт. VIII. 6; 36].

При этом рассмотрении исключается роль скважин. Между тем знание поведения скважины является весьма важным, например связь дебита при нестационарном режиме с забойным давлением и т. д. Ряд существенно важных результатов, основанных на применении метода последовательной смены стационарных состояний, был получен К. А. Царевичем.

К. А. Царевич решил задачу об истощении месторождения, которое эксплуатировалось при режиме растворенного газа. При этом месторождение рассматривалось как замкнутый нефтяной подземный резервуар, где давление первоначально равно давлению насыщения. Резервуар вскрывался скважиной, и начинался отбор жидкости.

К. А. Царевич исследовал вторую фазу нестационарного движения, когда условная воронка депрессии дошла до границ резервуара и начиналось истощение залежи в целом.

Аналогичные расчеты методом конечных разностей выполнил В. А. Архангельский и получил очень сходные результаты. Эти результаты кратко заключаются в следующем.

Будем откладывать по оси ординат среднее пластовое давление, которое можно принять с большой точностью равным контурному давлению. По оси абсцисс будем откладывать насыщенность, также среднюю по пласту (рис. IX. 33).

Как следует из рис. IX. 33, когда давление падает до нуля, насыщенность не снижается ниже 60÷70%. Это означает, что за счет энергии растворенного газа из пласта может быть отобрано только около 30% всего запаса.

К. А. Царевич также рассчитал изменение газового фактора в зависимости от времени при неустановившемся режиме растворенного газа.

Если откладывать по оси абсцисс время, а по оси ординат газовый фактор (рис. IX. 34), то оказывается, что газовый фактор сначала

растет, а потом падает, что между прочим в первых работах Маскета [37] не было отмечено.

Задача о первой фазе нестационарного движения была рассмотрена М. М. Глоговским и М. Д. Розенбергом [38], которые показали, что первая фаза не играет большой роли в жизни месторождения по сравнению со всем периодом эксплуатации.

Задача о вытеснении газированной жидкости водой — одна из важных практических задач — была решена М. М. Глоговским и М. Д. Розенбергом также методом последовательной смены стационарных состояний [38], причем оказалось, что в начальный период,

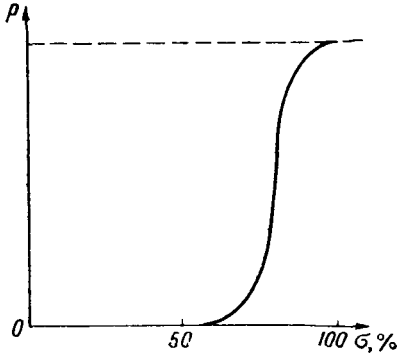


Рис. IX. 33. Нефтеотдача при газовом режиме.

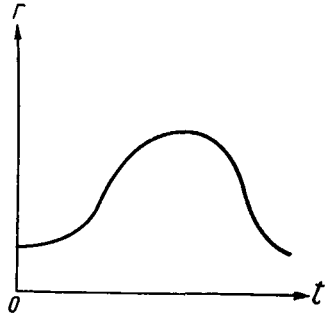


Рис. IX. 34. Изменение газового фактора во времени при газовом режиме.

когда сказывается влияние первой фазы нестационарного режима, расчет нужно вести по сложным, весьма громоздким формулам. В дальнейшем, в период второй фазы, когда вытеснение началось, расчет можно вести, заменяя газированную нефть фиктивной однородной несжимаемой жидкостью, как указывалось выше.

Заканчивая этот раздел подземной гидродинамики — теорию движения газированной жидкости, нужно еще раз сказать, что он находится в стадии разработки и становления. Сравнительно законченной строгой теории, какую мы имеем для однородной жидкости, еще не существует, хотя уже имеются рациональные приближенные методы, позволяющие производить промысловые расчеты. При этом необходимо иметь в виду следующее: физические константы пласта и содержащейся в нем газированной жидкости входят как параметры в расчетные уравнения. К необходимым при всех обстоятельствах лабораторным определениям всегда следует дополнительно определять эти константы из промысловых данных, т. е. из фактических дебитов и пластовых давлений месторождения за некоторый минимально возможный интервал времени. Тогда сравнение дальнейшего действительного режима месторождения с расчетным за последующий

интервал времени будет служить критерием практической применимости того или другого приближенного метода расчета, пока отсутствует более строгая теория. Отметим, что возможность точного интегрирования уравнений неустановившегося движения газированной жидкости для некоторых частных случаев была указана М. Д. Розенбергом [39]. Одно из таких решений с результатами численных расчетов на электронной вычислительной машине приведено в [48].

§ 9. Уравнения движения многокомпонентных смесей с учетом фазовых превращений

При разработке нефтяных месторождений в пористой среде часто возникает движение многокомпонентной смеси углеводородов [49]. Эта смесь может состоять из двух фаз — жидкой и газообразной — или быть однофазной. Кроме углеводородных компонентов, в пористой среде могут присутствовать также неуглеводородные компоненты, растворимые или практически не растворимые в углеводородных смесях (например, вода). Движение многокомпонентной смеси в пористой среде характеризуется переходом отдельных компонентов из одной фазы в другую. Такой характер фильтрационных течений возникает, в частности, при движении газированной нефти, при вытеснении нефти газом высокого давления [40, 45], движении газоконденсатной смеси [41, 47] и т. д.

Проводившиеся ранее исследования движения газированной жидкости основывались на принятии экспериментального закона растворимости газа в нефти. При этом вся фактическая многокомпонентная смесь условно подразделялась на жидкую часть, переход которой в газовое состояние не происходит, и на газ — свободный и растворенный в жидкости. Для фильтрации газированной нефти такой подход оказался возможным и эффективным. Однако для закачки в пласт газа высокого давления и для общего исследования движения многокомпонентных смесей в пористой среде необходимо основываться на более общих термодинамических закономерностях — фазовых соотношениях [42, 45; Лт. I. 9].

При первом рассмотрении изложенной выше проблемы будем полагать, что в каждой точке пористой среды осуществляется равновесное фазовое состояние. Равновесные фазовые соотношения для углеводородных смесей имеются в работах [42, 43].

При заданной в виде параметра температуре для каждого давления и общего компонентного состава смеси эти соотношения позволяют установить содержание каждого компонента в жидкой и газообразной фазах. На рис. IX. 35 изображена фазовая диаграмма [43] для системы метан C_1, нормальный бутан n — C_4 и декан C_{10}. Кривые на этой диаграмме соответствуют различным значениям давления. Они выделяют на диаграмме области двухфазного состояния системы. Точка пересечения ноды [1], проходящей через соответствующую точку, характеризующую общий компонентный состав системы, с частью кривой, расположенной ниже критической точки, соответствует составу жидкой фазы и точка пересечения ноды с верхней частью кривой — составу газовой фазы. Соотношение жидкой и газовой фаз определяется [42] из соответствующих длин частей ноды по правилу рычага.

Реальные нефти и газы состоят из многих компонентов. Поэтому для характеристики фазового состояния вообще нужны более сложные многомерные

[1] Нодой принято называть линию на фазовой диаграмме, соединяющую точки, соответствующие компонентным составам сосуществующих фаз — жидкой и газообразной.

диаграммы. Однако во многих случаях с достаточной для практики точностью компонентный состав можно условно разделять на три-четыре группы.

Рассмотрим фильтрацию n-компонентной смеси углеводородов. Будем считать, что процесс происходит изотермически.

Как указывалось выше, при движении газожидкостной смеси каждая из фаз — жидкая и газообразная — движется со своей фазовой скоростью $w_ж$ и $w_г$. Каждый компонент может содержаться как в жидкой, так и в газовой фазе. Учитывая это, уравнение неразрывности для i-го компонента может быть записано в виде

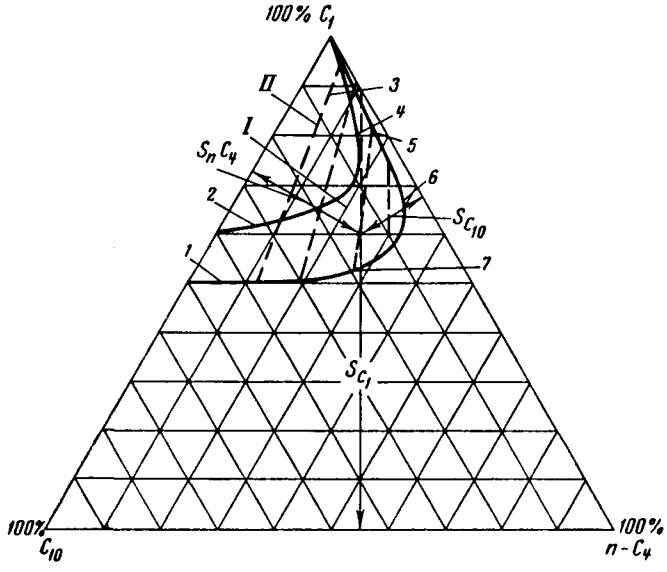


Рис. IX. 35. Фазовая диаграмма.

I — область двухфазного состояния при давлении $p = 175$ *кГ см²*; *II* — область двухфазного состояния при $p = 230$ *кГ/см²*.
1, *2* — кривые, ограничивающие области двухфазного состояния при $p = 175$ *кГ/см²* и $p = 230$ *кГ/см²*; *3* — ноды; *4* — критическая точка при $p = 175$ *кГ/см²*; *5* — точка, определяющая g_i; *6* — критическая точка при $p = 230$ *кГ/см²*; *7* — точка, определяющая l_i.

$$\operatorname{div}(\vec{w}_г \gamma_г g_i) + \operatorname{div}(\vec{w}_ж \gamma_ж l_i) = -m \frac{\partial}{\partial t}[\gamma_г (1-\sigma) g_i + \gamma_ж \sigma l_i], \qquad (IX.9.1)$$

где $\gamma_г$, $\gamma_ж$ — соответственно вес газа и вес жидкости в единице объема; g_i, l_i — соответственно доли i-го компонента в общем весе газовой и жидкой фаз; σ — насыщенность порового пространства жидкой фазой; m — пористость; t — время.

Для $\gamma_г$ и $\gamma_ж$ имеем

$$\gamma_г = \gamma_г(g_1, g_2 \ldots g_n, p), \quad \gamma_ж = \gamma_ж(l_1, l_2 \ldots l_n, p). \qquad (IX.9.2)$$

Не нарушая общности, будем считать, что каждая из фаз движется в пористой среде по закону Дарси

$$\vec{w}_г = -\frac{kk^*_г}{\mu_г} \operatorname{grad} p, \qquad \vec{w}_ж = -\frac{kk^*_ж}{\mu_ж} \operatorname{grad} p, \qquad (IX.9.3)$$

где $k^*_г$ и $k^*_ж$ — относительная фазовая проницаемость соответственно для газа и жидкости; $\mu_г$ и $\mu_ж$ — вязкость соответственно газа и жидкости; k — абсолютная проницаемость пород пласта.

Имеем также

$$\mu_г = \mu_г(g_1, g_2 \ldots g_n, p); \quad \mu_ж = \mu_ж(l_1, l_2 \ldots l_n, p). \tag{IX.9.4}$$

Будем предполагать, что относительные фазовые проницаемости являются функциями насыщенности и давления, т. е.

$$k^*_г = k^*_г(\sigma, p), \quad k^*_ж = k^*_ж(\sigma, p). \tag{IX.9.5}$$

Тогда для движения всех компонентов получим следующую систему n уравнений:

$$\operatorname{div}\left(\frac{k^*_г \gamma_г g_i}{\mu_г} \operatorname{grad} p\right) + \operatorname{div}\left(\frac{k^*_ж \gamma_ж l_i}{\mu_ж} \operatorname{grad} p\right) =$$

$$= \frac{m}{k}\frac{\partial}{\partial t}[\gamma_г(1-\sigma) g_i + \gamma_ж \sigma l_i], \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{IX.9.6}$$

Содержащиеся в системе (IX.9.6) $2n+2$ неизвестных функций (g_i, l_i, σ и p) связаны между собой дополнительными зависимостями, определяемыми из фазовых соотношений. Прежде всего по самому определению имеем

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = 1 \tag{IX.9.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i = 1. \tag{IX.9.8}$$

Кроме того, получаем из фазовых соотношений

$$l_i = l_i(l_1\, l_2 \ldots l_{n-2}, p). \tag{IX.9.9}$$

$$g_i = g_i \quad (\quad » \quad) \tag{IX.9.10}$$

$$\mu_i = \mu_i \quad (\quad » \quad) \tag{IX.9.11}$$

$$\gamma_i = \gamma_i \quad (\quad » \quad) \tag{IX.9.12}$$

Когда в пористой среде, кроме углеводородных компонентов, движется также вода, к уравнениям (IX.9.6) необходимо присоединить еще одно уравнение. В этом случае система (IX.9.6) примет вид:

$$\operatorname{div}\left(\frac{k^*_г \gamma_г g_i}{\mu_г} \operatorname{grad} p\right) + \operatorname{div}\left(\frac{k^*_ж \gamma_ж l_i}{\mu_ж} \operatorname{grad} p\right) =$$

$$= \frac{m}{k}\frac{\partial}{\partial t}[\gamma_г(1-\sigma_в-\sigma_ж) g_i + \gamma_ж \sigma_ж l_i],$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{k^*_в}{\mu_в \beta_в} \operatorname{grad} p\right) = \frac{m}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma_в}{\beta_в}\right). \tag{IX.9.13}$$

В системе (IX.9.13) относительные фазовые проницаемости $k^*_в$ $k^*_г$ и $k^*_ж$ являются функциями $\sigma_в$, $\sigma_ж$ и ρ, где $\sigma_в$ — насыщенность порового пространства водой; $\mu_в$ — вязкость воды; $\beta_в$ — объемный коэффициент воды; $\sigma_в + \sigma_ж + \sigma_г = 1$ ($\sigma_г$ — насыщенность порового пространства газом). Растворимость углеводородов в воде не учитывается. Системы (IX.9.6) и (IX.9.13) при соответствующих граничных условиях допускают автомодельные решения [39].

В случае установившегося движения система (IX. 9. 6) принимает вид:

$$\operatorname{div}\left(\frac{k_г^* \gamma_г g_i}{\mu_г}\operatorname{grad} p\right)+\operatorname{div}\left(\frac{k_ж^* \gamma_ж l_i}{\mu_ж}\operatorname{grad} p\right)=0.\ i=1,2,\ldots n. \quad \text{(IX. 9. 14)}$$

Введем в рассмотрение долю i-го компонента Γ_i в общем потоке. Имеем

$$\Gamma_i=\frac{w_г \gamma_г g_i+\gamma_ж w_ж l_i}{w_г \gamma_г+w_ж \gamma_ж}=\frac{Fg_i+l_i}{1+F},\ F=\frac{k_г^* \gamma_г \mu_ж}{k_ж^* \gamma_ж \mu_г}. \quad \text{(IX. 9. 15)}$$

Тогда из системы (IX. 9. 14) получаем

$$\Gamma_i=\text{const},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \quad \text{(IX. 9. 16)}$$

Система (IX. 9. 16) позволяет, в частности, используя первые $(n-1)$ уравнений, выразить функции $l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_{n-1}$, σ через p и преобразовать последнее уравнение системы (IX. 9. 14) при помощи функции [28]

$$H=\int\left(\frac{k_г^* \gamma_г g_i}{\mu_г}+\frac{k_ж^* \gamma_ж l_i}{\mu_ж}\right)dp \quad \text{(IX. 9. 17)}$$

к виду

$$\nabla^2 H=0,$$

что сводит решение проблемы установившегося движения многокомпонентной системы к интегрированию уравнения Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
2. Эфрос Д. А. Определение относительных проницаемостей и функций распространения при вытеснении нефти водой. Докл. АН СССР, т. 110, № 5, 1956.
3. Лейбензон Л. С. О возможности самостоятельного движения газа в нефтяном пласте. Собр. соч., т. II. Изд. АН СССР, 1953.
4. Buckley I. and Leverett M. C. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. Trans. AIME, vol. 146, 1942.
5. Эфрос Д. А., Оноприенко В. П. Моделирование линейного вытеснения нефти водой. Труды ВНИИнефтегаза, вып. XII, 1958.
6. Хейн А. Л., Бузинов С. Н., Алтухов П. Я. Методика экспериментального определения коэффициентов фазовых проницаемостей по данным неустановившегося режима вытеснения воды газом. Труды ВНИИгаза, вып. 11 (19), 1961.
7. Geertsma I., Croes G., Schwarz N. Theory of Dimensionally Scaled Models of Petroleum Reservoirs. Trans. AIME, vol. 207, 1956.
8. Odeh A. S. Effect of Viscosity on Relative Permeability, J. Petrol. Technology, No. 12, 1959.
9. Чэнь Чжун-сян. Задачи фильтрации двухфазной жидкости при учете массовых сил. Диссертация, МИНХ и ГП, 1962.
10. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. Пер. с англ. ИЛ, 1950.
11. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошной среды. Гостехтеориздат, 1953.

12. Бузинов С. Н. Диссертация, Моск. ин-т нефтехим. и газов. пром. им. Губкина, 1958.

13. Розенберг М. Д., Боксерман А. А. Об определении добавочных фильтрационных сопротивлений при давлении на контуре выше давления насыщения и забойных давлениях ниже давления насыщения. Труды ВНИИ, вып. XII. Гостоптехиздат, 1958.

14. Евгеньев А. Е. Экспериментальное исследование некоторых вопросов вытеснения нефти из неоднородных пористых сред водами различного состава. Диссертация, МИНХ и ГП, 1962.

15. Пирвердян А. М. Движение двухфазной несжимаемой смеси в пористой среде. Прикл. матем. и механ., № 6, 1952.

16. Пилатовский В. П. Исследования неоднородного фильтрационного потока жидкостей в недеформируемой трубке тока в случае образования двухфазной смеси. Труды ВНИИ, вып. XXI, 1959.

17. Бузинов С. Н., Чарный И. А. О движении скачков насыщенности при фильтрации двухфазной жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1957.

18. Рыжик В. М., Чарный И. А., Чэнь Чжун-сян. О некоторых точных решениях уравнений нестационарной фильтрации двухфазной жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1961.

19. Бузинов С. Н. К вопросу об определении остаточной нефтенасыщенности. Докл. АН СССР, т. 116, № 1, 1957.

20. Corey L. T., Rathjens C. H., Henderson S. H. Three-phase relative permeability. J. of Petrol. Technology, November 1956.

21. Зауэр В. Течения сжимаемой жидкости. Пер. с франц. ИЛ, 1954.

22. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. Пер. с итальян. ИЛ, 1957.

23. Чарный И. А., Стклянин Ю. И. Фильтрация трехфазной смеси. ВНИИ, НТС по добыче нефти № 9, 1960.

24. Стклянин Ю. И. Диссертация, 1962. Моск. Ин-т нефтехим. и газов. пром. им. Губкина.

25. Эфрос Д. А. Расчет нефтеотдачи при вытеснении газированной нефти водой. Труды ВНИИ, вып. XXV, 1959.

26. Кундин С. А. О величине остаточной газонасыщенности при вытеснении газированной нефти водой. НТС по добыче нефти, № 12, 1961.

27. Кундин С. А. К расчетам процесса вытеснения газированной нефти водой при постоянном пластовом давлении. ВНИИ, НТС по добыче нефти, № 13, 1961.

28. Христианович С. А. О движении газированной нефти в пористых средах. Прикл. матем. и механ., т. V, вып. 2, 1941.

29. Царевич К. А. Гидромеханические приемы приближенного расчета дебитов нефти и газа из скважин при сплошной и сгущающейся системах разработки для нефтяных пластов с газовым режимом. Труды ВНИИнефтегаза, вып. VI. Гостоптехиздат, 1954.

30. Глоговский М. М., Розенберг М. Д. Вытеснение газированной нефти водой в случае радиальной фильтрации. Труды МНИ им. Губкина, вып. 5. Гостоптехиздат, 1947.

31. Архангельский В. А. О применении к расчетам фильтрации газированных нефтей метода смены стационарных состояний. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1954.

32. West W. I., Garvi W. W. and Sheldon W. Trans. AIME, 201, 217, 1954.

33. Wyckoff R. D. and Botset H. F. The Flow of Gas Liquid Mixtures through Unconsolidated Sands. Physics, vol. 7, 1936.

34. Зиновьева Л. А. Приближенный метод расчета притока газированной нефти к скважинам с учетом реальных свойств пластовых нефтей. Труды ВНИИ, вып. VI. Гостоптехиздат, 1954.

35. Боксерман А. А. Расчет притока газированной нефти к скважинам в случае заданного забойного давления при режиме растворенного газа. ВНИИ, НТС, № 3. Гостоптехиздат, 1959.

36. Пирсон С. Д. Учение о нефтяном пласте. Пер. с англ. Гостоптехиздат, 1961.

37. Muskat M. and Meres M. W. Flow of Heterogeneous Fluids Through Porous Media. Physics, vol. 7, No. 9, 1936.

38. Глоговский М. М., Розенберг М. Д. Вытеснение газированной нефти краевой водой в круговой залежи с учетом остаточной нефти и изменения фазовой проницаемости для воды в зоне вытеснения. Труды ВНИИнефтегаза, вып. VI. Гостоптехиздат, 1954.

39. Розенберг М. Д. Об одной нелинейной системе дифференциальных уравнений в частных производных, имеющей приложение в теории фильтрации. Докл. АН СССР, нов. сер., т. 39, № 2, 1953.

40. Slobod R. L., Koch H. A. High Pressure Gas Injection mechanism of Recovery Increase, Drill. and Prod. Prac. API, 1953.

41. Магеррамов Н. Х. и Мирзаджанзаде А. Х. О фильтрации газоконденсатных смесей в пористой среде. Прикл. матем. и механ., т. XXIV, вып. 6, 1960.

42. Sage B. H., Lacey W. H. Volumetric and Phase Behavior of Hydrocarbons, London, Stanford Univ. press. California, 1940.

43. Hutchinson C. A., Braun P. H. Phase Relations of Miscible Displacement in Oil Recovery. J. Chemical, Eng. Research and Deuel, March, 1961.

44. Fayers F. I. Some Theoretical results concerning the Displacement of viscons Oil by a hot fluid in a Porous Medium. J. Fluid Mech., 13, No. 1, p. 65—76, 1962.

45. Collins R. E. Flow of Fluids through Porous Materials. Reynold Publishing Corporation, N. Y., 1961.

46. Pfannkuch H. O. Contribution à l'étude des déplacements de fluides miscibles dans un milieu poreux, Revue de l'Institut Francais du Petrole et annales de combustibles liquides, vol. XVIII, No. 2, 1963.

47. Мирзаджанзаде А. Х., Ковалев А. Г., Дурмишьян А. Г., Кочешков А. А. Теория и практика разработки газоконденсатных месторождений. Гостоптехиздат, 1962.

48. Егоров Н. Г. и Розенберг М. Д. Численное решение автомодельной задачи о движении газированной нефти в полубесконечном пласте в точной постановке. НТС по добыче нефти, № 12, Гостоптехиздат, 1963.

49. Желтов Ю. П., Розенберг М. Д. О фильтрации многокомпонентных систем. НТС по добыче нефти, № 18, Гостоптехиздат, 1962.

ГЛАВА X

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ВЫТЕСНЕНИЯ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

§ 1. Влияние фазовых проницаемостей на характер движения при интенсивном темпе вытеснения одной жидкости другой в пористой среде

В § 11 главы VII была рассмотрена задача о вытеснении одной жидкости другой и указаны ее автомодельные решения при расчетной схеме $k_y = \infty$ без учета фазовых проницаемостей. Рассмотрим теперь влияние фазовых проницаемостей.

Фазовые проницаемости обусловливают неполноту вытеснения, и поэтому при вытеснении жидкости *2* жидкостью *1* четкая граница раздела будет между двухфазной смесью и чистой, вытесняемой жидкостью *2* (рис. X. 1).

Строгой теории двухмерного движения двухфазной жидкости в пористой среде еще не имеется. Однако в данном случае можно воспользоваться теорией Баклея — Леверетта (§ 2, гл. IX) для одномерной фильтрации двухфазной смеси.

Для определенности под σ будем подразумевать часть порового объема, занятого вытесняющей жидкостью *1*. Тогда, пренебрегая капиллярностью, что, однако, как указывалось выше, косвенно учитывается самим видом зависимости $k_1^*(\sigma)$ и $k_2^*(\sigma)$, для горизонтальных компонентов скоростей фильтрации каждой жидкости получаем (рис. X. 1.)

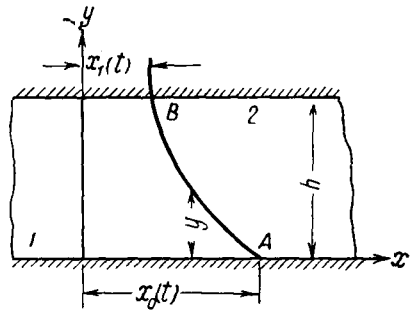


Рис. X. 1.

$$w_1 = -\frac{kk_1^*(\sigma)}{\mu_1}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad w_2 = -\frac{kk_2^*(\sigma)}{\mu_2}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{X.1.1}$$

где k — проницаемость для однородной жидкости, а $k_1^*(\sigma)$, $k_2^*(\sigma)$ — относительные фазовые проницаемости. Рассмотрим теперь две схемы Г. М. Михайлова предельно анизотропного грунта с вертикальными проницаемостями $k_y = 0$ и $k_y = \infty$, между которыми должно существовать истинное движение. В обеих схемах вертикальные скорости частиц жидкости равны нулю: в первой — по смыслу условия $k_y = 0$, а во второй — вследствие постоянства напора вдоль вертикали и закона Дарси.

Таким образом, в обеих схемах движение частиц, в частности граничных точек A и B (рис. X. 1), можно считать происходящим в слоях, параллельных кровле и подошве пласта. Отсюда следует, что суммарный расход жидкостей *1* и *2* в каждом таком элементарном слое ввиду несжимаемости жидкостей и отсутствию вертикальных скоростей будет постоянным.

Рассмотрим движение при таком темпе нагнетания, когда, как показано в § 7, 11 главы VII, для схемы вытеснения при $k_y = \infty$ можно пренебречь архимедовыми силами, обусловленными различием плотностей, и учитывать только различие вязкостей. Если такое пренебрежение гравитационными силами возможно для условий, рассмотренных в § 7, 11 главы VII, то оно тем более допустимо при учете фазовых проницаемостей, дополнительно затрудняющих сепарацию, обусловленную архимедовыми силами.

В этом случае движение граничных точек A и B (рис. X. 1) может быть найдено из следующих соображений, связанных с теорией Баклея — Леверетта. Рассмотрим сначала случай прямолинейного вытеснения. Согласно сказанному выше для обеих схем $k_y = 0$ и $k_y = \infty$ суммарная скорость фильтрации $w = w_1 + w_2$ в каждом слое не зависит от x. Из уравнений (X. 1. 1) имеем

$$w = w_1 + w_2 = -k\frac{\partial p}{\partial x}\left[\frac{k_1^*(\sigma)}{\mu_1} + \frac{k_2^*(\sigma)}{\mu_2}\right]. \qquad (X.1.2)$$

Откуда

$$w_1 = f(\sigma)\, w, \qquad (X.1.3)$$

$$f(\sigma) = \frac{k_1^*(\sigma)/\mu_1}{k_1^*(\sigma)/\mu_1 + k_2^*(\sigma)/\mu_2} = \frac{\mu_0 k_1^*(\sigma)}{\mu_0 k_1^*(\sigma) + k_2^*(\sigma)}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

$$w_2 = \frac{k_2^*(\sigma)\, w}{\mu_0 k_1^*(\sigma) + k_2^*(\sigma)}. \qquad (X.1.4)$$

Согласно теории Баклея—Леверетта (§ 2, гл. IX), при одномерном вытеснении скорость распространения заданной насыщенности σ равна $f'(\sigma)$. При этом образуется перемещающийся со скоростью u скачок насыщенности с фронтовой насыщенностью σ_Φ, перед которым находится чистая вытесняемая жидкость (рис. X. 2), причем

$$f(\sigma_\Phi) = \frac{f'(\sigma_\Phi)}{\sigma_\Phi}, \quad u = \frac{w}{m} f'(\sigma_\Phi). \qquad (X.1.5)$$

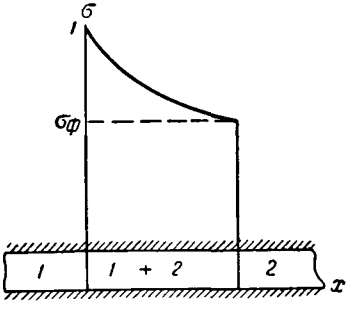


Рис. X. 2.

Величина w/m — действительная скорость движения смеси в отличие от скорости фильтрации.

Таким образом, $f'(\sigma_\Phi)$ — отношение объема пор, пройденного фронтом и в котором находится смесь, к объему закачанной в пласт жидкости *1* за то же время.

Из (X. 1. 5) следует указанный в § 2 главы IX простой графический способ нахождения σ_Φ и $f'(\sigma_\Phi)$, которые являются абсциссой точки касания и угловым коэффициентом касательной, проведенной к кривой $f(\sigma)$ из начала координат (рис. X. 3). Может случиться в зависимости от вида функций $k_1^*(\sigma)$, $k_2^*(\sigma)$ и, следовательно, от вида $f(\sigma)$, что касательную из начала координат, как на рис. X. 3, провести невозможно из-за отсутствия точки перегиба в интервале $0 < \sigma < 1$ кривой $f(\sigma)$. Это будет тогда, когда $f''(\sigma)$ не обращается в нуль в интервале $0 < \sigma < 1$.

В этом случае начальный скачок насыщенности от $\sigma = 1$ до $\sigma = 0$, возникающий при начале вытеснения, будет сохраняться или «размазываться», образуя клин вытесняющей жидкости, в зависимости от выполнения условий $f'(0) \leqslant f'(1)$: при $f'(0) < f'(1)$ скачок будет сохраняться и вытеснение будет происходить «поршневым» образом; при $f'(0) > f'(1)$ скачок будет «размазываться» и жидкость *1* будет вклиниваться в жидкость *2* со скоростью $f'(0)$. Например, при отсутствии взаимного торможения ($k_1^* = \sigma$, $k_2^* = 1 - \sigma$) имеем

$$f(\sigma) = \mu_0\sigma/[(\mu_0 - 1)\sigma + 1], \qquad (X.1.6)$$

$$f'(\sigma) = \mu_0/[(\mu_0 - 1)\sigma + 1]^2, \quad f''(\sigma) = -2\mu_0(\mu_0 - 1)/[(\mu_0 - 1)\sigma + 1]^3. \qquad (X.1.7)$$

Из (X. 1. 6) видно, что при $\mu_0 \neq 1$ и $f''(\sigma) \neq 0$ в интервале $0 < \sigma < 1$ $f'(0) = \mu_0$, $f'(1) = 1/\mu_0$. Таким образом, при $\mu_0 < 1$ скачок от $\sigma = 1$ до $\sigma = 0$ будет сохраняться, а при $\mu_0 > 1$ скорость точки A (см. рис. X. 1) жидкости *1* будет в μ_0 раз больше средней скорости. Это совпадает с результатами, изложенными выше, в § 7, 11, главы VII, если пренебречь действием сил Архимеда.

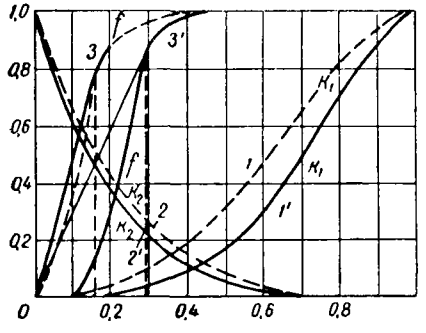


Рис. X. 3.

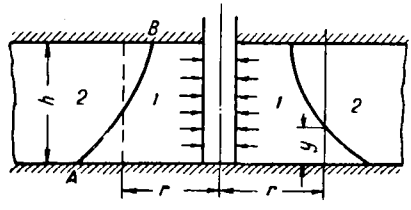


Рис. X. 4.

В общем случае, когда $0 < \sigma_\Phi < 1$, скорость точки A согласно (X. 1. 3) будет определяться формулой

$$u_A = \frac{w}{m} f'(\sigma_\Phi), \qquad (X.1.8)$$

где w — скорость фильтрации смеси в точке A.

Для радиального вытеснения (рис. X. 4), учитывая сказанное для одномерной фильтрации смеси в трубке тока переменного сечения, вместо (X. 1. 8) будет для наиболее быстрой точки A

$$\left(R\frac{dR}{dt}\right)_A = R_0\frac{dR_0}{dt} f'(\sigma_\Phi), \qquad (X.1.9)$$

где R_0 — радиус цилиндрического объема пласта, который заняла бы жидкость *1*, при «поршневом» вытеснении с вертикальной границей раздела.

Перейдем теперь к движению наиболее медленной точки B (см. рис. X. 1). Движение точки B можно отождествить с движением частицы жидкости *2*, рассмотрев ее поведение в бесконечно близком сечении слева от точки B.

Учитывая, что частица жидкости *2* занимает $(1-\sigma)$ часть объема пор, из (X. 1. 4) для скорости движения получим

$$u_B = \frac{w_2}{(1-\sigma)m} = \frac{k_2^*(\sigma)}{(1-\sigma)\,[\mu_0 k_1^*(\sigma) + k_2^*(\sigma)]}\,\frac{w}{m}, \qquad (X.1.10)$$

причем согласно высказанным выше соображениям о характере течения при схемах $k_y = 0$ и $k_y = \infty$ в (X. 1. 10) следует положить $\sigma = \sigma_\Phi$, где σ_Φ определяется из (X. 1. 5).

Резюмируя, можно, таким образом, ввести согласно (X. 1. 8), (X. 1. 9) и (X. 1. 10) коэффициенты β_A и β_B — отношения объемных скоростей наиболее быстрой и наиболее медленной точек границы раздела к средней объемной скорости смеси:

$$\beta_A = f'(\sigma_\Phi), \quad \beta_B = \frac{k_2^*(\sigma_\Phi)}{(1-\sigma_\Phi)[\mu_0 k_1^*(\sigma_\Phi) + k_2^*(\sigma_\Phi)]}. \qquad \text{(X. 1. 11)}$$

Нетрудно видеть, что при $\mu_0 > 1$, $k_1^*(\sigma) = \sigma$, $k_2^*(\sigma) = 1 - \sigma$, $\beta_A = \mu_0$, $\beta_B = \frac{1}{\mu_0}$, что совпадает с результатом А. М. Пирвердяна, полученным другим путем. При реальных видах кривых фазовых проницаемостей значения β_A и β_B существенно отличаются от этих значений μ_0 и $1/\mu_0$. На рис. X. 3 приведены кривые $k_1^*(\sigma)$, $k_2^*(\sigma)$, $f(\sigma)$ для значений $\mu_0 = 100$ (вытеснение воды газом) по аппроксимационным формулам Л. С. Лейбензона для опытов Викофа и Ботсета [Лт. 1. 7].

$$k_1^*(\sigma) = \sigma^3(4 - 3\sigma), \quad k_2^*(\sigma) = (1-\sigma)^3 \qquad \text{(X. 1. 12)}$$

(кривые *1*, *2*, *3*) и по формулам

$$k_1^*(\sigma) = 0, \ 0 < \sigma < 0{,}1; \quad k_1^*(\sigma) = \left(\frac{\sigma - 0{,}1}{0{,}9}\right)^{3{,}5} [1 + 3(1-\sigma)] \ 0{,}1 < \sigma < 1,$$

$$k_2^*(\sigma) = 0, \ 0{,}8 < \sigma < 1; \quad k_2^*(\sigma) = \left(\frac{0{,}8 - \sigma}{0{,}8}\right)^{3{,}5}, \ 0 < \sigma < 0{,}8 \qquad \text{(X. 1. 13)}$$

(кривые *1'*, *2'*, *3'*), где 0,1 — «связанная» газонасыщенность, а 0,2 — «связанная» водонасыщенность. В (X. 1. 12) и (X. 1. 13) под σ подразумевается газонасыщенность.

Из рис. X. 3 видно, что при аппроксимации (X. 1. 12) $\sigma_\Phi \approx 0{,}17$. Для β_A и β_B получается согласно (X. 1. 11) $\beta_A \approx 4{,}7$, $\beta_B \approx 0{,}25$. При аппроксимации (X. 1. 13) $\sigma_\Phi \approx 0{,}28$, $\beta_A \approx 3{,}0$, $\beta_B \approx 0{,}22$. Без учета фазовых проницаемостей было бы $\beta_A = 100$, $\beta_B = 0{,}01$. Экспериментальные определения β_A, выполненные М. В. Филиновым в лаборатории отдела фильтрации Института механики АН СССР на щелевых лотках с крупнозернистым песком, заполненных водой, вытесняемой воздухом, дают значения $\beta_A \approx 5 \div 7$, что по порядку величины хорошо согласуется с приведенным выше расчетом.

Дополнительные экспериментальные и теоретические данные, относящиеся к рассмотренной выше задаче, приведены в работах Д. А. Эфроса, А. К. Курбанова, А. Х. Фаткуллина, В. Н. Донецкого, И. И. Егоровой и В. Г. Оганджанянца [1—7] и других.

§ 2. Влияние неоднородности пористой среды вдоль вертикали на процесс вытеснения

В рассмотренных выше задачах вытеснения реальная проницаемость k пористой среды предполагалась постоянной и расчеты производились для двух крайних схем $k_y = 0$ и $k_y = \infty$, причем горизонтальная проницаемость k_x полагалась равной k.

В реальных пористых средах — водоносных, нефтеносных и газоносных пластах — горизонтальная проницаемость k_x вследствие геологических условий образования этих пластов не остается неизменной вдоль вертикали. Даже пласт, который может считаться однородным, обычно всегда характеризуется некоторой кривой распределения величины k_x вдоль вертикали с заметными отклонениями от среднего значения $k_{x\,ср} = k$ (рис. X. 5). Пласты, таким образом, могут рассматриваться как в той или иной мере слоистые, составленные из слоев различной проницаемости.

Вытеснение одной жидкости другой в многослойном пласте, как будет показано ниже, в ряде случаев может носить другой характер, нежели в однослойном, и существенно зависеть от отношения

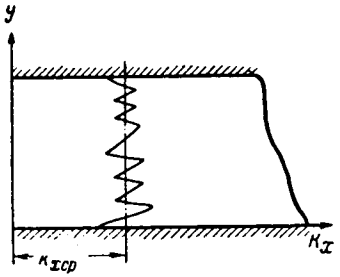


Рис. X. 5. Изменение проницаемости по вертикали вдоль мощности пласта.

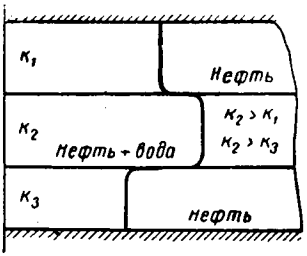


Рис. X. 6.

вязкостей вытесняемой и вытесняющей жидкостей и капиллярных скачков давлений. Так, например, лабораторные и натурные исследования показывают, что при нагнетании газа в заполненный ранее водой многослойный пласт газ прорывается только в наиболее проницаемый слой, частично вытесняя из него воду, причем движение газо-водяной смеси в этом слое примерно следует теории Баклея — Леверетта (§ 2, гл. IX). При вытеснении нефти водой из многослойного пласта картина другая — нефть вытесняется из всех прослоек и образуется более или менее стабилизированный фронт вытеснения с выступом в наиболее проницаемой зоне (рис. X. 6). Экспериментальным и теоретическим исследованиям вопросов вытеснения в многослойных пористых средах посвящены работы В. Г. Оганджанянца, В. М. Рыжика [Лт. VIII. 29] и других.

Ниже устанавливаются критерии, позволяющие судить о характере вытеснения в многослойной пористой среде — будет ли оно происходить только в наиболее проницаемой зоне или по всей мощности пласта.

Рассмотрим сначала случай вытеснения воды газом из многослойного пласта. Вследствие капиллярных сил, о которых было сказано в § 6 главы IX, давление газа $p_г$ в каждом элементарном объеме смеси

будет больше давления воды $p_в$. Разность давлений $\Delta p_к(\sigma) = p_г - p_в$ можно оценить по графикам Леверетта для функции $J(\sigma)$ согласно формуле (IX. 1. 5) и рис. IX. 3. Предполагая $\cos\theta = 1$, из формулы (IX. 1. 5) после пересчета в практическую систему единиц получаем

$$\Delta p_к \approx J(\sigma)\frac{\alpha}{100}\sqrt{\frac{m}{k}}, \qquad (X.2.1)$$

$\Delta p_к$ в *кГ/см²*, k в *дарси*, α в *дин/см*.

По данным [Лт. I. 9], приведенным на рис. IX. 4, $J(\sigma)$ на фронте между вытесняющим газом и водой лежит примерно в пределах 0,11—0,42. Для ориентировочных оценок в (X. 2. 1) можно положить $J(\sigma) \approx 0{,}3$, причем возможны ошибки в 2—2,5 раза в ту и другую сторону. Полагая $\sqrt{m} \approx 0{,}5$, $\alpha \approx 70$ *дин/см* (вода — воздух), из (X. 2. 1) получаем

$$\Delta p_к \approx \frac{0{,}3 \cdot 70 \cdot 0{,}5}{100\sqrt{k}} = \frac{c}{\sqrt{k}}, \quad c \approx 0{,}1. \qquad (X.2.2)$$

Увеличение $\Delta p_к$ с уменьшением проницаемости позволяет объяснить факт вытеснения воды газом только из наиболее проницаемых слоев грунта следующим образом.

Рассмотрим вытеснение воды газом из двухслойного для простоты грунта с проницаемостями k_1, k_2, причем пусть $k_1 > k_2$ (рис. X. 7). Очевидно, при всех обстоятельствах фронт газ — вода в слое с большей проницаемостью k_1 будет двигаться быстрее, чем в менее проницаемом. Будем считать, что давление газа p_1 распределено равномерно по всей площади начального сечения OO (рис. X. 7). Пусть фронт газ — вода в более проницаемом слое прошел некоторое расстояние L, на что потребовался некоторый перепад давления $p_1 - p_2$, p_2 — давление на фронте.

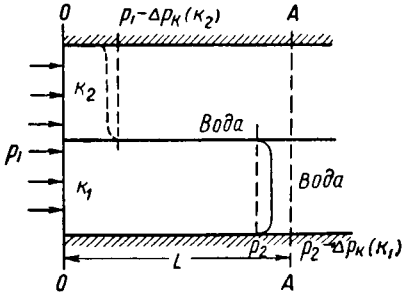


Рис. X. 7.

Выясним, при каких условиях может осуществиться движение воды в менее проницаемом слое, для чего перед фронтом в зоне чистой воды проведем сечение AA, в котором скорости частиц будем считать горизонтальными. В сечении AA в первом пласте давление будет меньше p_2 на величину $\Delta p_к(k_1)$, соответствующую капиллярному скачку в пласте с проницаемостью k_1, т. е. в сечении AA в первом пласте давление равно $p_2 - \Delta p_к(k_1)$. Вследствие того, что сечение AA проведено в зоне чистой воды, в нем установится гидростатическое распределение давления. Для определенности под давле-

нием будем подразумевать приведенное к некоторой плоскости давление, например к подошве пласта.

Мы пришли, таким образом, к выводу, что во всем сечении AA в первом и во втором пластах будет одно и то же давление $p_2 - \Delta p_к(k_1)$.

Для начала движения воды во втором пласте, очевидно, необходимо, чтобы давление перед фронтом BB газ — вода во втором пласте было больше давления в сечении AA. Но в начальный момент давление перед фронтом BB равно $p_1 - \Delta p_к(k_2)$, где $\Delta p_к(k_2)$ — капиллярный скачок, соответствующий меньшей проницаемости k_2.

Таким образом, условием движения воды по всей мощности — в обоих слоях — будет неравенство

$$p_1 - \Delta p_к(k_2) \geqslant p_2 - \Delta p_к(k_1) \qquad (X.2.3)$$

или, обозначая

$$p_2 = p_1 - \Delta p_{тр}, \qquad (X.2.4)$$

где $\Delta p_{тр}$ — потеря давления на трение по длине L в первом пласте, и учитывая (X.2.2), получаем

$$\Delta p_{тр} \geqslant \Delta p_к(k_2) - \Delta p_к(k_1) = c\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}} - \frac{1}{\sqrt{k_1}}\right), \quad c \approx 0{,}1. \qquad (X.2.5)$$

Таким образом, для вытеснения воды по всей мощности потеря давления на трение в зоне, занятой движущимся газом, должна быть больше разности капиллярных давлений, соответствующей проницаемостям слоев.

Очевидно, при обратном извлечении газа не вытесненная из хуже проницаемого пласта вода будет захватываться, т. е. впитываться в хорошо проницаемый пласт, также при снижении давления, соответствующего разности капиллярных давлений слоев. При этом следует иметь в виду, что по данным Леверетта при впитывании воды коэффициент c примерно в 1,25—1,5 раза меньше, чем при дренировании [Лт. I. 3]. Таким образом, для ориентировочных оценок можно пользоваться следующими формулами.

Для вытеснения газа по всей мощности многослойного пласта должно быть

$$\Delta p_{тр} \geqslant c\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}} - \frac{1}{\sqrt{k_1}}\right) \approx 0{,}1\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}} - \frac{1}{\sqrt{k_1}}\right). \qquad (X.2.6)$$

Для обратного извлечения газа без захвата воды

$$p_{пл} - p_{гс} \leqslant \frac{c}{1{,}5}\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}} - \frac{1}{\sqrt{k_1}}\right) \approx 0{,}07\left(\frac{1}{\sqrt{k_2}} - \frac{1}{\sqrt{k_1}}\right), \qquad (X.2.7)$$

где k_1, k_2 — наибольшие и наименьшие проницаемости слоев; $p_{пл}$ — пластовое давление воды к началу выпуска; $p_{гс}$ — давление газа при отборе через скважины [8]

Ввиду малой вязкости газа по сравнению с водой (примерно в 70—100 раз меньше) потеря давления $\Delta p_{тр}$ на длине, занятой газоводяной смесью, сравнительно мала и условие (X. 2. 6) начнет выполняться только тогда, когда в пласт будет закачано достаточно большое количество газа и длина газо-водяной зоны, а вместе с ней и $\Delta p_{тр}$ соответственно возрастет.

При вытеснении же нефти водой, очевидно, остаются в силе все предыдущие рассуждения. Ввиду гораздо большей вязкости вытесняющего агента — воды в данном случае — потеря давления в зоне водо-нефтяной смеси $\Delta p_{тр}$ достигает достаточно большого значения при сравнительно малой длине этой зоны и условие (X. 2. 6) начинает выполняться гораздо раньше, после чего начинается вытеснение из прилегающих слоев с меньшей проницаемостью. Образование стабилизированного фронта вытеснения можно объяснить следующим образом. Предположим сначала, что вытеснение в каждом слое происходит независимо от других и пусть границы раздела имеют вид, показанный пунктиром на рис. X. 7. Очевидно, в слое с наибольшей проницаемостью образуется область повышенного давления и из ушедшего вперед участка смеси в слое с наибольшей проницаемостью вытесняющая жидкость начнет перетекать в соседние слои с меньшей проницаемостью. Эти перетоки вытесняющей жидкости из слоев повышенной проницаемости в соседние слои меньшей проницаемости и обусловливают образование более или менее стабилизированного фронта с выступами сравнительно небольшой длины — порядка нескольких мощностей пласта.

Опыты В. Г. Оганджанянца на моделях многослойных пластов подтверждают высказанные выше соображения.

Следует отметить, что при вытеснении нефти водой коэффициент межфазного натяжения α обычно выражается величиной порядка 30 *дин/см*, т. е. в два с лишним раза меньше, чем для газа и воды. Поэтому коэффициент c в формулах (X. 2. 5) — (X. 2. 7) должен быть снижен не менее чем в 2 раза.

Добавлением поверхностно-активных веществ величину α можно менять в широких пределах, что соответственно отражается на характере вытеснения нефти водой.

§ 3. Расчет движения газового объема в неограниченном водоносном пласте

Две важные практические задачи фильтрации связаны с проблемой нестационарного движения газа в водонасыщенной пористой среде: 1) вытеснение воды газом при создании и эксплуатации подземных газохранилищ в водоносных пластах; 2) замещение газа водой при эксплуатации газовых месторождений, граничащих с активными краевыми или подошвенными водами.

Пусть неограниченный горизонтальный водоносный пласт постоянной мощности h перекрыт непроницаемыми кровлей и подошвой. Предположим, что в пласт через гидродинамически совершенную скважину закачивается газ с за-

данным произвольным весовым расходом $G_г(t)$. Таким образом, известен вес газа в пласте в каждый момент времени t. Требуется найти давление газа $p_г(t)$ и радиус его распространения $R(t)$, пренебрегая для простоты вязкостью газа по сравнению с вязкостью воды и считая в начальный момент $t = 0$ давление в водоносном пласте всюду постоянным $p_к$.

Давление $p(r, t)$ в водоносном пласте удовлетворяет уравнению упругого режима фильтрации (VIII. 1. 8).

$$\varkappa \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \varkappa = \frac{kK}{m\mu}, \tag{X. 3. 1}$$

где $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности в $см^2/сек$; k — проницаемость (средняя по мощности) дарси; K — модуль совместной упругости пластовой воды и пористой среды в $кГ/см^2$; m — пористость пласта; μ — вязкость пластовой воды в сантипуазах.

Задача сводится к интегрированию уравнения теплопроводности (X. 3. 1) при начальном условии $p(r, 0) = p_к = \text{const}$ и выполнении условий материального баланса на подвижной границе раздела $R(t)$ между однофазной областью, занятой водой, и внутренней областью, занятой не одним газом, а газо-водяной смесью, так как полное взаимное вытеснение фаз в действительности не существует. Как было показано в § 2, при нагнетании газа из-за неизбежной неоднородности пласта по вертикали вода вытесняется не по всей мощности h, а только по пропласткам с наибольшей проницаемостью, мощность которых составляет величину $\beta_0 h$, где $\beta_0 < 1$ — коэффициент неполноты вытеснения воды по вертикали (рис. X. 8). В опытах, описанных в статье [8], $\beta_0 \approx 0{,}25$.

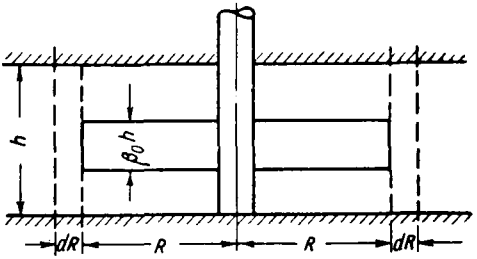


Рис. X. 8.

Кроме того, в пределах этой эффективной мощности $\beta_0 h$ вода вытесняется не полностью, как это известно из теории движения двухфазных жидкостей в пористых средах (§ 2, гл. IX). При обратном извлечении газа вода вытесняет газ значительно полнее, чем газ воду при нагнетании, но полного вытеснения и в этом случае не происходит. Таким образом, строго говоря, условия на подвижной границе $R(t)$ различны для случаев $\frac{dR}{dt} > 0$ — увеличение пластового объема газа и $\frac{dR}{dt} < 0$ — его уменьшение.

Рассмотрим сначала случай $\frac{dR}{dt} > 0$. Пусть радиус границы раздела за время dt увеличится на dR. Пренебрегая эффектом сжимаемости воды в пределах dR, условие, выражающее баланс объема воды в объеме пор $m\,2\pi\,RdRh$, можно сформулировать следующим образом: начальное содержание воды в этом объеме плюс приток воды через внутреннюю боковую поверхность (рис. X. 8) элемента равно конечному содержанию воды плюс отток через наружную боковую поверхность того же элемента, т. е.

$$2\pi\, mhR\, dR + Q'_в\, dt = 2\pi\, mh\,(1-\beta_0)\, R\, dR + \\ + 2\pi\, mh\,\beta_0\,(1-\sigma_{г-в})\, R\, dR + Q_в\, dt, \tag{X. 3. 2}$$

где $Q'_в$ — объемный расход воды через эффективную часть мощности $\beta_0 h$; $Q_в$ — объемный расход воды через всю мощность h, так как через поверхность

$2\pi(R+dR)h$ до прихода фронта газа движется однофазная жидкость (вода без газа); $\sigma_{г-в}$ — газонасыщенность порового объема на фронте газ — вода при вытеснении воды газом.

Из (X. 3. 2)

$$2\pi m\beta_0\sigma_{г-в}hR\frac{dR}{dt}=Q_в-Q'_в. \qquad (X.3.3)$$

Согласно закону Дарси для $Q_в$ и $Q'_в$ имеем

$$Q_в=-\frac{k}{\mu}2\pi Rh\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R(t)},$$

$$Q'_в=-\frac{kk^*_в(\sigma_{г-в})}{\mu}2\pi R\beta_0 h\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R(t)}, \qquad (X.3.4)$$

где $k^*_в(\sigma_{г-в})$ — относительная фазовая проницаемость для воды в зоне смеси $\beta_0 h$, соответствующая фронтовой газонасыщенности $\sigma_{г-в}$. Величина $\sigma_{г-в}$ в первом приближении, если пренебречь сжимаемостью газа, может быть, как показано в § 2 главы IX, найдена известным из теории Баклея — Леверетта графическим способом, $k^*_в(\sigma_{г-в})$ — по графикам фазовых проницаемостей для газированных жидкостей.

Для вытеснения воды газом ориентировочно можно принять $\sigma_{г-в}\approx\approx 0{,}25\div 0{,}35$; $k^*_в(\sigma_{г-в})\approx 0{,}2\div 0{,}3$ [9].

Таким образом, при $\frac{dR}{dt}>0$ согласно (X. 3. 3) и (X. 3. 4) условие на подвижной границе имеет вид:

$$2\pi m\beta_0\sigma_{г-в}hR\frac{dR}{dt}=-\frac{k}{\mu}\left[1-\beta_0k^*_в(\sigma_{г-в})\right]2\pi Rh\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R(t)},$$

$$m\sigma\frac{dR}{dt}=-\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R(t)}, \quad \sigma=\frac{\beta_0\sigma_{г-в}}{1-\beta_0k^*_в(\sigma_{г-в})}, \qquad (X.3.5)$$

где σ — суммарный коэффициент вытеснения, отнесенный ко всей мощности h.

При обратном извлечении газа картина сильно усложняется, если учесть, что вода не полностью вытесняет газ. При вторжении воды в область, ранее занятую газом, фронтовая насыщенность $\sigma_{в-г}$ меняется, причем даже очень небольшое остаточное количество невытесненного газа, как было показано в § 1 главы VIII, резко снижает модуль упругости K. При этом образуются три области: область, занятая подвижным газом, область смеси воды и почти неподвижного газа и область чистой воды. При последующих закачках и извлечении газа насыщенности во всех зонах изменяются и условия на границах зон типа уравнений (X. 3. 5) характеризуются различными коэффициентами σ в зависимости от знака $\frac{dR}{dt}$ и числа циклов нагнетания и извлечения газа.

Нахождение точного решения, учитывающего образование промежуточных газо-водяных зон при повторных циклах нагнетания и извлечения газа, представляется весьма сложной задачей и должно явиться предметом дальнейших исследований. В первом приближении будем считать, что уравнение (X. 3. 5) пригодно как при $\frac{dR}{dt}>0$, так и $\frac{dR}{dt}<0$, но в зависимости от направления движения границы раздела меняется величина суммарного коэффициента вытесне-

ния σ. Таким образом, в качестве условия на подвижной границе $R(t)$ между областями, занятыми водой и газом, примем

$$m\sigma\frac{dR}{dt}=-\frac{k}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=R(t)},\qquad \sigma=\sigma_1=\text{const},\quad \frac{dR}{dt}>0,$$

$$\sigma=\sigma_2=\text{const},\quad \frac{dR}{dt}<0. \tag{X.3.6}$$

Следовательно, мы приходим к задаче интегрирования уравнения теплопроводности с выполнением некоторых условий на подвижной границе $R(t)$ — задача типа Стефана. Точные решения задач такого типа известны для весьма немногих случаев, например, автомодельное решение Н. Н. Веригина задачи о нагнетании с постоянным расходом одной упругой жидкости в пласт, ранее занятый другой упругой жидкостью [10]. Можно отметить дополнительно работу Л. И. Рубинштейна [11], в которой проблема сведена к рассмотрению некоторой системы интегральных уравнений, весьма сложной для вычислений, работу Б. Я. Любова [12] и основанную на ней статью А. Ш. Казымова [13], а также статью И. Г. Портнова [14].

В последних рассмотрены некоторые частные случаи задач типа Стефана. Несмотря на несомненный теоретический интерес, использование предлагаемых методов для общего случая произвольного закона изменения $G_г(t)$ закачиваемого или извлекаемого газа затруднительно.

Ряд американских работ посвящен решению различных задач о поведении газа в водоносном пласте при граничных условиях на некоторых фиксированных окружностях R_1 и R_2, исходя из известных решений Херста, Ван-Эвердингена и Маскета для упругого режима фильтрации в водоносном пласте [Лт. 1. 11; 15]. В этих работах приведен ряд примеров расчетов, выполненных с использованием быстродействующих машин и аналогов устройств [16]. Перемещение границы раздела газ — вода в этих работах учитывается приближенно, при этом решение, справедливое при фиксированных границах, распространяется на случай их движения [16]. Ниже предлагается решение, в котором в отличие от более ранней работы автора [17] непосредственно учитываются условия на подвижной границе раздела между газом и водой.

Как указывалось выше, вес газа в пласте в каждый момент времени считается известным. Приводя этот вес к объему при нормальных условиях $p_н$, $T_н$, за которые обычно принимаются $p_н = p_{ат} = 1$ *кГ/см²*, $T_н = 20°$ С $= 293$ °*K*, получаем

$$\pi m\bar{\sigma}hR^2(t)\frac{p}{p_н}\frac{T_н}{T}=W_н(t), \tag{X.3.7}$$

где $W_н(t)$ — известная функция времени (газ идеальный); $p = p[R(t)]$ — давление газа в пласте; T — температура газа в пласте; $\bar{\sigma}$ — средняя газонасыщенность в объеме $\pi mhR^2(t)$. При вытеснении воды газом $\bar{\sigma}$ и σ мало отличаются друг от друга (§ 2 гл. IX) и в первом приближении можно считать $\bar{\sigma}\approx\sigma$. Задача, таким образом, сводится к интегрированию уравнения (X. 3. 1) в области $r \geqslant R(t)$ при условиях (X. 3. 6) и (X. 3. 7) с одновременным нахождением закона движения $R(t)$.

Здесь следует сделать следующее замечание. По постановке задачи предполагается в каждый момент времени известным вес газа в пласте внутри круга радиусом $R(t)$. Вне этого круга находится чистая вода, для которой считается справедливым уравнение теплопроводности (X. 3. 1).

Таким образом, строго говоря, при обратном извлечении газа, когда $\frac{dR}{dt}<0$, мы должны считать, что газ вытесняется полностью, поскольку задаем его вес внутри расчетного круга $R(t)$. В действительности же, как упоминалось выше, хотя газ вытесняется водой гораздо полнее, чем вода газом, все же некоторое

количество газа порядка 10—15% при обратном движении воды застревает в тупиковых порах и остается невытесненным.

Отсюда следует, что, задавая коэффициент σ_2 в формулах (X. 3. 6) с учетом неполноты вытеснения газа водой и одновременно задавая вес газа внутри расчетного контура газоносности $R\,(t)$, мы по существу учитываем кинематический характер процессов, связанных с неполнотой вытеснения, но вместе с тем включаем невытесненный газ в общий расчетный вес газа $W_{\text{н}}\,(t)$, что, конечно, связано с некоторой погрешностью. Можно предполагать, что при таком методе расчета давление газа определяется достаточно точно.

Будем искать распределение давления в водяном пласте в виде интеграла, выражающего в теории теплопроводности суммарный эффект непрерывно действующего теплового источника в начале координат (§ 3, гл. VIII):

$$p\,(r, t) = p_{\text{к}} + \frac{\mu}{4\pi kh}\int_0^t \frac{Q_0\,(\tau)}{t-\tau}\,e^{-\frac{r^2}{4\varkappa\,(t-\tau)}}\,d\tau. \qquad \text{(X. 3. 8)}$$

Уравнение (X. 3. 8) имеет реальный смысл в области $r \geqslant R\,(t)$, включая $r = R\,(t)$. Интенсивность источника $Q_0\,(\tau)$ пока неизвестна.

Идея предлагаемого метода заключается в использовании решения в форме интеграла (X. 3. 8), формально справедливого во всей области $r > 0$, что позволит избежать осложнений, связанных с нахождением специальных видов решения уравнения теплопроводности (X. 3. 1), удовлетворяющих тем или иным условиям на подвижной границе. Вместо этого постараемся определить интенсивность $Q_0\,(\tau)$ так, чтобы нужные нам условия удовлетворялись.

Из формулы (X. 3. 6) получим

$$m\sigma\,\frac{dR}{dt} = \frac{R}{8\pi h\varkappa}\int_0^t \frac{Q_0\,(\tau)}{(t-\tau)^2}\,e^{-\frac{R^2}{4\varkappa\,(t-\tau)}}\,d\tau. \qquad \text{(X. 3. 9)}$$

Уравнения (X. 3. 8) при $r = R\,(t)$, (X. 3. 9) и (X. 3. 7) образуют замкнутую систему для трех неизвестных функций $Q_0\,(t)$, $p\,[R\,(t)]$ и $R\,(t)$, причем начальный радиус $R\,(0)$ считается известным. Вместо $R\,(t)$ целесообразно ввести объем газа в пласте $V\,(t)$:

$$\pi m\bar{\sigma} hR^2\,(t) = V = V\,(t). \qquad \text{(X. 3. 10)}$$

Из уравнений (X. 3. 8), (X. 3. 9) и (X. 3. 7) получим

$$p\,(t) = p\,[R\,(t)] = p = p_{\text{к}} + \frac{\mu}{4\pi kh}\int_0^t \frac{Q_0\,(\tau)}{t-\tau}\,e^{-\frac{V\,(t)}{4\varkappa\pi m\bar{\sigma} h\,(t-\tau)}}\,d\tau, \qquad \text{(X. 3. 11)}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V}{4\varkappa\pi\, m\sigma h}\int_0^t \frac{Q_0\,(\tau)}{(t-\tau)^2}\,e^{-\frac{V\,(t)}{4\varkappa\pi\, m\bar{\sigma} h\,(t-\tau)}}\,d\tau, \qquad \text{(X. 3. 12)}$$

$$\frac{p\,(t)\,V\,(t)\,T_{\text{н}}}{p_{\text{н}}T} = W_{\text{н}}\,(t). \qquad \text{(X. 3. 13)}$$

Нетрудно видеть, что для реального газа с уравнением состояния $p/\gamma = z\,(p, T)\,RT$ вместо (X. 3. 13) будет

$$\frac{p\,(t)\,V\,(t)\,T_{\text{н}}}{Tp_{\text{н}}}\,\frac{z\,(p_{\text{н}}, T_{\text{н}})}{z\,(p, T)} = W_{\text{н}}\,(t), \qquad \text{(X. 3. 13а)}$$

где $z = z(p, T)$ — коэффициент сжимаемости газа, определяемый обычно по графикам или эмпирическим формулам; R — газовая постоянная.

Система (X. 3. 11), (X. 3. 12), (X. 3. 13) или (X. 3. 13а) эквивалентна системе (X. 3. 8), (X. 3. 9) и (X. 3. 7). Введем произвольный масштаб времени T_0 и безразмерные переменные

$$\frac{t}{T_0} = x, \quad \frac{\tau}{T_0} = \xi, \quad \frac{Q_0(\tau)}{\frac{kh}{\mu} p_к} = q(\xi), \quad \frac{Q_0(t)}{\frac{kh}{\mu} p_к} = q(x), \tag{X. 3. 14}$$

$$\frac{p[R(t)]}{p_к} = \frac{p}{p_к} = \bar{p}(x), \quad \alpha = \alpha(x) = \frac{V(t)}{4\varkappa\pi m \bar{\sigma} h T_0}, \tag{X. 3. 15}$$

причем $\alpha(0)$ предполагается известной.

Уравнения (X. 3. 11). (X. 3. 12), (X. 3. 13) в безразмерных переменных принимают вид:

$$\bar{p} = 1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^x \frac{q(\xi)}{x - \xi} e^{-\frac{\alpha(x)}{x-\xi}} d\xi, \tag{X. 3. 16}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \beta\alpha \int_0^x \frac{q(\xi)}{(x-\xi)^2} e^{-\frac{\alpha(x)}{x-\xi}} d\xi, \quad \beta = \frac{1}{4\pi} \frac{kp_к}{\mu\varkappa m \bar{\sigma}} = \frac{1}{4\pi} \frac{p_к}{K \bar{\sigma}}, \tag{X. 3. 17}$$

$$\bar{p}(x)\,\alpha(x) = f(x), \tag{X. 3. 18}$$

$$f(x) = \frac{T p_н}{T_н p_к} \frac{W_н(t)}{4\varkappa\pi m \bar{\sigma} h T_0} \tag{X. 3. 19}$$

$f(x)$ — известная безразмерная функция безразмерного времени x.

Для реального газа с учетом (X. 3. 13а) вместо (X. 3. 18) получим

$$\frac{z(p_н, T_н)}{z(p_к \bar{p}, T)} \bar{p}\,\alpha = f(x). \tag{X. 3. 18а}$$

Уравнения (X. 3. 16), (X. 3. 17), (X. 3. 18) или (X. 3. 18а) образуют замкнутую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений для трех неизвестных функций $\bar{p} = \bar{p}(x)$, $\alpha = \alpha(x)$, $q = q(x)$. С учетом (X. 3. 6) и (X. 3. 17), коэффициент β будет, вообще говоря, иметь различное значение: $\beta = \beta_1$, $\frac{d\alpha}{dx} > 0$ и $\beta = \beta_2$, $\frac{d\alpha}{dx} < 0$. При любом виде функции $f(x)$, за исключением $f(x) = cx$ аналитическое решение системы (X. 3. 16) — (X. 3. 18) и (X. 3. 16) — (X. 3. 18а) крайне затруднительно. Случай $f(x) = cx$ будет рассмотрен ниже. Поэтому в общем случае произвольной зависимости $f(x)$ задачу приходится решать численными методами.

Один из возможных методов заключается в следующем. Разобьем промежуток интегрирования $0, x$ в (X. 3. 16) и (X. 3. 17) на n интервалов $0, x_1$; $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = x$ и внутри каждого интервала $q(\xi)$ будем считать постоянным: $0 < \xi < x_1$, $q(\xi) = q_1$; $x_1 < \xi < x_2$, $q(\xi) = q_2, \ldots,$ $x_{n-1} < \xi < x$, $q(\xi) = q_n$. Так как исходное решение (X. 3. 8) выражает результат суперпозиции непрерывно действующих тепловых источников, то, очевидно, с увеличением числа интервалов мы будем приближаться к точному результату.

При $q(\xi) = \text{const}$ интегралы (X. 3. 16) и (X. 3. 17) легко берутся, в результате чего получаем

$$\bar{p} = \bar{p}(x) = 1 + \frac{1}{4\pi}\left\{q_1\left[-\mathrm{Ei}\left(\frac{-\alpha(x)}{x}\right) + \mathrm{Ei}\left(\frac{-\alpha(x)}{x-x_1}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + q_2\left[-\mathrm{Ei}\left(\frac{-\alpha(x)}{x-x_1}\right) + \mathrm{Ei}\left(-\frac{\alpha(x)}{x-x_2}\right)\right] + \ldots + q_n\left[-\mathrm{Ei}\left(\frac{-\alpha(x)}{x-x_{n-1}}\right)\right]\right\};$$

$$-\mathrm{Ei}(-\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-u}\,du}{u}, \qquad \text{(X. 3. 20)}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \beta\left\{q_1\left[e^{-\frac{\alpha(x)}{x}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{x-x_1}}\right] + q_2\left[e^{-\frac{\alpha(x)}{x-x_1}} - e^{-\frac{\alpha(x)}{x-x_2}}\right] + \ldots + \right.$$

$$\left. + q_n e^{-\frac{\alpha(x)}{x-x_{n-1}}}\right\}. \qquad \text{(X. 3. 21)}$$

Вычисления производятся в следующей последовательности. Для первого интервала в (X. 3. 20) и (X. 3. 21) остаются только члены с q_1. При достаточно малой длине интервалов левая часть уравнения (X. 3. 21) может быть заменена конечно-разностным отношением $(\alpha - \alpha_{n-1})/x - x_{n-1}$. Для первого интервала в точке $x = x_1$ (X. 3. 21) можно представить в виде

$$\frac{\alpha(x_1) - \alpha(0)}{x_1} = \beta q_1 e^{-\frac{\alpha(x_1)}{x_1}}. \qquad \text{(X. 3. 22)}$$

Уравнение (X. 3. 20) для $x = x_1$ примет вид:

$$\bar{p}(x_1) = \bar{p}_1 = 1 + \frac{1}{4\pi} q_1\left[-\mathrm{Ei}\left(\frac{-\alpha_1}{x_1}\right)\right]. \qquad \text{(X. 3. 23)}$$

Уравнение (X. 3. 18) или (X. 3. 18а) дает третье уравнение

$$\bar{p}_1 \alpha_1 = f(x_1) \qquad \text{(X. 3. 24)}$$

или

$$\frac{z(p_н, T_н)}{z(p_к \bar{p}_1, T)} \bar{p}_1 \alpha_1 = f(x_1). \qquad \text{(X. 3. 24а)}$$

Таким образом, для трех неизвестных q_1, α_1, $\bar{p}_1$ имеем три трансцендентных уравнения (X. 3. 22), (X. 3. 23) и (X. 3. 24) или (X. 3. 24а), из которых все неизвестные легко определяются. Исключая из (X. 3. 22) и (X. 3. 23) q_1 и обозначая $\alpha(0) = \alpha_0$, получаем

$$q_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{x_1 \beta} e^{\frac{\alpha_1}{x_1}} = \frac{4\pi(\bar{p}_1 - 1)}{-\mathrm{Ei}\left(-\frac{\alpha_1}{x_1}\right)}. \qquad \text{(X. 3. 25)}$$

Из (X. 3. 24а)

$$\alpha_1 = f(x_1)\, z(p_к \bar{p}_1, T)/\bar{p}_1 z(p_н, T_н). \qquad \text{(X. 3. 26)}$$

Подставляя α_1 из (X. 3. 26) в (X. 3. 25), получаем трансцендентное уравнение для $\bar{p}_1$:

$$\frac{\dfrac{f(x_1)\,z(p_{\text{к}}\bar{p}_1,\ T)}{\bar{p}_1 z(p_{\text{н}},\ T_{\text{н}})}-\alpha_0}{\dfrac{x_1\beta}{}}\exp\left[\frac{f(x_1)\,z(p_{\text{к}}\bar{p}_1,\ T)}{x_1\bar{p}_1 z(p_{\text{н}},\ T_{\text{н}})}\right]=\frac{4\pi(\bar{p}_1-1)}{-\operatorname{Ei}\left[-\dfrac{f(x_1)\,z(p_{\text{к}}\bar{p}_1,\ T)}{x_1\bar{p}_1 z(p_{\text{н}},\ T_{\text{н}})}\right]}, \qquad \text{(X. 3. 27)}$$

которое таким образом и определяется.

Для второго интервала $x_1 < \xi < x_2$ в (X. 3. 20) и (X. 3. 21), левая часть которого заменяется конечно-разностным отношением $(\alpha_2 - \alpha_1)/(x_2 - x_1)$, будут члены, содержащие q_1, q_2 и α_2, причем q_1 уже известно. Совместно с (X. 3. 24) или (X. 3. 24а) для $\bar{p}(x_2) = \bar{p}_2$, q_2, α_2 мы получаем аналогично разрешаемую систему трех уравнений. По такой же схеме производится расчет для всех последующих интервалов вплоть до последнего $x = x_n$. На каждом этапе, таким образом, получается система трех уравнений для неизвестных $\bar{p}(x_n) = \bar{p}_n$, q_n, $\alpha(x_n) = \alpha_n$, причем для предыдущих интервалов эти величины уже определены. Разумеется, при обычных вычислениях «вручную» расчет требует больших затрат времени. При вычислениях же при помощи быстродействующих вычислительных машин расчеты могут быть существенно ускорены.

Нетрудно видеть, что в частном случае $f(x) = cx$, соответствующем нагнетанию газа в пласт с постоянным весовым расходом, получается точное автомодельное решение, аналогичное решению Н. Н. Веригина [10]: действительно, при $f(x) = cx$, $f(x)/x = c = \text{const} = f(x_1)/x_1$, согласно (X. 3. 27) для p_1 получается трансцендентное уравнение, не содержащее x. Решая его, получаем $\bar{p}_1 = \bar{p} = \text{const}$, а из (X. 3. 25) $q_1 = q = \text{const}$. Из (X. 3. 18) или (X. 3. 18а) находим $\alpha = c_1 x$, т. е. объем газа есть, как и вес газа в пласте, также линейная функция времени.

Для иллюстрации на рис. X. 9—X. 11 приведены кривые изменения величин $\bar{p}(x)$, $q(x)$, $\alpha(x)$ для условий создания и работы подземных газохранилищ в водоносных пластах. Исходные данные, принятые при расчетах, следующие.

Начальное пластовое давление $p_{\text{н}}$, *ата*	34
Мощность пласта h, *м*	8,0
Проницаемость k, *д*	3,74
Пьезопроводность $\varkappa$, *см²/сек*	139 000
Вязкость воды μ, *спз*	1
Приведенный модуль упругости K, *кГ/см²*	7 400
Коэффициент вытеснения σ	0,125
Масштаб времени T_0, годы	$T_0 = 1$

Расчетный технологический процесс состоял из закачки газа в водоносный пласт в течение 4 месяцев с постоянным весовым расходом, четырехмесячного простоя газохранилища и последующего отбора из пласта всего закачанного газа в течение 4 месяцев с постоянным весовым расходом.

Рис. X. 9 соответствует суммарной закачке в пласт 100 млн. н. $м^3$ газа, рис. X. 10 — закачке 150 млн. н. $м^3$ газа, рис. X. 11 — закачке 200 млн. н. $м^3$ газа. Пунктиром на рисунках показаны значения $\alpha(x)$ и $\bar{p}(x)$ для случаев, когда коэффициент вытеснения при извлечении газа в 2 раза выше, чем при закачке, т. е. когда $\sigma = 0{,}25$ при $\dfrac{dR}{dt} < 0$.

На рис. X. 12 приведены кривые изменения $\bar{p}(x)$, $q(x)$, $\alpha(x)$ при циклической работе газохранилища в течение 5 лет ($x = 5$) по технологической схеме: закачка 250 млн. $м^3$ газа в невозмущенный водоносный пласт в течение 4 месяцев

с постоянным весовым расходом, четырехмесячный простой газохранилища, отбор в течение 4 месяцев 125 млн. $м^3$ газа (половины закачанного) с постоянным весовым расходом, в последующие годы циклы повторяются с тем же интервалом времени, но объем закачки поддерживается равным количеству отбираемого газа — 125 млн. н. $м^3$. Коэффициенты вытеснения воды газом и газа водой при расчетах приняты равными, газ — идеальный.

Можно отметить следующее интересное обстоятельство: из рис. X.9, X.10, X.11 следует, что после начала отбора газа газовый объем некоторое время (порядка одного месяца) продолжает расширяться и начало его уменьшения $d\alpha/dt = 0$ несколько отстает от начала отбора. Это несовпадение еще более отчетливо видно на рис. X. 12 в случае циклической работы газохранилища.

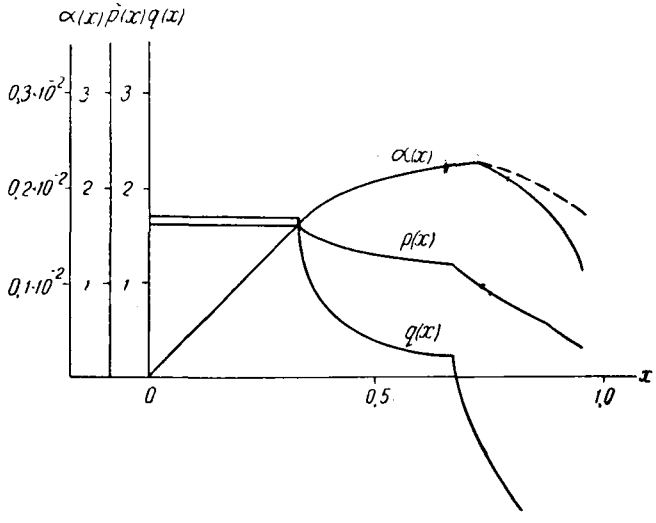


Рис. X. 9.

Из рис. X. 9 — X. 11 следует также, что изменение коэффициента вытеснения при обратном движении воды весьма незначительно сказывается на давлении газа.

Заметим, что иногда для упрощения расчет движения границы раздела газ — вода ведут также при помощи формулы (X. 3. 8), но объемный расход вытесняемой воды считают равным дебиту фиктивного источника $Q_0(t)$ в начале координат. Легко видеть, что это отвечает замене уравнения (X. 3. 9) или (X. 3.12) условием

$$V(t) = \int_0^t Q_0(\tau)\, d\tau \qquad \text{(X. 3. 28)}$$

или, учитывая (X. 3. 14) и (X. 3. 15),

$$\alpha(x) = \tilde{\beta} \int_0^x q(\xi)\, d\xi, \quad \tilde{\beta} = \frac{p_к}{4\pi\sigma K}. \qquad \text{(X. 3. 29)}$$

В таблице приведено сопоставление $\alpha(x)$ из (X. 3. 29) с точными расчетами для случаев рис. X. 9 — X. 11, причем принималось $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}1465 \cdot 10^{-2}$.

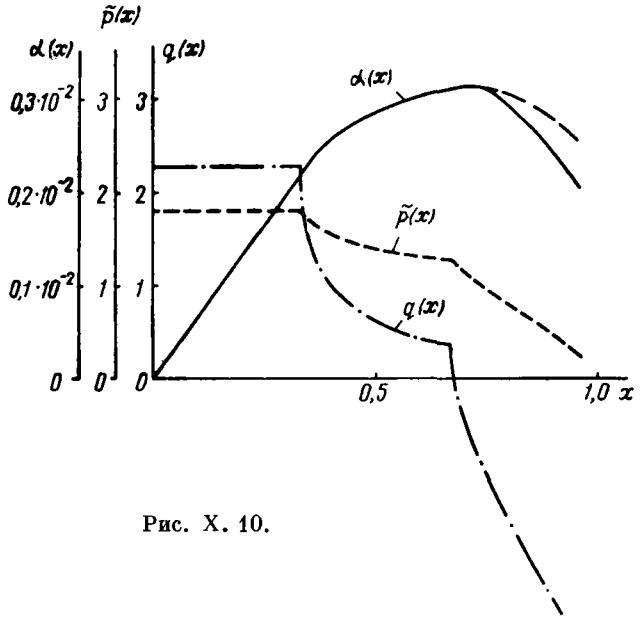


Рис. X. 10.

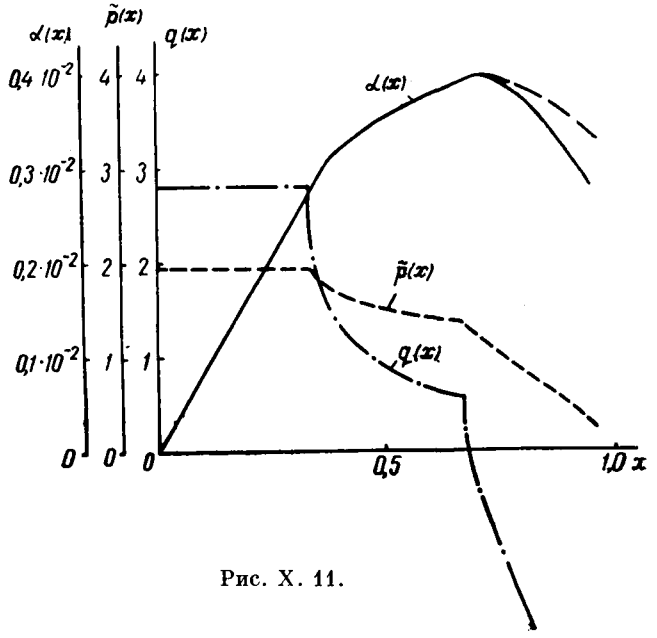


Рис. X. 11.

Сравнение результатов расчетов $\alpha(x)$ по формуле (X. 3. 29) с точными

x	Закачка 100 млн. н. $м^3$ газа (рис. X. 9)		Закачка 150 млн. н. $м^3$ газа (рис. X. 10)		Закачка 200 млн. н. $м^3$ газа (рис. X. 11)	
	значения по точным расчетам	значения по формуле (X. 3. 29)	значения по точным расчетам	значения по формуле (X. 3. 29)	значения по точным расчетам	значения по формуле (X. 3. 29)
$\frac{1}{24}$	$0{,}2042 \cdot 10^{-3}$	$0{,}2052 \cdot 10^{-3}$	$0{,}2769 \cdot 10^{-3}$	$0{,}2787 \cdot 10^{-3}$	$0{,}3419 \cdot 10^{-3}$	$0{,}3447 \cdot 10^{-3}$
$\frac{1}{12}$	$0{,}4084 \cdot 10^{-3}$	$0{,}4120 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5538 \cdot 10^{-3}$	$0{,}5588 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6838 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6902 \cdot 10^{-3}$
$\frac{1}{8}$	$0{,}6142 \cdot 10^{-3}$	$0{,}6156 \cdot 10^{-3}$	$0{,}8320 \cdot 10^{-3}$	$0{,}8362 \cdot 10^{-3}$	$0{,}1026 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1034 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{6}$	$0{,}8168 \cdot 10^{-3}$	$0{,}8206 \cdot 10^{-3}$	$0{,}1108 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1115 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1367 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1379 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{4}$	$0{,}1225 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1230 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1661 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1672 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2051 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2068 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{3}$	$0{,}1633 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1641 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2215 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2230 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2735 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2757 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{2}$	$0{,}2075 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1919 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2855 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2657 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3554 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3319 \cdot 10^{-2}$
$\frac{2}{3}$	$0{,}2236 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2053 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3121 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2881 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3919 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3630 \cdot 10^{-2}$
$\frac{3}{4}$	$0{,}2199 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1867 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3104 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2676 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3924 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3410 \cdot 10^{-2}$
$\frac{5}{6}$	$0{,}1944 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1533 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2816 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2283 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3613 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2970 \cdot 10^{-2}$
$\frac{11}{12}$	$0{,}1581 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1060 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2355 \cdot 10^{-2}$	$0{,}1718 \cdot 10^{-2}$	$0{,}3100 \cdot 10^{-2}$	$0{,}2333 \cdot 10^{-2}$

Как видно, в начале процесса (при закачке газа) согласие хорошее, затем расхождение заметно увеличивается — до 30% и более (в конце выпуска газа).

Таким образом, применение упрощенной формулы (X. 3. 29) может быть сопряжено со значительными ошибками.

Вполне аналогично может быть решена задача разработки газового месторождения при упруго-водонапорном режиме.

Ниже приведены результаты расчетов для случаев разработки газовых месторождений при равномерном отборе, когда запас газа в каждый момент определяется формулой

$$W_{\text{н}}(t) = W_{\text{н}}(0) - Q_{\text{н}} t, \qquad \text{(X. 3. 30)}$$

где $Q_{\text{н}}$ — отбираемый дебит газа из месторождения, приведенный к нормальным условиям.

Выбирая время разработки за масштаб T_0:

$$T_0 = W_н(0)/Q_н,$$

для функции $f(x)$ получаем зависимость в виде

$$f(x) = f(0)(1-x), \qquad (X.3.31)$$

где $f(0)$ определяется из формулы (X.3.19):

$$f(0) = \frac{T}{T_н}\frac{p_н}{p_к}\frac{W_н(0)}{4\varkappa\pi m\bar{\sigma}hT_0} = \frac{T}{T_н}\frac{p_н}{p_к}\frac{Q_н}{4\varkappa\pi m\bar{\sigma}h}. \qquad (X.3.32)$$

Для простоты газ будем считать идеальным, $z(p, T) = 1$. Полное время разработки соответствует $x = 1$. На рис. X.13 представлены сетки кривых в безразмерном виде $\bar{p} = \bar{p}(x)$ для различных значений β и $f(0)$: каждая кри-

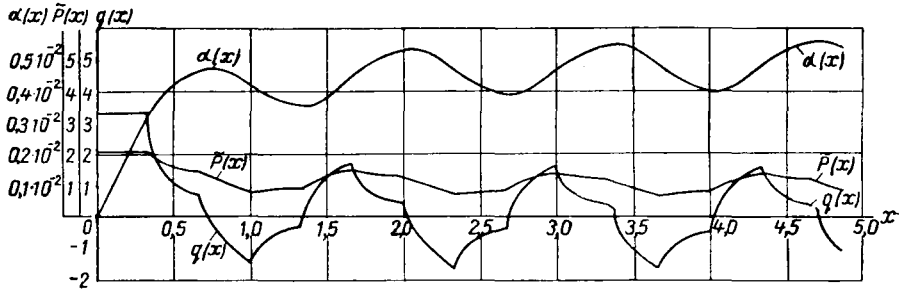


Рис. X. 12.

вая соответствует определенному значению $f(0)$, надписанному над ней. Каждая сетка кривых относится к определенному значению β, обозначенному на рис. X.13.

Величины $f(0)$ варьировались в пределах $0{,}1 \cdot 10^{-3}$ до $50 \cdot 10^{-3}$. Биссектрисы, показанные пунктиром, соответствуют отбору при газовом режиме, когда вода не вторгается. Практически интересные случаи попадают внутрь диапазонов изменения параметров β и $f(0)$. Случаи, когда β и $f(0)$ не указаны на графиках, могут быть рассчитаны при помощи интерполяции по β и $f(0)$, которую поясним на следующем примере.

Пусть газовое месторождение в неограниченном пласте характеризуется следующими условиями:

$$\varkappa = 50 \cdot 10^3\ см^2/сек;\ m = 0{,}2;\ \bar{\sigma} = \sigma = 0{,}8;\ h = 10\ м = 1000\ см;$$

$$p_к = 150\ ama = 150\ кГ/см^2,\ K = 10\,000\ кГ/см^2,\ T = T_н,\ p_н = 1\ am = 1\ кГ/см^2.$$

Пусть отбор газа составляет

$$Q_н = 5 \cdot 10^6\ н.м^3/сутки = \frac{5 \cdot 10^6 \cdot 10^6}{86\,400}\ н.см^3/сек = 58 \cdot 10^6\ н.см^3/сек.$$

Вычисляем по формулам (X.3.17) и (X.3.22) β и $f(0)$:

$$\beta = \frac{150}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 10\,000 \cdot 0{,}8} = 1{,}5 \cdot 10^{-3},$$

$$f(0) = \frac{58 \cdot 10^6}{4 \cdot 50 \cdot 10^3 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 1000}\frac{1}{150} = 3{,}82 \cdot 10^{-3}.$$

Эти значения β и $f(0)$ на графиках рис. X.13 отсутствуют, но они попадают в имеющийся диапазон их изменений. Интерполяция производится следующим

образом. Построим значения $\bar{p}(x)$ к примеру для $x = 0{,}5$, 0,75 и 0,9. Для каждого значения x на графиках имеются нужные значения β и $f(0)$, внутри которых находятся $\beta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$, $f(0) = 3{,}82 \cdot 10^{-3}$. Первая интерполяция производится по $f(0)$ для различных фиксированных x при фиксированных значениях β. На рис. X. 14 представлены результаты интерполяции по $f(0)$. Для большей точности интерполяция производилась не линейным образом, а графически, для чего строились кривые зависимости $\bar{p}$ от $f(0)$ для каждого из значе-

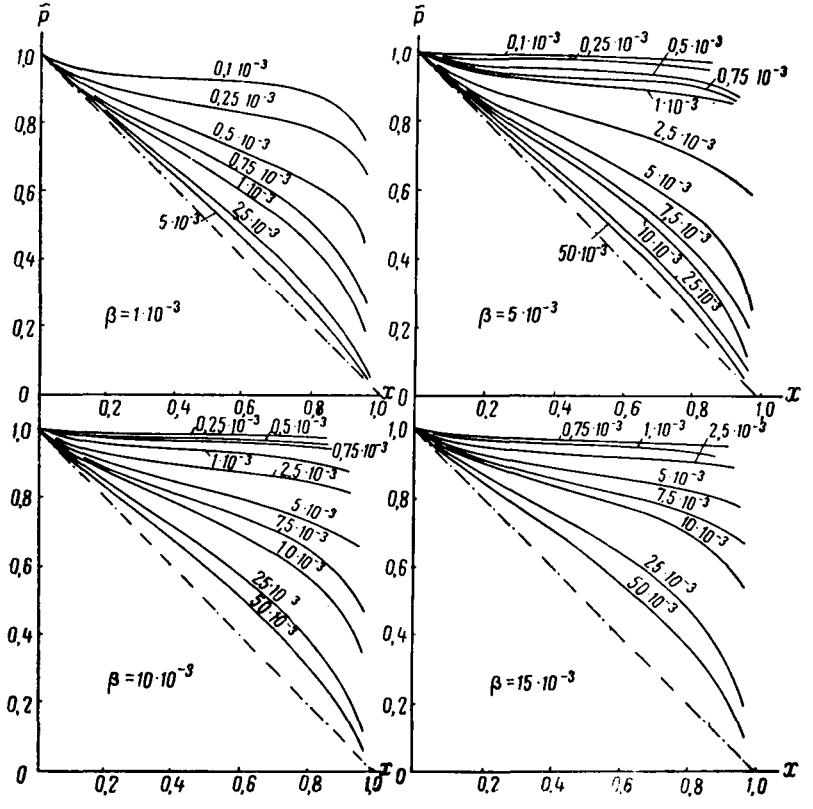


Рис. X. 13.

ний $x = 0{,}5$, 0,75 и 0,9 при $\beta = 1 \cdot 10^{-3}$ (кривые *1а*, *1б*, *1в*), $\beta = 5 \cdot 10^{-3}$ (*2а*, *2б*, *2в*), $\beta = 10 \cdot 10^{-3}$ (*3а*, *3б*, *3в*). Кривые строились для точек $f(0)$, близких к $f(0) = 3{,}82 \cdot 10^{-3}$, $f(0) = 1 \cdot 10^{-3}$, $f(0) = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$, $f(0) = 5 \cdot 10^{-3}$ (светлые кружки на рис. X. 14). Для значения $f(0) = 3{,}82 \cdot 10^{-3}$ пересечение вертикали с построенными кривыми определяет точки (темные кружки на кривых (рис. X. 14) для $x = 0{,}5$:

$$\beta = 1 \cdot 10^{-3}, \quad \bar{p} = 0{,}555,$$
$$\beta = 5 \cdot 10^{-3}, \quad \bar{p} = 0{,}775,$$
$$\beta = 10 \cdot 10^{-3}, \quad \bar{p} = 0{,}85.$$

Эти значения нанесены на кривую *1* рис. X. 15 в виде зависимости $\bar{p}$ от β, причем параметром является $x=0{,}5$.

Аналогично для $x=0{,}75$ (кривая *2*)

$$\beta=1\cdot10^{-3},\quad \bar{p}=0{,}325,$$
$$\beta=5\cdot10^{-3},\quad \bar{p}=0{,}640,$$
$$\beta=10\cdot10^{-3},\quad \bar{p}=0{,}815$$

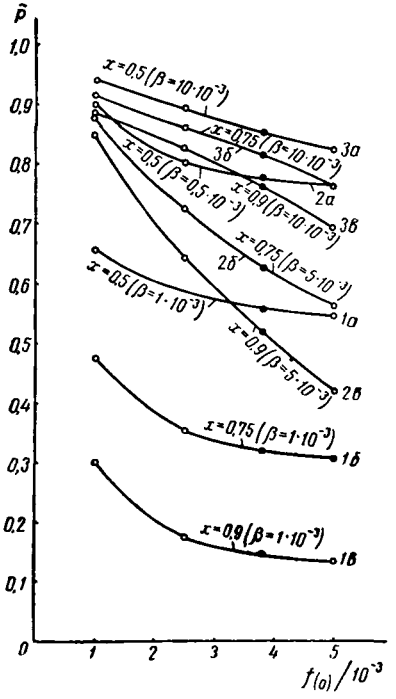


Рис. X. 14.

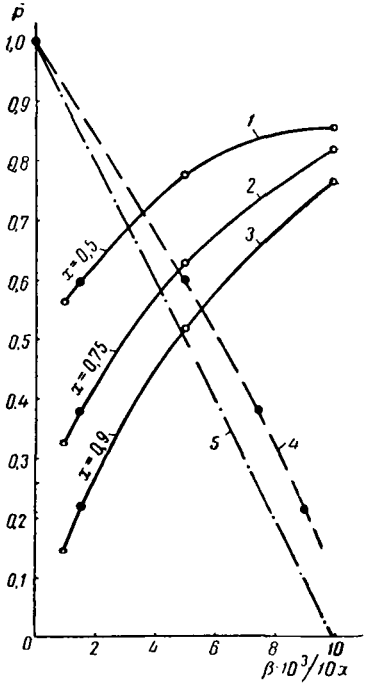


Рис. X. 15.

и для $x=0{,}9$ (кривая *3*)

$$\beta=1\cdot10^{-3},\quad \bar{p}=0{,}140,$$
$$\beta=5\cdot10^{-3},\quad \bar{p}=0{,}510,$$
$$\beta=10\cdot10^{-3},\quad \bar{p}=0{,}760.$$

По этим кривым для $\beta=1{,}5\cdot10^{-3}$, проводя вертикаль на рис. X. 14, находим $x=0{,}5$, $\bar{p}=0{,}59$; $x=0{,}75$, $\bar{p}=0{,}375$; $x=0{,}9$, $\bar{p}=0{,}215$.

Теперь уже можно построить искомую кривую $\bar{p}(x)$ для нужных нам значений $\beta=1{,}5\cdot10^{-3}$ и $f(0)=3{,}82\cdot10^{-3}$ (кривая *4* на рис. X. 15). Для сопоставления на том же рис. X. 15 показана прямая *5*, соответствующая отбору газа при газовом режиме. Из рис. X. 15 видно, что вторжение воды заметно уменьшает темп падения пластового давления.

Все численные расчеты, приведенные в этом параграфе, результаты которых представлены в виде кривых рис. X. 9 — X. 15, были произведены аспирантом Вычислительного центра АН СССР Н. М. Мухидиновым на электронно-счетной машине БЭСМ-2 в Вычислительном центре АН СССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эфрос Д. А., Кундин С. А., Солохин Е. Я. Опытные установки и методика экспериментальных исследований фильтрации неоднородных жидкостей. Труды ВНИИ, вып. IX, 1954.

2. Эфрос Д. А., Фаткуллин А. Х., Ланитина А. А. Модель для исследования процесса вытеснения нефти водой в мощном пласте. НТС по добыче нефти, № 15, 1961.

3. Фаткуллин А. Х., Ланитина А. А. К вопросу о нефтеотдаче пласта при заводнении. НТС по добыче нефти, № 16, 1962.

4. Фаткуллин А. Х. Сравнение некоторых теоретических решений задачи о движении водо-нефтяного контакта с экспериментальными данными. НТС по добыче нефти, № 17, 1962.

5. Курбанов А. К., Фаткуллин А. Х. О фильтрации двухжидкостной смеси. Сиб. отд. АН СССР. Прикл. мех. и техн. физ., № 1, 1962.

6. Донецкий В. Н. Задача о движении границы раздела при фильтрации двухфазной жидкости. Труды МИНХ и ГП им. Губкина, вып. 29, 1960.

7. Егорова И. И., Оганджанянц В. Г. Моделирование процессов вытеснения нефти из слоистых сред. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 3, 1960.

8. Чарный И. А., Холин А. И., Эйхман В. Н., Севостьянов М. М. Динамика осушки пласта при сооружении подземных газохранилищ. Газовая промышленность, № 1, 1962.

9. Чарный И. А., Донецкий В. Н., Чэнь Чжун-сян. Об эквивалентной насыщенности при решении задач двухфазной фильтрации. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, № 2, 1960.

10. Веригин Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1952.

11. Рубинштейн Л. И. Об одном случае фильтрации двух малосжимаемых жидкостей через деформируемую пористую среду. Изв. высш. учебн. завед., сер. матем., № 1, 1959.

12. Любов Б. Я. Вычисление скорости затвердевания металлического слитка. Докл. АН СССР, т. 68, № 5, 1949.

13. Казымов А. Ш. К вопросу о вытеснении газа упругой жидкостью. НТС по добыче нефти, № 15. Гостоптехиздат, 1961.

14. Портнов И. Г. Точное решение задачи о промерзании с произвольным изменением температуры на подвижной границе. Докл. АН СССР, т. 143, № 3, 1962.

15. Van-Everdingen A. F., Hurst W. The Application of the Laplace Transformation to Flow problems in Reservoirs. J. Petrol. Technology, vol. 1, No. 12, 1949.

16. Yoo H. D., Katz D. L., Tek M. R. Study of Gas Reservoirs Subject to Water Drive on Electronic Differential Analiser. Soc. Petrol. Eng. J., 1, No. 4, 1961.

17. Чарный И. А. О продвижении подошвенной воды в газовые залежи купольного типа. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1950.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Глава I. **Основные понятия теории фильтрации** 9

§ 1. Пористая среда. Связь скорости фильтрации с действительной физической скоростью частиц жидкости. Закон Дарси. Коэффициенты фильтрации и проницаемости 9
§ 2. Одномерное течение. Приток несжимаемой жидкости к стоку и источнику на плоскости и в пространстве 17
§ 3. Одномерное установившееся движение однородной сжимаемой жидкости в трубке тока переменного сечения 24
§ 4. О распределении скоростей в поперечном сечении фильтрационного потока 27

Глава II. **Дифференциальные уравнения теории фильтрации однородной жидкости** 31

§ 1. Дифференциальные уравнения изотермической фильтрации без учета массовых сил 31
§ 2. Вывод Н. Е. Жуковского дифференциальных уравнений изотермического движения жидкости в пористой среде с учетом массовых сил из дифференциальных уравнений Эйлера для идеальной жидкости 33
§ 3. Замечания о системе уравнений для общего случая неизотермической фильтрации 40
§ 4. Закон сохранения массы фильтрационного потока 41
§ 5. Закон изменения количества движения фильтрационного потока 42
§ 6. Закон сохранения энергии для фильтрационного потока . . 48
§ 7. Частные случаи 57
§ 8. Примеры практического использования уравнения энергии для неизотермической фильтрации 61

Глава III. **Плоские задачи теории фильтрации о притоке к совершенным скважинам** 66

§ 1. Связь теории функции комплексного переменного с плоской задачей теории фильтрации. Функция тока. Комплексный потенциал 66
§ 2. Приток к точечным стокам и источникам на плоскости. Случай равнодебитных стока и источника. Приток к скважине, эксцентрично расположенной в круговом пласте 72
§ 3. Вывод некоторых формул для притока к скважинам при помощи конформного отображения 78
§ 4. Течение между конфокальными эллипсами 88

Стр.

§ 5. Приток к скважинам в пласте овальной формы 89
§ 6. Приток к скважинам в круговом пласте при переменном давлении на контуре питания 92

Глава IV. **Практические методы расчета притока к совершенным скважинам** 100
§ 1. Вводные замечания. Потенциал нескольких точечных стоков в неограниченном пласте 100
§ 2. Приток к совершенной скважине в пласте с прямолинейным контуром питания. Метод отражения 103
§ 3. Приток к группе совершенных скважин в пласте с удаленным контуром питания. Потенциал и скорость фильтрации результирующего течения 106
§ 4. Приток к бесконечным цепочкам и кольцевым батареям скважин 110
§ 5. Метод эквивалентных фильтрационных сопротивлений . . . 111

Глава V. **Приток к несовершенным скважинам при линейном и нелинейном законах фильтрации** 117
§ 1. Виды несовершенства скважин. Приток к одной необсаженной скважине с открытым забоем в центре кругового пласта . . 117
§ 2. Интерференция несовершенных скважин. Приведенный радиус несовершенной скважины 124
§ 3. Расчет фильтрационного сопротивления, обусловленного несовершенством скважины в однородно-анизотропном пласте 129
§ 4. Приток к скважинам с двойным видом несовершенства . . . 139
§ 5. Случай обсаженной скважины, вскрытой небольшим числом перфораций 142
§ 6. Индикаторные кривые дебит — депрессия для однородной несжимаемой жидкости и для газа при линейном и нелинейном законах фильтрации. Интерференция скважин при двучленном законе фильтрации 145

Глава VI. **Безнапорное движение жидкости в пористой среде** 157
§ 1. Особенности безнапорного движения. Предпосылки гидравлической теории безнапорного движения 157
§ 2. Гидравлическая теория безнапорного движения через прямоугольную перемычку на горизонтальном непроницаемом основании 161
§ 3. Гидравлическая теория безнапорного притока к совершенной скважине 162
§ 4. Строгое доказательство формул Дюпюи для безнапорного движения через перемычку и притока к скважине. 163
§ 5. Сведение безнапорного движения к равнодебитному напорному 168
§ 6. Интегральные соотношения между фильтрационным расходом и граничными потенциалами при плоском и осесимметричном движении в пласте переменной мощности 172
§ 7. Дифференциальные уравнения гидравлической теории нестационарной безнапорной фильтрации. Аналогия с неустановившейся фильтрацией идеального газа 174

Глава VII. **Движение и равновесие границы раздела двух жидкостей в пористой среде** 178
§ 1. Введение 178
§ 2. Уравнения движения отмеченных частиц в потоке однородной жидкости 180

Стр.

§ 3. Расчет скорости вытеснения одной жидкости другой из трубок тока, предполагаемых неизменными 181
§ 4. Замечания о задачах фильтрации с подвижными граничными условиями. Сведение задачи о движении границы раздела к решению интегро-дифференциального уравнения специального типа 186
§ 5. Вытеснение нефти водой из трубки тока переменного сечения 193
§ 6. Прямолинейное и плоско-радиальное движение границы раздела в пласте с постоянными мощностью, пористостью и проницаемостью 195
§ 7. Характер движения водо-нефтяного контакта. Схемы предельно анизотропных пластов. Устойчивость движения границы раздела 198
§ 8. Конус подошвенной воды. Условия равновесия и прорыва подошвенной воды или верхнего газа в скважину 202
§ 9. Совместный приток нефти и подошвенной воды к несовершенной скважине 214
§ 10. Выравнивание возмущенной в начале границы раздела двух жидкостей в пористой среде под действием гравитационных сил. Расчет предельных схем течения 218
§ 11. Автомодельные решения задачи о прямолинейном и радиальном вытеснении одной жидкости другой в предельно анизотропном пласте $k_y = \infty$ 230

Глава VIII. **Нестационарная фильтрация однородной упругой жидкости и газа** 250

§ 1. Уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. Влияние неподвижных газовых включений на приведенный модуль упругости пластовой системы 250
§ 2. Вывод формул для притока упругой жидкости к прямолинейной галерее и к точечному источнику на плоскости 258
§ 3. Приток к точечному стоку и кольцевой галерее при переменном дебите 269
§ 4. Метод последовательной смены стационарных состояний. Приток к прямолинейной галерее 272
§ 5. Расчет радиального притока упругой жидкости по методу последовательной смены стационарных состояний 279
§ 6. Об одном видоизменении метода интегральных соотношений для решения задач упругого режима фильтрации с неподвижными и подвижными граничными условиями 284
§ 7. Некоторые методы определения параметров пластов и скважин при упругом режиме фильтрации 298
§ 8. Краткие сведения о нестационарной фильтрации газов . . . 306

Глава IX. **Фильтрация смесей нескольких жидкостей** 313

§ 1. Вводные замечания. Основные уравнения фильтрации двухфазной жидкости 313
§ 2. Теория Баклея — Леверетта 321
§ 3. Общие соображения о движении скачков насыщенности . . 327
§ 4. Одномерная фильтрация двухфазной жидкости в трубке тока переменного сечения без учета массовых сил 330
§ 5. Одномерная фильтрация двухфазной жидкости с произвольными массовыми силами 335
§ 6. Фильтрация двухфазной жидкости с учетом капиллярного давления 345

Стр.

§ 7. Фильтрация трехфазной смеси 348
§ 8. Установившееся движение газированной жидкости в пористой среде. Замечания о практических методах расчета неустановившегося движения 355
§ 9. Уравнения движения многокомпонентных смесей с учетом фазовых превращений 365

Глава X. **Некоторые специальные задачи вытеснения в пористой среде** 371

§ 1. Влияние фазовых проницаемостей на характер движения при интенсивном темпе вытеснения одной жидкости другой в пористой среде 371
§ 2. Влияние неоднородности пористой среды вдоль вертикали на процесс вытеснения 374
§ 3. Расчет движения газового объема в неограниченном водоносном пласте 378

Автор

Исаак Абрамович Чарный

ПОДЗЕМНАЯ ГИДРОГАЗОДИНАМИКА

Ведущий редактор *С. М. Кашкова*

Технический редактор *А. С. Полосина.* Корректор *Л. В. Сметанина*

Подписано к набору 20/VII 1963 г. Подписано к печати 3/X 1963 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Печ. л. 24,75. Уч.-изд. л. 26,74. Т-12457.
Тираж 2960 экз. Зак. 805/508. Цена 1 р. 09 к.

Гостоптехиздат. Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19.
Типография «Красный Печатник». Ленинград, Московский проспект, 91.

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
56	4 снизу	$+\frac{w}{m}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)$	$+\left(\frac{w}{m}\right)^2\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1+\xi}{g}\frac{w}{m}\right)$
132	5 снизу	$-\frac{q_0}{2\pi}r$	$-\frac{q_0}{2\pi}\ln\frac{R_0}{r}$
145	3 сверху	$C\approx\frac{h}{Nd}\varkappa\varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$	$C\approx\frac{h}{Nd}\sqrt{\varkappa}\,\varphi\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$
190	ф-ла (VII. 4. 20)	$Q_i(t)$	$\ddot{Q}_i(t)$
191	11 снизу	$\frac{\partial f^2(\dot{\theta},\,0)}{\partial t}$	$\frac{\partial\overline{f^2}(\theta,\,0)}{\partial\overline{t}}$
235	ф-ла (VII. 11. 25)	$+\sum_1^n\alpha_i\varphi_i(\xi)$	$u(\xi)=\alpha_0+\sum_1^n\alpha_i\varphi_i(\xi)$
239	9 снизу	влияния из уравнения	влияния $\Delta\gamma$ из уравнения
246	ф-ла (VII. 11. 96)	$\frac{4A}{0}$	$\frac{4A}{\mu_0}$
259	15 сверху	$\xi=\xi(x)$	$\xi=\xi(x,\,t)$
294	8 сверху	$\alpha_1=10^{-4},\,10$	$\alpha_1=10^{-4},\,0$
304	17 сверху	[1]	[25]
342	12 снизу	системы (IX. 5. 40)	системы (IX. 5. 39)
342	10 снизу	Уравнение (IX. 5. 41)	Уравнение (IX. 5. 40)
342	4 снизу	Из второго уравнения системы (IX. 5. 40)	Из первого уравнения системы (IX. 5. 39)
343	1 сверху	уравнений (IX. 5. 40)	уравнений (IX. 5. 39)
352	ф-ла IX. 7. 17	$mS(x)-\frac{dx}{dt}Q\frac{\partial q_2}{\partial\sigma_2}$	$mS(x)\frac{dx}{dt}-Q\frac{\partial q_2}{\partial\sigma_2}$